

پودمان اول

تابع



اگر پرتابه‌ای را به‌طور افقی پرتاب کنیم، پس از مدتی بر روی زمین سقوط می‌کند. هرچه سرعت اولیه پرتابه بیشتر باشد، پرتابه مدت بیشتری را در هوا باقی‌ماند و محل سقوط بر روی زمین فاصله بیشتری تا محل پرتاب دارد.

فاصله محل سقوط پرتابه تا محل پرتاب وابسته به سرعت اولیه پرتابه است و می‌گویند این فاصله تابعی از سرعت اولیه پرتابه است. اما با توجه به گرد بودن زمین، با افزایش سرعت اولیه پرتابه (تقریباً ۷ کیلومتر در ثانیه)، ممکن است پرتابه هرگز بر زمین سقوط نکند.

اگر سرعت اولیه پرتابه از این مقدار بیشتر باشد، پرتابه با زمین برخورد نمی‌کند.

رابطه بین کمیت‌ها

امروز، کلاس ریاضی ما با نجوم شروع شد.

دبیر گفت: من در دوره دبیرستان به نجوم خیلی علاقه داشتم و درباره آن بسیار مطالعه می‌کردم. در کتاب‌های نجوم خوانده بودم که فاصله خورشید تا زمین 150 میلیون کیلومتر است و نور خورشید حدود 8 دقیقه و 20 ثانیه طول می‌کشد تا به زمین برسد. بعد از خورشید، نزدیک‌ترین ستاره به زمین، پروکسیما قنطورس^۱ (Proxima Centauri) نام دارد. نور این ستاره $4/2$ سال طول می‌کشد تا به زمین برسد. فاصله ستارگان از هم زیاد است و برای اندازه‌گیری آن از مقیاس بسیار بزرگی به نام سال نوری استفاده می‌شود. منظور از سال نوری، طول مسیری است که نور در یک سال طی می‌کند. برای مثال، فاصله پروکسیما قنطورس با زمین، $4/2$ سال نوری است. دورترین ستاره‌های دیده شده، $13/3$ میلیارد سال نوری با ما فاصله دارند.

آرش که از هنرجویان کنجکاو کلاس بود، با تعجب پرسید:

ما که نمی‌توانیم به این ستاره‌ها برویم؛ پس دانشمندان این فاصله‌ها را چگونه اندازه می‌گیرند؟ دبیر گفت: سؤال بسیار خوبی است. اما من یک سؤال آسان‌تر مطرح می‌کنم؛ معمولاً مساحت یک مربع را چگونه اندازه می‌گیرید؟

حمید گفت: طول ضلع مربع را اندازه می‌گیرم و سپس، آن را به توان دو می‌رسانم.

دبیر گفت: پس، مساحت مربع را به طور مستقیم اندازه‌گیری نمی‌کنید؛ بلکه از طریق طول ضلع آن، مساحتش را به دست می‌آورید.

حمید گفت: بله، مساحت مربع با طول ضلعش رابطه دارد، اما این مطلب چه ربطی به فاصله ستارگان دارد؟ دبیر گفت: صبر کنید به ارتباط این مطالب با فاصله‌های ستارگان هم می‌رسیم. آیا می‌توانید مورد دیگری هم پیدا کنید که نتوانید آن را به طور مستقیم اندازه‌گیری کنید ولی با اندازه‌گیری یک کمیت^۲ دیگر، اندازه آن را به دست آورید؟

صادق گفت: در جایی دیدم که ارتفاع از سطح دریا را با دماسنج اندازه می‌گیرند. دمایی که آب در آن به جوش می‌آید یعنی دمای جوش آب، در هر مکان با ارتفاع آن مکان از سطح دریا رابطه دارد. پس اگر دمای جوش آب را در مکانی اندازه‌گیری کنیم، ارتفاع آن مکان از سطح دریا را می‌توانیم به دست آوریم. دبیر گفت: برای اندازه‌گیری فاصله ستارگان تا زمین، آیا می‌توان از این روش استفاده کرد؟

۱- در بعضی از متون مربوط به ستاره‌شناسی این ستاره را پروکسیما سنتوری نام می‌برند.

۲- مفاهیمی مانند وزن و جرم و بار الکتریکی و فشار هوا و نظایر آنها را کمیت‌های فیزیکی و مفاهیمی مانند طول و مساحت و حجم و نظایر آنها را کمیت‌های هندسی می‌نامند. برخی از این کمیت‌ها با یکدیگر رابطه دارند و شناختن این ارتباطات بخش مهمی از کار علوم تجربی و ریاضی است.

آرش گفت: اگر بتوانیم کمیتی را بیابیم که با این فاصله‌ها ارتباط داشته باشد و بتوان آن را اندازه‌گیری کرد، شاید بتوانیم این فاصله‌ها را به دست آوریم.

دبیر گفت: به یک چراغ روشن دقت کنید. هر چه به آن نزدیک‌تر می‌شوید، نور بیشتری به شما می‌رسد و هر چه از آن دورتر می‌شوید، نور کمتری دریافت می‌کنید. آیا این مطلب به حل مسئله کمکی می‌کند؟

آرش گفت: یعنی میزان نوری که از چراغ به ما می‌رسد، با فاصله چراغ از ما مرتبط است. پس با اندازه‌گیری نوری که از ستارگان به ما می‌رسد، می‌توانیم فاصله آنها را به دست آوریم.

دبیر گفت: بله درست است. با اندازه‌گیری نوری که از ستارگان به ما می‌رسد، فاصله آنها با ما به دست می‌آید.

در دنیای واقعی، به کمیت‌های متعددی برخورد می‌کنیم که با هم ارتباط دارند؛ از این ارتباط می‌توان استفاده کرد و با داشتن مقدار یکی، دیگری را به دست آورد. برای درک بهتر مفهوم رابطه بین کمیت‌ها، در فعالیت (۱) ارتباط طول یک فنر و جرم جسمی را که به آن آویزان می‌شود، بررسی می‌کنیم.

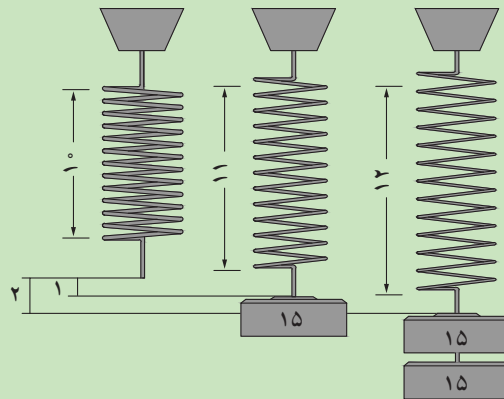




فنری در اختیار داریم که در حالت طبیعی طول آن ۱۰ سانتی‌متر است. به ازای هر ۱۵ گرم وزنه که به آن آویزان می‌کنیم، ۱ سانتی‌متر به طول آن اضافه می‌شود. حداکثر طول این فنر ۶۰ سانتی‌متر است و اگر بیش از این کشیده شود پاره می‌شود.

۱ در جاهای خالی کلمه مناسب بگذارید.

الف) هر چه جرم وزنه آویزان شده شود، طول فنر می‌شود.
 ب) اگر به این فنر یک وزنه ۳۰۰ گرمی آویزان کنیم برای پیدا کردن طول فنر، چون به ازای هر ۱۵ گرم، ۱ سانتی‌متر به طول آن اضافه می‌شود، پس ابتدا ۳۰۰ را بر تقسیم می‌کنیم و سپس



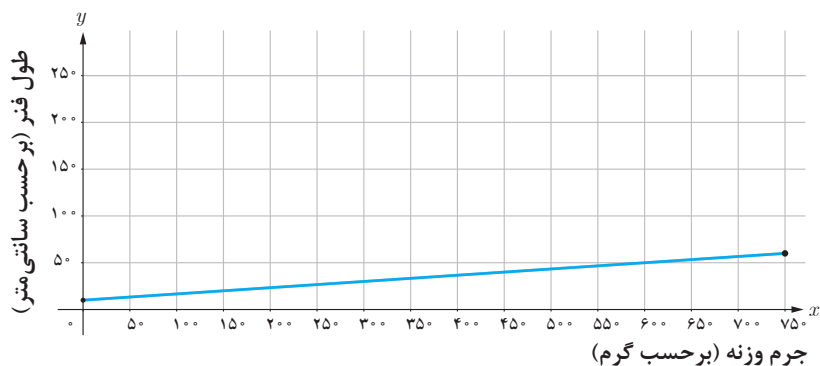
۲ در حالت کلی، اگر جرم وزنه آویزان شده را بر حسب گرم با a نشان دهیم و طول فنر را بر حسب سانتی‌متر با l نشان دهیم، رابطه‌ای بنویسید که مقدار l را بر حسب مقدار a بیان کند.

۳ حداکثر جرمی که می‌توانیم به این فنر آویزان کنیم، چقدر است؟ (راهنمایی: برای پیدا کردن حداکثر جرمی که می‌توانیم به این فنر آویزان کنیم، ابتدا باید حداکثر تغییر طول فنر را به دست آورد).

فعالیت (۱) نشان می‌دهد که اندازه طول فنر با اندازه جرم وزنه آویزان شده مرتبط است. جدول زیر اندازه طول فنر را به ازای چندین مقدار خاص برای جرم وزنه آویزان شده، نشان می‌دهد.

جرم وزنه آویزان شده (بر حسب گرم)	۰	۷۵	۱۵۰	۳۰۰	۴۵۰	۵۲۵	۶۰۰	۷۵۰
طول فنر کشیده شده (بر حسب سانتی‌متر)	۱۰	۱۵	۲۰	۳۰	۴۰	۴۵	۵۰	۶۰

اگر به ازای کلیه مقادیر برای جرم وزنه، مقدار طول فنر را در نظر بگیریم، نمودار این رابطه به صورت یک پاره‌خط طبق شکل زیر است که در آن محور افقی نشان‌دهنده جرم وزنه آویزان شده بر حسب گرم و محور عمودی نشان‌دهنده طول فنر بر حسب سانتی‌متر می‌باشد. جدول بالا، نقاطی از این پاره‌خط را نشان می‌دهد.



کمیت‌های مرتبط بسیاری وجود دارند. برای مثال، مساحت یک مربع و طول ضلع آن دو کمیت مرتبط هستند. در این حالت، اگر طول ضلع مربع را بدانیم، آنگاه می‌توانیم مساحت آن را به دست آوریم و برعکس، با داشتن مساحت مربع، طول ضلع آن نیز مشخص می‌شود.

مثال‌هایی از ارتباط بین کمیت‌ها را می‌توان در طبیعت و زندگی روزمره یافت: فشار هوا در هر نقطه و ارتفاع آن نقطه از سطح دریا، هزینه پرداخت شده بابت برق و میزان برق مصرف شده، قیمت بلیت اتوبوس‌های بین شهری و فاصله بین شهرها و غیره نمونه‌هایی از این ارتباط محسوب می‌شوند. سؤال مهمی که مطرح می‌شود این است که رابطه بین دو کمیت را چگونه باید بیان کنیم. در مثال (۱)، نمونه دیگری از ارتباط بین دو کمیت را می‌بینیم که درک بیشتری از رابطه بین کمیت‌ها را به ما می‌دهد.

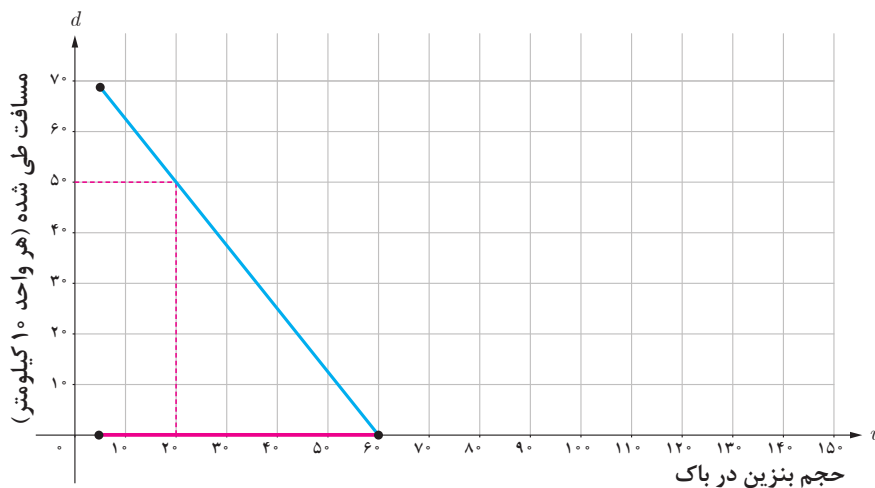
مثال ۱

خودرویی را در نظر بگیرید که گنجایش ۶۰ لیتر بنزین را دارد. اگر این خودرو با سرعت ثابت حرکت کند، برای طی کردن هر ۱۰۰ کیلومتر، ۸ لیتر بنزین مصرف می‌کند. باک این خودرو قبل از حرکت، پر شده است. مقدار بنزین باقی‌مانده در باک خودرو با مسافت طی شده رابطه دارد. توجه داشته باشید که هیچ خودرویی تمام بنزین باک خود را مصرف نمی‌کند و توصیه می‌شود برای وارد نشدن صدمه به موتور، حداقل ۵ لیتر بنزین در باک موجود باشد. در این مثال نتایج زیر را می‌توان مشاهده کرد:

- هر چه بنزین در باک $\dots\dots\dots$ کمتر شود، مسافتی که با خودرو طی شده است $\dots\dots\dots$ بیشتر می‌شود.
- اگر ۴۴ لیتر بنزین در باک خودرو باقی‌مانده باشد، خودرو $\dots\dots\dots$ 200 کیلومتر مسافت را طی کرده است. زیرا، این خودرو به ازای هر لیتر بنزین، $12/5 = 100/8$ کیلومتر مسافت را طی می‌کند.
- با توجه به توصیه‌ای که برای سالم نگه داشتن موتور شده است، حجم بنزین موجود در باک نباید به صفر برسد. طبق توصیه، در باک باید حداقل ۵ لیتر بنزین وجود داشته باشد و حداکثر حجم باک نیز ۶۰ لیتر است.
- اگر مقدار بنزین باقی‌مانده در باک را بر حسب لیتر با v و مسافت طی شده را بر حسب کیلومتر با d نشان دهیم، رابطه‌ای که مقدار d را بر حسب v نشان می‌دهد، به صورت $d = 12/5(60 - v)$ است، زیرا این خودرو به ازای هر لیتر بنزین، $12/5$ کیلومتر مسافت را طی می‌کند.
- جدول زیر مسافت طی شده را به ازای چند مقدار خاص برای حجم بنزین موجود در باک، نشان می‌دهد.

حجم بنزین در باک (بر حسب لیتر)	۵	۱۰	۲۰	۳۰	۴۵	۵۰	۶۰
مسافت طی شده (بر حسب کیلومتر)	۶۸۷/۵	۶۲۵	۵۰۰	۳۷۵	۱۸۷/۵	۱۲۵	۰

اگر به ازای کلیه مقادیر برای حجم بنزین موجود در باک (۵ تا ۶۰ لیتر)، مسافت طی شده را در نظر بگیریم، نمودار این رابطه به صورت یک پاره‌خط طبق شکل صفحه بعد است که محور افقی نشان‌دهنده حجم بنزین موجود در باک بر حسب لیتر و محور عمودی نشان‌دهنده مسافت طی شده بر حسب هر واحد ۱۰ کیلومتر می‌باشد. جدول بالا، نقاطی از این پاره‌خط را نشان می‌دهد.



● با توجه به نمودار، اگر ۲۰ لیتر بنزین در باک باقی مانده باشد، خودرو ۵۰۰ کیلومتر را طی کرده است.

این مثال نشان می‌دهد که برای شناخت رابطه بین مقدار بنزین باقی مانده و مسافت طی شده، کافی است بدانیم که حجم بنزین موجود در باک، چه مقادیری می‌تواند باشد و مسافت طی شده توسط خودرو چگونه از حجم بنزین موجود در باک محاسبه می‌شود. در واقع، برای شناخت رابطه بین دو کمیت، باید بدانیم که این کمیت‌ها چه مقدارهایی می‌توانند داشته باشند و شیوه محاسبه یکی بر حسب دیگری چیست.

رابطه بین کمیت‌ها در زمینه‌های بسیار متنوعی دیده می‌شود و لازم است بتوانیم در هر زمینه‌ای این رابطه‌ها را تشخیص دهیم.

کاردرکلاس ۱



مفتولی به طول ۱۰۰ سانتی‌متر در اختیار داریم. قسمتی از آن را می‌بریم و با قطعه بریده شده یک مربع می‌سازیم. مساحت مربع به دست آمده با طول قطعه بریده شده رابطه دارد.



۱ آیا مساحت می‌تواند صفر باشد؟

۲ اگر طول قطعه بریده شده از مفتول را با x نشان دهیم، چه مقادیری می تواند باشد؟

$$\dots < x < \dots$$

۳ اگر طول قطعه بریده شده از مفتول ۸ سانتی متر باشد، مساحت مربع ساخته شده چند سانتی متر مربع است؟

.....

۴ اگر طول قطعه بریده شده از مفتول را با x و مساحت مربع ساخته شده با آن را با S نشان دهیم، رابطه ای بنویسید که مقدار S را بر حسب مقدار x بیان کند.

.....

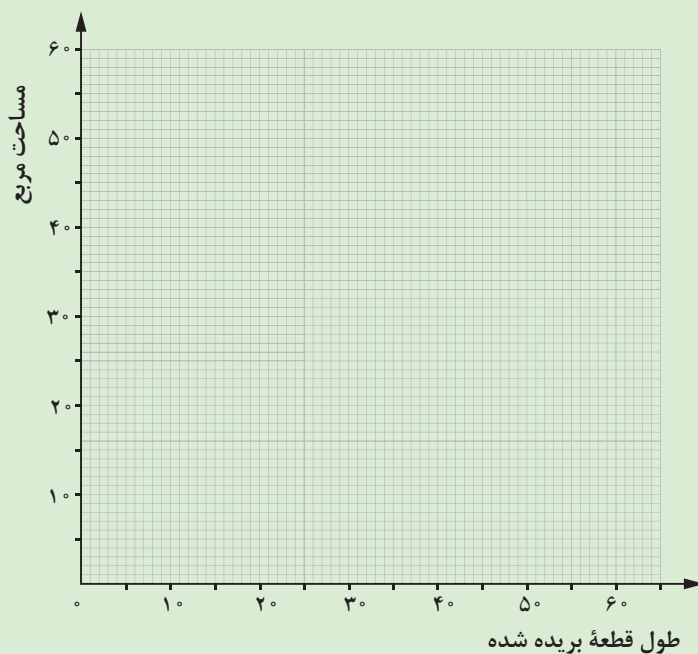
با توجه به پاسخ پرسش های بالا، به سؤال های زیر پاسخ دهید.

۵ جدول زیر، ارتباط بین طول قطعه بریده شده و مساحت مربع ساخته شده را نشان می دهد. این جدول را کامل کنید.

طول قطعه بریده شده (بر حسب سانتی متر)	۱	۴	۲۰	۳۲	۴۸	۶۰
مساحت مربع (بر حسب سانتی متر مربع)		۱			۱۴۴	

.....

۶ در شکل صفحه بعد، محور افقی طول قطعه بریده شده را بر حسب سانتی متر و محور عمودی، مساحت مربع ساخته شده را بر حسب سانتی متر مربع نشان می دهد. جدول بالا، نقاطی در این صفحه مختصات را نشان می دهد. ۴ نقطه اول جدول را در نمودار صفحه بعد بیابید و آنها را به طور تقریبی به هم وصل کنید.



۷ با توجه به نمودار، برای ساختن مربعی به مساحت ۴۰ سانتی متر مربع، چه مقدار از مفتول را باید ببریم؟ این مقدار را به کمک رابطه قسمت (۴) نیز به دست آورید و سپس مقایسه کنید.

.....

.....

۸ آیا پاسخ به سؤالات (۲) و (۴) برای شناخت رابطه بین مساحت مربع ساخته شده و طول قطعه بریده شده از مفتول کافی هستند؟

.....

.....



۱ کدام یک از گزینه‌های زیر دو کمیت مرتبط هستند؟ اگر دو کمیت مرتبط هستند، هر یک را نام‌گذاری کنید و رابطه بین این دو کمیت را با نام‌های انتخابی خود بنویسید.

الف) طول ضلع یک مربع و محیط آن؛
 ب) طول ضلع یک مربع و مساحت آن؛
 پ) محیط یک مثلث و طول بزرگ‌ترین ضلع آن؛
 ت) شعاع یک دایره و محیط آن؛
 ث) شعاع یک دایره و مساحت آن؛
 ج) مساحت یک مستطیل و محیط آن.

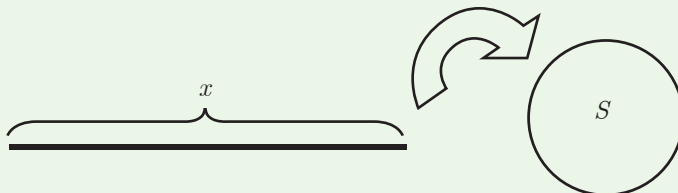
۲ آیا درجه حرارت یک مکان بر حسب سانتی‌گراد و درجه حرارت آن بر حسب فارنهایت مرتبط هستند؟ اگر مرتبط هستند، هر یک را نام‌گذاری کنید و رابطه بین آنها را بنویسید.

۳ وزن جلد کتابی (با حداکثر ۲۰۰ صفحه) برابر ۴۰ گرم و وزن هر ورق آن $\frac{1}{8}$ گرم است. رابطه‌ای بنویسید که به کمک آن بتوان وزن کتاب را بر حسب تعداد ورق‌های آن به دست آورد.

۴ راننده‌ای مسافت ۳۵۰ کیلومتری بین دو شهر را با سرعت ثابت ۷۰ کیلومتر بر ساعت در حال طی کردن است.

الف) آیا مقدار مسافتی که طی می‌کند (d) و زمان (t)، دو کمیت مرتبط هستند؟ اگر دو کمیت مرتبط هستند، چه رابطه‌ای بین آنها برقرار است؟
 ب) هر یک از این دو کمیت چه مقادیری را می‌توانند داشته باشند؟

۵ طنابی به طول ۱۰ متر در اختیار داریم. قطعه‌ای از آن را می‌بریم و با قطعه بریده شده یک حلقه دایره‌ای شکل می‌سازیم. مساحت حلقه دایره‌ای شکل به دست آمده با طول قطعه بریده شده رابطه دارد.



الف) آیا مساحت می‌تواند صفر باشد؟
 ب) طول قطعه بریده شده از طناب، چه مقادیری می‌تواند باشد؟

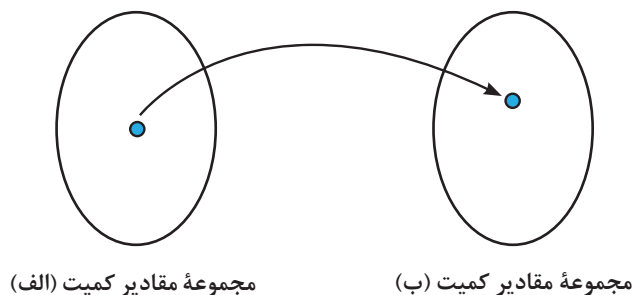
(پ) اگر طول قطعه بریده شده از طناب ۴ متر باشد، مساحت دایره ساخته شده چندمترمربع است؟
 (ت) اگر طول قطعه بریده شده از طناب را با x و مساحت دایره ساخته شده با آن را با S نشان دهیم، رابطه‌ای بنویسید که مقدار S را بر حسب مقدار x بیان کند.
 (ث) جدول زیر، ارتباط بین طول قطعه بریده شده و مساحت دایره ساخته شده را نشان می‌دهد. این جدول را کامل کنید (فرض کنید $\pi \approx 3$).

طول قطعه بریده شده	$\frac{1}{2}$	۲	۴	۶	۸
مساحت دایره	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{3}$			

۶ دو کمیت مرتبط به هم مثال بزنید. هر یک را نام‌گذاری کنید و در صورت امکان رابطه بین این دو کمیت را با نام‌های انتخابی خود بنویسید.

مفهوم تابع

اهمیت رابطه بین کمیت‌ها، ابتدا در فیزیک مشاهده شد و بیان ریاضی ارتباط کمیت‌ها، مفهوم تابع را به وجود آورد. تاکنون، چند کمیت مرتبط به هم را بررسی کردیم. اگر یکی از این کمیت‌ها را کمیت (الف) و دیگری را کمیت (ب) بنامیم، مثال‌ها به گونه‌ای بودند که با مشخص شدن مقدار کمیت (الف)، **یک مقدار معین** برای کمیت (ب) به دست می‌آمد.



این دسته از روابط بین کمیت‌ها، روابط خاصی هستند که در ریاضی با مفهومی به نام تابع بیان می‌شوند و **کمیت (ب) را تابعی از کمیت (الف)** می‌نامند. در واقع، وقتی که کمیتی مانند (ب) وابسته به کمیت دیگری مانند (الف) باشد، و به ازای هر مقداری از کمیت (الف)، مقدار معینی برای کمیت (ب) داشته باشیم، مفهوم تابع پیش می‌آید و می‌گوییم کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) است.



فرهاد گفت: منظور از این جمله که با مشخص شدن مقدار کمیت (الف)، یک مقدار معین برای کمیت (ب) به دست می‌آید، چیست؟

دبیر گفت: در فعالیت (۱) دیدیم که اگر یک وزنه a گرمی به فنر آویزان کنیم، طول آن برابر l خواهد شد و رابطه‌ای که بیانگر این واقعیت است به صورت $l = \frac{a}{15} + 10$ به دست آمد. در این رابطه با مشخص شدن جرم وزنه، یک مقدار معین برای طول فنر به دست می‌آید. مثلاً اگر یک وزنه ۷۵ گرمی به فنر آویزان کنیم، طول آن یک مقدار معین می‌باشد. این مقدار معین برابر ۱۵ سانتی‌متر است. بنابراین، طول فنر تابعی از جرم وزنه می‌باشد.

فرهاد گفت: آیا مثال (۱) که در آن رابطه بین مسافت طی شده با مقدار بنزین باقی‌مانده در باک خودرو را بررسی کردیم، نیز همین‌طور است؟

دبیر گفت: بله. دیدیم که مسافت طی شده (d) با مقدار بنزین باقی‌مانده در باک خودرو (v) رابطه دارد و رابطه‌ای که بیانگر این واقعیت است به صورت $d = 12/5(60 - v)$ است. در این رابطه با مشخص شدن مقدار بنزین باقی‌مانده در باک، یک مقدار معین برای مسافت طی شده به دست می‌آید. مثلاً اگر حجم بنزین باقی‌مانده در باک ۳۰ لیتر باشد، مسافت طی شده، مقدار معین ۳۷۵ کیلومتر می‌باشد. بنابراین، مسافت طی شده توسط خودرو، تابعی از حجم بنزین باقی‌مانده در باک است. آیا شما می‌توانید مثال دیگری ذکر کنید؟

فرهاد گفت: مساحت مربع تابعی از ضلع آن است، زیرا با مشخص شدن اندازه ضلع مربع، یک مقدار معین برای مساحت آن به دست می‌آید. مثلاً اگر اندازه ضلع مربع ۵ متر باشد، مساحت مربع مقدار معین ۲۵ متر مربع می‌باشد.



اگر دو کمیت (الف) و (ب) با یکدیگر مرتبط باشند و با مشخص شدن مقدار کمیت (الف)، یک مقدار معین برای کمیت (ب) به دست آید، در این صورت کمیت (ب) را تابعی از کمیت (الف) می‌نامند.

اگر دو کمیت (الف) و (ب) با هم ارتباط داشته باشند ولی با مشخص شدن مقدار کمیت (الف) نتوان یک مقدار معین برای کمیت (ب) به دست آورد؛ یعنی، با مشخص شدن مقدار کمیت (الف)، بیش از یک مقدار برای کمیت (ب) به دست آید این رابطه، تابع نیست.

مثال ۲

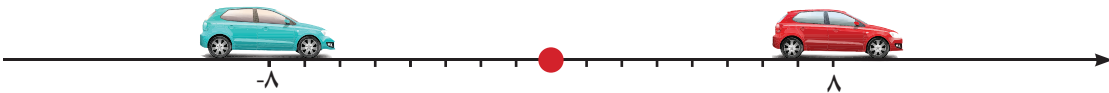
در کار در کلاس (۱) دیدیم که مساحت مربع ساخته شده (S) با طول قطعه بریده شده از مفتول (x) رابطه‌ای به صورت $S = \frac{x^2}{16}$ دارد. در این رابطه با مشخص شدن طول قطعه بریده شده، یک مقدار معین برای مساحت مربع ساخته شده به دست می‌آید. مثلاً اگر طول قطعه بریده شده ۸ سانتی‌متر باشد، مساحت مربع ساخته شده، مقدار معین ۴ سانتی‌متر مربع می‌باشد. بنابراین، مساحت مربع ساخته شده، تابعی از طول قطعه بریده شده است.

مثال ۳

فرض کنید خودرویی در جاده مستقیمی در حال حرکت است. این جاده را به صورت محور اعداد در نظر می‌گیریم. هر نقطه روی محور اعداد، با یک عدد حقیقی مشخص می‌شود که آن را مختص طولی آن نقطه می‌نامند. مثلاً در شکل زیر مختص طولی خودروی قرمز برابر ۲ و مختص طولی خودروی آبی برابر ۳- است. مختص طولی این خودرو، با فاصله آن تا مبدأ ارتباط دارد.



اگر فاصله خودرو تا مبدأ را کمیت (الف) و مختص طولی آن را کمیت (ب) بنامیم، با مشخص شدن مقدار کمیت (الف)، برای کمیت (ب) یک مقدار معین به دست نمی‌آید. مثلاً، اگر فاصله خودرو تا مبدأ ۸ واحد باشد، خودرو ممکن است دارای مختص طولی ۸- یا ۸ باشد. یعنی به طور قطع نمی‌توان یک مکان خاص مشخص را برای خودرو تعیین کرد. به عبارت دیگر، با داشتن فاصله خودرو تا مبدأ، برای مختص طولی آن یک مقدار معین به دست نمی‌آید، زیرا ممکن است مختص طولی خودرو، دو عدد قرینه هم باشد.



بنابراین، در این مثال، کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) نخواهد بود. اما بر عکس، با مشخص شدن مختص طولی خودرو، فاصله آن تا مبدأ دقیقاً مشخص می‌شود. پس، در این مثال، کمیت (الف)، تابعی از کمیت (ب) خواهد بود. برای مثال، اگر مختص طولی خودرو برابر ۳- باشد، در این صورت فاصله آن از مبدأ مقدار معین ۳ است.





۱ در فعالیت (۱)، آیا جرم جسم آویزان شده، تابعی از طول فنر است؟ چرا؟

.....

.....

۲ در مثال (۱)، آیا مسافت طی شده توسط خودرو، تابعی از حجم بنزین مصرف شده است؟ چرا؟

.....

.....

در بررسی نمونه‌هایی از کمیت‌های مرتبط دیدیم که برای مشخص شدن تابعی که رابطه بین دو کمیت (الف) و (ب) را بیان می‌کند باید به دو سؤال اصلی زیر پاسخ دهیم:

۱ کمیت (الف) چه مقادیری می‌تواند داشته باشد؟

۲ با مشخص شدن یک مقدار برای کمیت (الف)، چگونه مقدار کمیت (ب) به دست می‌آید؟



فرض کنیم کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) باشد. مقادیری را که کمیت (الف) می‌تواند داشته باشد، دامنه این تابع می‌نامند و قانونی را که، مقادیر کمیت (ب) را بر حسب مقادیر کمیت (الف) به دست می‌دهد، قانون یا ضابطه این تابع می‌نامند.

مثال ۴

در کار در کلاس (۲) دیدیم که اگر l ، طول فنر کشیده شده با آویزان کردن یک وزنه a گرمی باشد، جرم وزنه، تابعی از طول فنر کشیده شده است. مقادیری که طول فنر می‌تواند داشته باشد از ۱۰ تا ۶۰ سانتی‌متر هستند. پس، دامنه این تابع $\{x \in \mathbb{R} \mid 10 \leq x \leq 60\}$ است. مقدار a بر حسب l از طریق تساوی $a = 15l - 150$ محاسبه می‌شود، پس قانون تابعی که جرم وزنه را بر حسب طول فنر بیان می‌کند، به صورت $a = 15l - 150$ است.



۱ در مثال (۱)، دامنه و قانون تابعی را بنویسید که مسافت طی شده توسط ماشین را بر حسب حجم بنزین باقی مانده در باک، بیان می کند.

.....

.....

۲ در کار در کلاس (۱)، دامنه و قانون تابعی را بنویسید که مساحت مربع ساخته شده را بر حسب طول قسمت بریده شده از مفتول، بیان می کند.

.....

.....



نیاز به بررسی روابط بین کمیت‌ها با رشد علوم آغاز شد. ابتدا نیوتن و گالیله برای توصیف حرکت اشیا، نیاز به یافتن رابطه بین زمان و مکان اشیا را احساس کردند. لایبنیتز ریاضی دان قرن هفدهم نیز برای توصیف یک منحنی در صفحه، نیاز به یافتن رابطه بین طول و عرض نقاط یک منحنی را احساس کرد. نهایتاً، بررسی روابط بین کمیت‌ها منجر به تعریف مفهوم تابع در ریاضی شد. اما رسیدن به مفهوم تابع چندان ساده نبود و با شروع از کارهای نیوتن و لایبنیتز تا رسیدن به یک مفهوم دقیق از تابع، بیش از سه قرن طول کشید (تاریخ ریاضی ایوز، جلد ۲).



نیوتن



لایبنیتز



۱ آیا دمای کلاس شما در یک روز معین، تابعی از زمان است؟ چرا؟

۲ دمای هوا در یک منطقه، در ارتفاعات مختلف از سطح دریا، متفاوت است و به ازای هر ۱۵۰ متر افزایش ارتفاع، ۱ درجه از دمای هوا کاسته می‌شود. آیا دمای یک منطقه تابعی از ارتفاع آن منطقه از سطح دریا است؟ چرا؟



۳ یک مغازه شیرینی فروشی ماهانه ۷ میلیون تومان بابت اجاره مغازه، آب، برق و دستمزد کارگران، به طور ثابت پرداخت می‌کند. تولید هر کیلوگرم شیرینی ۳۰۰۰ تومان هزینه مواد اولیه دارد. ظرفیت تولید شیرینی در این مغازه حداکثر ۲۵۰۰ کیلوگرم در ماه است. قیمت هر کیلوگرم شیرینی در بازار ۱۲۰۰۰ تومان است و تمام تولیدات مغازه به فروش می‌رسد. اگر x میزان تولید شیرینی باشد:



الف) درآمد این مغازه، تابعی از میزان تولید آن است، این تابع را با به دست آوردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

ب) هزینه ماهانه مغازه، تابعی از میزان تولید آن است، این تابع را با به دست آوردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

پ) سود مغازه، تابعی از میزان تولید آن است، این تابع را با مشخص کردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

۴ از منبع آبی با حجم ۵۰۰ لیتر برای پر کردن یک حوضچه استفاده می‌شود. اگر شیر آب منبع به طور کامل باز باشد، در هر دقیقه ۵ لیتر آب از آن خارج می‌شود.
الف) توضیح دهید که چرا حجم آب داخل حوضچه تابعی از زمان است.

ب) با فرض آنکه در لحظه صفر، حوضچه خالی است، قانون این تابع را با نوشتن حجم آب داخل حوضچه بر حسب زمان باز بودن شیر، بنویسید.

پ) دامنه این تابع را مشخص کنید.

۵ سنگی را به هوا پرتاب می‌کنیم و بعد از ۳ ثانیه به زمین برمی‌گردد. در این صورت کمیت ارتفاع سنگ از سطح زمین و کمیت زمان، باهم مرتبط هستند.

الف) چرا ارتفاع سنگ از سطح زمین تابعی از زمان است؟

ب) اگر زمان را بر حسب ثانیه اندازه بگیریم و مبدأ، زمان شروع پرتاب باشد، دامنه این تابع چیست؟

۶ فرض کنیم که x^2 مربع عدد حقیقی x باشد، آیا با مشخص بودن x^2 ، برای x یک مقدار معین در اعداد حقیقی به دست می‌آید؟ آیا یک عدد، تابعی از مربع آن است؟ چرا؟

بازه‌ها

گفتگو



حسین دربارهٔ تمرین‌های مربوط به تابع که شب قبل حل کرده بود، با دوستش صحبت می‌کرد؛ او به دوستش گفت: در حل تمرین‌های تابع و مرور درس به مجموعه‌ای که با $\{x \in \mathbb{R} \mid 10 \leq x \leq 60\}$ نمایش داده شده بود، برخورد کردم. به نظر آمد که چنین نمایشی کمی دشوار است. فکر می‌کنی می‌توانیم آن را ساده‌تر بنویسیم؟

احمد گفت: بهتر است سر کلاس ریاضی از دبیر سؤال کنیم.

حسین در کلاس از دبیر ریاضی پرسید: برای اینکه در ریاضی بتوانیم آسان‌تر صحبت کنیم، از نمادها و علائم استفاده می‌شود. آیا مجموعه‌هایی مانند $\{x \in \mathbb{R} \mid 10 \leq x \leq 60\}$ را می‌توان ساده‌تر نمایش داد؟ علی گفت: قبلاً وقتی می‌خواستیم اعداد طبیعی از ۱ تا ۶ را نمایش دهیم، آن را به صورت ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ می‌نوشتیم. آیا برای اعداد حقیقی هم می‌توانیم این خلاصه‌سازی را داشته باشیم؟ دبیر گفت: برخی از زیر مجموعه‌های اعداد حقیقی کاربرد بیشتری دارند. برای آسان‌تر صحبت کردن دربارهٔ آنها سعی می‌شود ساده‌تر نمایش داده شوند.

زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی را که به صورت زیر است در نظر بگیرید.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$



نمایش آن روی محور به صورت روبه‌رو است.

نقطه‌های توپر نشان‌دهندهٔ آن است که a و b دو عضو از این مجموعه هستند. مجموعهٔ بالا را به صورت $[a, b]$ نشان می‌دهند و آن را بازهٔ بسته به ابتدای a و انتهای b یا به اختصار بازهٔ بستهٔ a تا b می‌نامند.

مثال ۵

بازه‌های $[0, 1]$ و $[-3, -1]$ را با نماد مجموعه نمایش دهید و روی یک محور نشان دهید.

$$[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

$$[-3, -1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq -1\}$$



مثال ۶

کار در کلاس (۲) نشان داد که جرم وزنه، تابعی از طول فنر و دامنهٔ آن $\{x \in \mathbb{R} \mid 10 \leq x \leq 60\}$ است. پس دامنهٔ این تابع، بازه $[10, 60]$ است.

اگر از بازه بسته $[a, b]$ ابتدا و انتهای آن را خارج کنیم، آن را بازه باز به ابتدای a و انتهای b یا به اختصار بازه باز a تا b می‌نامند و با (a, b) نشان می‌دهند. به عبارت دیگر:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$


نقطه‌های توخالی نشان‌دهنده آن است که a و b متعلق به این مجموعه نیستند.

اگر از بازه بسته $[a, b]$ ابتدا یا انتهای آن را خارج کنیم، بازه نیم باز، نیم بسته به دست می‌آید. اگر ابتدای آن را خارج کنیم، آن را با $(a, b]$ نشان می‌دهند و آن را بازه باز در a و بسته در b می‌نامند. به عبارت دیگر:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$



نمایش این مجموعه روی محور به صورت روبه‌رو است:


اگر از بازه بسته $[a, b]$ ، انتهای آن را خارج کنیم، آن را با $[a, b)$ نشان می‌دهند و آن را بازه بسته در a و باز در b می‌نامند. به عبارت دیگر:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$



مثال ۷

الف) مجموعه اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی ۵ و بزرگ‌تر از ۱ را روی محور نشان دهید و با بازه نمایش دهید.

$$(1, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\}$$


ب) بازه $[1, 4)$ را با نماد مجموعه نمایش دهید و روی یک محور نشان دهید.

$$[1, 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 4\}$$


۱ بازه‌های زیر را با نماد مجموعه نمایش داده و روی یک محور نشان دهید. سپس تعیین کنید $-\frac{3}{10}$ متعلق به کدام یک از بازه‌ها می‌باشد.

$$[2, 5]$$

$$(-1, 3)$$

$$(4, 7]$$

$$[-4, -2)$$

کارد کلاس ۴





۲ هر یک از مجموعه‌های زیر را روی یک محور نمایش داده و با نماد بازه‌ها نشان دهید.

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{-1}{3} < x < 2 \right\}$$

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 55 \}$$

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 10 \}$$

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 8 \}$$

مجموعه‌های به صورت $\{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \}$ را نیز بازه نامیده و با $[a, +\infty)$ نمایش می‌دهند (توجه داشته باشید که در این علامت‌گذاری نماد $+\infty$ به عدد خاصی اشاره ندارد و نشانه هیچ عدد خاصی نیست).

ابتدای این بازه عدد a است ولی انتهای آن ندارد و آن را بازه بسته a تا مثبت بی‌نهایت می‌نامند.

$$[a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \}$$

اگر a را از این بازه خارج کنیم آن را با $(a, +\infty)$ نشان می‌دهند و آن را بازه باز a تا مثبت بی‌نهایت می‌نامند. به عبارت دیگر:

$$(a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \}$$

به همین ترتیب، مجموعه‌هایی به صورت $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq b \}$ را با $(-\infty, b]$ نمایش می‌دهند. انتهای این بازه عدد b است ولی ابتدایی آن ندارد و آن را بازه بسته از منفی بی‌نهایت تا b می‌نامند. به عبارت دیگر:

$$(-\infty, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq b \}$$

اگر b را از این بازه خارج کنیم، آن را با $(-\infty, b)$ نشان می‌دهند و آن را بازه باز از منفی بی‌نهایت تا b می‌نامند. به عبارت دیگر:

$$(-\infty, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < b \}$$



۱ بازه $[1, +\infty)$ را روی محور نمایش دهید.

۲ بازه $(-\infty, 1)$ را روی محور نمایش دهید.

۳ اجتماع این دو بازه را روی محور نمایش دهید. اجتماع این دو بازه، چه مجموعه‌ای است؟



۱ مجموعه‌های زیر را با بازه نمایش دهید و روی محور مشخص کنید.
الف) مجموعه اعداد حقیقی کوچک‌تر از -3 .

ب) مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی 2

پ) مجموعه اعداد حقیقی بین -3 و 5

۲ بازه‌های زیر را روی محور مشخص کنید.


الف) $(0, 3)$

ب) $[-1, 5)$

پ) $(-1, 4]$

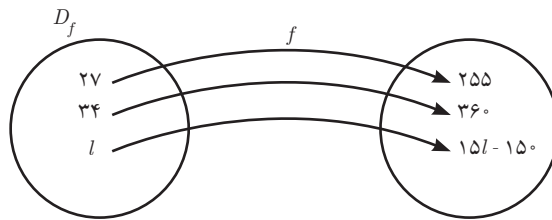
۳ مجموعه جواب نامعادله $2x - 5 > 1$ را با یک بازه نمایش دهید.

۴ جدول زیر را کامل کنید.

توصیف مجموعه	نمایش روی محور اعداد	نمایش با بازه	نمایش با نماد مجموعه
			$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}$
		$[1, 4)$	
			
مجموعه اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی 2			

نمادگذاری تابع‌ها

رابطه بین کمیت‌ها، به شکل‌های مختلفی برقرار می‌شود؛ بنابراین تابع‌های بسیاری وجود دارند. برای صحبت کردن در مورد تابع‌ها بهتر است برای هر تابع نامی انتخاب کنیم. مثلاً، در فعالیت فنر، جرم و وزن آویزان شده تابعی از طول فنر است، می‌توانیم این تابع را f بنامیم.^۱ در این صورت، دامنه این تابع را با D_f (بخوانید دامنه f یا دی اف)^۲ نشان می‌دهیم، پس $D_f = [10, 60]$ عدد ۲۷ در دامنه این تابع است و با جای‌گذاری ۲۷ در قانون تابع، $a = 15l - 150$ ، عدد $15 \times 27 - 150 = 255$ به دست می‌آید. مقداری را که با جای‌گذاری ۲۷ در قانون تابع به دست می‌آید با $f(27)$ (بخوانید اف ۲۷) نشان می‌دهند، پس $f(27) = 15 \times 27 - 150 = 255$ عدد ۳۴ نیز در دامنه این تابع است و با جای‌گذاری ۳۴ در قانون تابع، عدد $15 \times 34 - 150 = 360$ به دست می‌آید. مقداری را که با جای‌گذاری ۳۴ در قانون تابع به دست می‌آید با $f(34)$ نشان می‌دهند، پس: $f(34) = 15 \times 34 - 150 = 360$. اگر l عددی در D_f باشد (یعنی $l \in D_f$)، با اعمال قانون تابع f روی آن، مقدار $15l - 150$ به دست می‌آید و آن را با $f(l)$ (بخوانید اف ال) نشان می‌دهند، پس: $f(l) = 15l - 150$.



اگر $l \in D_f$ ، در این صورت l می‌تواند مقادیر مختلفی داشته باشد، به همین دلیل در عبارت $f(l)$ را متغیر تابع f می‌نامند. در مسئله فنر، از نماد l به عنوان متغیر این تابع استفاده کردیم ولی می‌توانیم از نام‌های دیگری هم استفاده کنیم. اگر از نماد x برای متغیر تابع f استفاده کنیم؛ در این صورت $f(x) = 15x - 150$ و $x \in D_f$. انتخاب نام متغیر یک تابع، اختیاری است و هر نمادی را می‌توان برای متغیر به کار برد. در نام‌گذاری توابع نیز می‌توان از نمادهای دیگری مانند g و h و غیره استفاده کرد. در این هنگام، برای احمد، سؤالی پیش آمد.

احمد گفت: در فعالیت (۱) که نام تابع را f گذاشتیم، اگر طول فنر l باشد، جرم جسم آویزان شده $f(l)$ است. با استفاده از قانون این تابع، من می‌توانم $f(70)$ را هم حساب کنم، اما عدد ۷۰ در دامنه این تابع نیست. پس معنای $f(70)$ چیست؟

گفتگو



۱- نماد f اول کلمه function است که در زبان انگلیسی به معنای تابع است.

۲- نماد D اول کلمه Domain است که به معنای محدوده‌ای معین است.

دبیر گفت: همان‌طور که گفتید، 70° در دامنه این تابع نیست و فنر مورد بحث در آن فعالیت، نمی‌تواند 70° سانتی‌متری شود، پس در این وضعیت $f(70)$ معنایی ندارد. احمد گفت: اما ما می‌توانیم با جای‌گذاری 70° در قانون تابع، $f(70)$ را حساب کنیم. پس، چرا می‌گویید معنایی ندارد؟

دبیر گفت: بله، این درست است که می‌توان به ازای $l=70^\circ$ مقداری را محاسبه کرد، ولی این تابع می‌خواهد وضعیت فنری را توصیف کند که حداکثر می‌تواند 60° سانتی‌متر شود، بنابراین این فنر هیچ‌گاه 70° سانتی‌متر نمی‌شود. پس برای این فنر مقدار $f(70)$ معنایی ندارد. اما اگر می‌خواستیم فنر دیگری را توصیف کنیم که همین خصوصیات را داشت، با این تفاوت که می‌توانست 70° سانتی‌متر هم بشود و مثلاً دامنه آن بازه $[90, 10]$ می‌بود، مقدار $f(70)$ معنادار بود و جرم جسم آویزان شده را نشان می‌داد.

نکته



در هر تابعی، مقدار تابع فقط برای مقادیر دامنه محاسبه می‌شود و حتی اگر مقادیر خارج از دامنه را بتوان در قانون تابع قرار داد و مقداری را برای آن محاسبه کرد، عدد محاسبه شده معنایی ندارد. به عبارت دیگر، اگر f یک تابع و x متغیر آن باشد، مقادیر $f(x)$ را فقط برای x هایی محاسبه می‌کنیم که این x ها در دامنه تابع باشند.

مثال ۸

تابع g با قانون $g(x) = 4x^2 - 5$ و دامنه $D_g = [-3, 6]$ را در نظر بگیرید. $g(-2)$ ، $g(\frac{1}{3})$ ، $g(3)$ ، $g(\sqrt{5})$ را محاسبه کنید. آیا $g(7)$ معنایی دارد؟ چرا؟

$$g(-2) = 4 \times (-2)^2 - 5 = 4 \times 4 - 5 = 11$$

$$g(3) = 4 \times 9 - 5 = 31$$

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 5 = \frac{4}{9} - 5 = \frac{-41}{9} = -4\frac{5}{9}$$

$$g(\sqrt{5}) = 4 \times (\sqrt{5})^2 - 5 = 20 - 5 = 15$$

$g(7)$ معنایی ندارد؛ زیرا 7 در دامنه این تابع نیست.



۱ الف) تابع به دست آمده در مثال (۱)، که مسافت طی شده توسط خودرو را بر حسب حجم بنزین موجود در باک بیان می‌کند، g بنامید. D_g را بنویسید. قانون تابع g چگونه نوشته می‌شود؟

.....

ب) مقدارهای $g(45)$ و $g(18)$ را بیابید. آیا مقدار $g(75)$ معنایی دارد؟ چرا؟

.....

پ) اگر متغیر این تابع را با t نشان دهیم، مجموعه‌ای که t در آن است چه نام دارد؟ قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟

.....

ت) اگر متغیر این تابع را با v نشان دهیم، مجموعه‌ای که v در آن است چه نام دارد؟ قانون تابع چگونه نوشته می‌شود؟

.....

ث) دو تابع قسمت‌های (پ) و (ت) را از نظر قانون و دامنه مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

.....

۲ الف) تابع به دست آمده در کار در کلاس (۱) که مساحت مربع ساخته شده بر حسب طول مفتول بریده شده را بیان می‌کند h نام‌گذاری کنید و D_h را بنویسید.

.....

ب) مقدارهای $h(5)$ و $h(12)$ را بیابید. آیا مقدار $h(200)$ معنایی دارد؟ چرا؟

.....

پ) اگر متغیر این تابع را با x نشان دهیم، مجموعه‌ای که x در آن است چه نام دارد؟ قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟

.....

ت) اگر این تابع را با k و متغیر این تابع را با z نشان دهیم، قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟ مجموعه‌ای را که z در آن است، مشخص کنید.

.....

ث) دو تابع قسمت‌های (پ) و (ت) را از نظر قانون و دامنه مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

در این کار در کلاس، مشاهده می‌کنید که تغییر نام یک تابع یا متغیر آن، تأثیری در تابع ندارد و آن تابع را تغییر نمی‌دهد. اگر چه شکل بیان قانون یک تابع ممکن است عوض شود ولی تابع عوض نمی‌شود. مثلاً همه تابع‌های f ، g و h به ترتیب با قانون‌های $f(x) = x^2 + 1$ ، $g(x) = x^2 + 1$ ، $h(t) = t^2 + 1$ به یک تابع اشاره می‌کنند.



x	$x^2 - x + 2$	$f(x)$
-2	$f(-2) = \dots$
0
2

۱ جاهای خالی را برای تابع با قانون $f(x) = x^2 - x + 2$ و دامنه \mathbb{R} پر کنید.

۲ تابع g با قانون $g(x) = 4x^2 - 3x$ و دامنه $D_g = [-2, 3]$ را در نظر بگیرید. $g(-2)$ و $g\left(-\frac{4}{3}\right)$ را محاسبه کنید. آیا $g(4)$ معنایی دارد؟ چرا؟

۳ تابع f با دامنه \mathbb{R} و قانون $f(x) = x^2 - 4$ مفروض است. مقادیر خواسته شده را بیابید.

الف) $f(-2) =$ ب) $f\left(\frac{1}{2}\right) =$ پ) $f(\sqrt{2}) =$

۴ کرایه تاکسی وابسته به طول مسیر مسافر است. ورودیه تاکسی ۶۰۰ تومان است و به ازای هر ۱۰۰ متر، ۵۰ تومان کرایه گرفته می‌شود. قانون تابعی را به دست آورید که کرایه تاکسی را بر حسب مسافت طی شده بیان می‌کند. با توجه به آنکه تاکسی‌ها در روز حداکثر ۵۰۰ کیلومتر طی می‌کنند، دامنه این تابع را مشخص کنید. نامی برای این تابع و متغیر آن انتخاب کنید و دامنه و قانون این تابع را با نام‌های انتخابی خود بیان کنید.

۵ مستطیل‌هایی را در نظر بگیرید که طول آنها ۲ واحد بیشتر از عرض آنها است. مساحت این مستطیل‌ها تابعی از عرض آنها است. این تابع را g بنامید و متغیر آن را با l نمایش دهید. دامنه و قانون این تابع را بنویسید. آیا $g(-1)$ معنایی دارد؟

۶ سنگی را از بالای یک ساختمان ۲۵ متری رها می‌کنیم. طبق قوانین فیزیکی، ارتفاع این سنگ از سطح زمین تابعی از زمان است. اگر t ، زمان (بر حسب ثانیه) و $f(t)$ ، ارتفاع از سطح زمین (بر حسب متر) باشد. قانون این تابع به صورت $f(t) = -5t^2 + 25$ است. الف) سنگ در لحظه صفر ($t = 0$) رها شده است. با پیدا کردن زمان برخورد سنگ با زمین، دامنه این تابع را تعیین کنید.

ب) مقدارهای $f(1)$ و $f(2)$ را حساب کنید. این مقادیر چه چیزی را نشان می‌دهند؟
پ) آیا $f(3)$ و $f(-1)$ معنایی دارند؟ چرا؟

نمایش‌های تابع: جدول و نمودار

گفتگو



مسعود و احمد در پایان کلاس با دبیر خود دربارهٔ عدد π بحث می‌کردند. مسعود گفت: در کتابی خواندم که عدد π گنگ است و نمی‌توان آن را با یک عدد اعشاری نشان داد. اما می‌توان آن را با اعداد اعشاری تقریب زد.

احمد گفت: تقریبات اعشاری عدد π را با چه قانونی پیدا می‌کنند؟
دبیر گفت: در این مورد قانونی وجود ندارد ولی یک روش محاسبه وجود دارد که به کمک آن با رایانه تا چند میلیون رقم اعشار π را محاسبه کرده‌اند.

مسعود گفت: از چه روشی برای نمایش این رقم‌ها استفاده می‌کنیم؟
دبیر گفت: فعالیت زیر می‌تواند جوابی برای این پرسش فراهم کند.

فعالیت ۲



عدد π تا ده رقم اعشار برابر است با:

$$\pi \approx 3.1415926535$$

برای $n = 1, 2, 3, \dots, 10$ ، اگر $f(n)$ ، رقم n ام اعشاری π را نشان دهد، برای مثال داریم:

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 4$$

۱ جاهای خالی را پر کنید.

$$f(6) = \dots \quad f(9) = \dots \quad f(10) = \dots \quad f(8) = \dots$$

۲ دامنهٔ این تابع را با یک مجموعه نشان دهید.

۳ جدول زیر را با توجه به دامنه داده شده کامل کنید.

n	۱	۲
$f(n)$	۱	۴

در فعالیت بالا تابعی را مشاهده کردیم که قانون خاصی نداشت و فقط روشی برای یافتن مقدار تابع داشتیم که نقش قانون تابع را بازی می‌کرد.

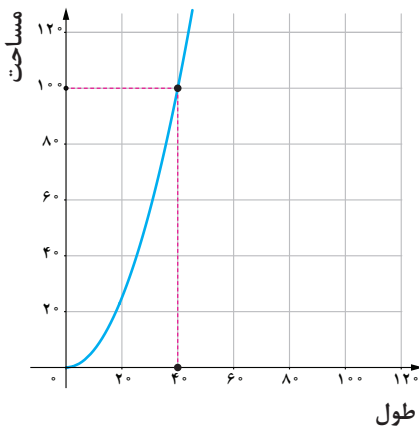
به کمک جدول یک تابع، می‌توان نموداری در صفحه رسم کرد. هر زوج از اعداد جدول که از اعداد دامنهٔ تابع (سطر اول) و مقدار تابع (سطر دوم) تشکیل شده است، نقطه‌ای در صفحه مختصات را مشخص می‌کند. مجموعه این نقاط، شکلی را در صفحه مشخص می‌کنند که نمودار تابع نامیده می‌شود. از طریق نمودار یک تابع، رفتار تابع را بهتر می‌توان تشخیص داد.

مثال ۹

اگر تابعی که در کار در کلاس (۱) به آن رسیدیم، را با h نشان دهیم دامنه این تابع $D_h = (0, 100]$ و برای $x \in D_h$ قانون آن $h(x) = \frac{x^2}{16}$ است جدول زیر را برای این تابع در نظر می‌گیریم.

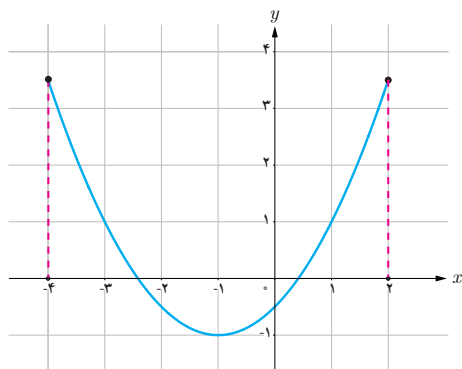
x	۴	۸	۱۶	۲۰	۳۶	۶۰	۸۰	۱۰۰
$h(x)$	۱	۴	۱۶	۲۵	۸۱	۲۲۵	۴۰۰	۶۲۵

از طریق این جدول مشخص می‌شود که با زیاد شدن مقدار متغیر، مقادیر تابع نیز زیاد می‌شوند. روشن است که این جدول‌ها را نمی‌توان به ازای تمام مقادیر دامنه نوشت و فقط از تعدادی متناهی از اعداد در دامنه می‌توان استفاده کرد. معمولاً عددهایی را در دامنه انتخاب می‌کنند که مشخص شدن مقدار تابع در این نقاط، برای تشخیص رفتار تابع (چگونگی تغییرات تابع) در سرتاسر دامنه کافی باشد.



تشخیص رفتار تابع از طریق جدول چندان آسان نیست و نمودار تابع، بهتر می‌تواند رفتار تابع را نشان دهد. همانند کار در کلاس (۱) دو محور عمود بر هم رسم می‌کنیم. محور افقی نشان‌دهنده طول قطعه بریده شده و محور عمودی نشان‌دهنده مساحت مربع ساخته شده است. جدول بالا، فقط برخی از نقاط این نمودار را نشان می‌دهد. شکل روبه‌رو بخشی از نمودار این تابع می‌باشد.

مثال ۱۰

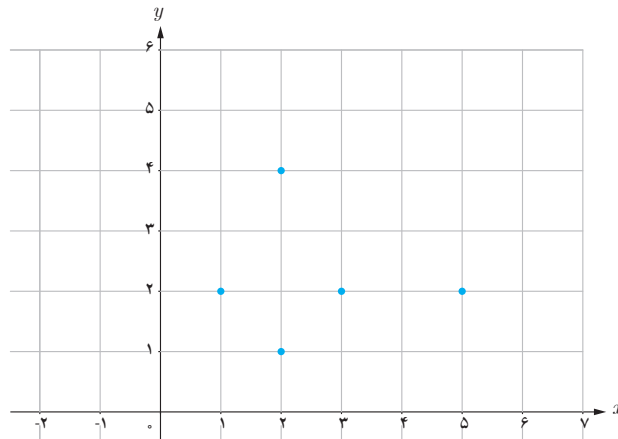


نمودار تابع f با دامنه $[-4, 2]$ رسم شده است.

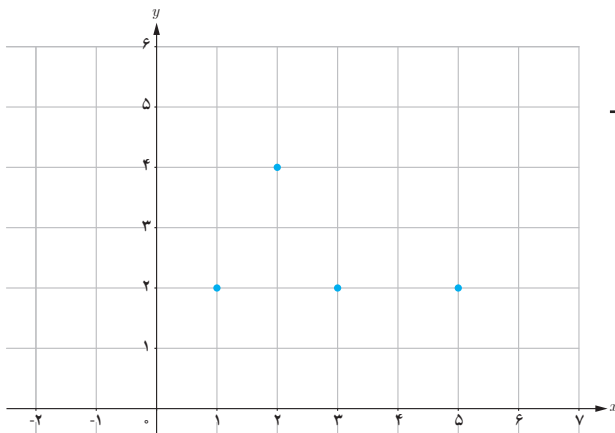
نقطه دلخواهی روی نمودار تابع در نظر بگیرید. از این نقطه خطی بر محور x عمود کنید. طول نقطه برخورد با محور افقی، یکی از مقادیر دامنه را نشان می‌دهد. اگر برای تمام نقطه‌های روی نمودار این عمل را انجام دهیم، همه مقادیر دامنه تابع به دست می‌آید.

مثال ۱۱

x و y به ترتیب مقادیر متناظر دو کمیت (الف) و (ب) هستند. نقاط مشخص شده در صفحه مختصات زیر، مقدارهای متناظر این دو کمیت را نشان می‌دهد. آیا کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) است؟ برای اینکه کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) باشد باید برای هر مقدار از کمیت (الف)، یک مقدار معین برای کمیت (ب) به دست آید. مطابق شکل، وقتی x برابر ۲ می‌باشد، دو مقدار ۱ و ۴ برای y وجود دارد. بنابراین کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) نمی‌باشد.

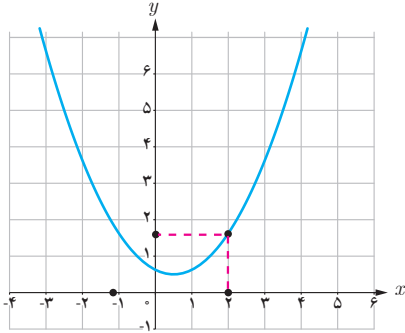


اگر نقطه به مختصات $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ را از نقاط روی نمودار حذف کنیم، نمودار زیر به دست می‌آید. مشاهده می‌شود که برای هر مقدار از x ، یک مقدار معین برای y به دست آید. پس در این حالت کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) است. اگر این تابع را با f نام‌گذاری کنیم در این صورت $D_f = \{1, 2, 3, 5\}$ و مقادیر تابع فقط برای مقادیر دامنه محاسبه می‌شود. یعنی $f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 2, f(5) = 2$. جدول این تابع به صورت زیر است:



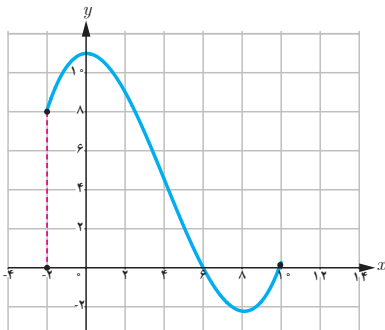
x	۱	۲	۳	۵
y	۲	۴	۲	۲

مثال ۱۲



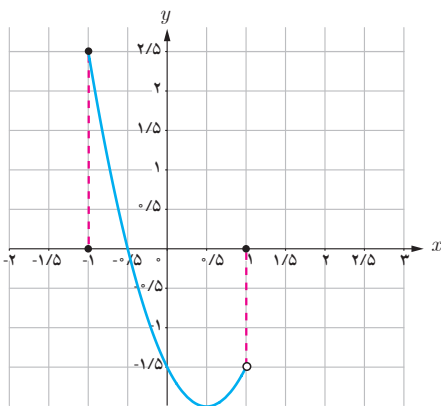
در روبه‌رو نمودار تابع h رسم شده است. از نقطه $x=2$ خطی بر محور x عمود کنید تا نمودار را قطع کند. از این نقطه خطی موازی محور x ها رسم کنید تا محور y ها را قطع کند. این نقطه چه چیزی را نشان می‌دهد؟ این نقطه همان مقدار تابع به ازای $x=2$ یعنی $h(2)$ است.

مثال ۱۳



نمودار تابع g به صورت زیر رسم شده است. الف) دامنه g را بیابید. ب) مقادیر تابع g را به ازای -2 ، -1 ، 6 و 7 بیابید. پ) آیا $g(11)$ معنایی دارد؟ چرا؟ الف) $D_g = [-2, 10]$ ب) $g(-2) = 8$ ، $g(-1) = 10$ ، $g(6) = 0$ ، $g(7) = -1/5$ پ) $g(11)$ معنایی ندارد زیرا عدد 11 در دامنه نیست.

مثال ۱۴



نمودار مقابل مربوط به تابع g است. اگر از تمام نقطه‌های روی نمودار بر محور x ها عمود کنیم، دامنه این تابع بازه $(-1, 1)$ به دست می‌آید.



۱ هر یک از جدول‌های زیر نمایش یک تابع با دامنه $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ می‌باشد. نمودار هریک را در صفحه مختصات رسم کنید. در صورت امکان، قانون تابع را بنویسید.

الف)

x	-1	0	1	2	3
y	-2	0	2	4	6

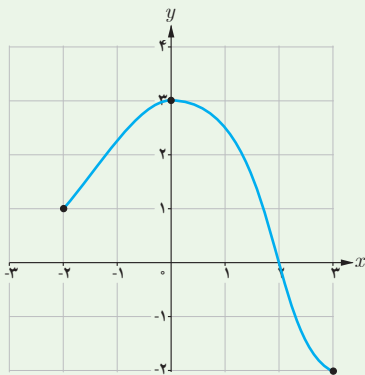
ب)

x	-1	0	1	2	3
y	1	0	1	4	9

۲ نمایش جدول تابع f با دامنه $\{-2, 0, 1, 2, 4\}$ به صورت زیر است:

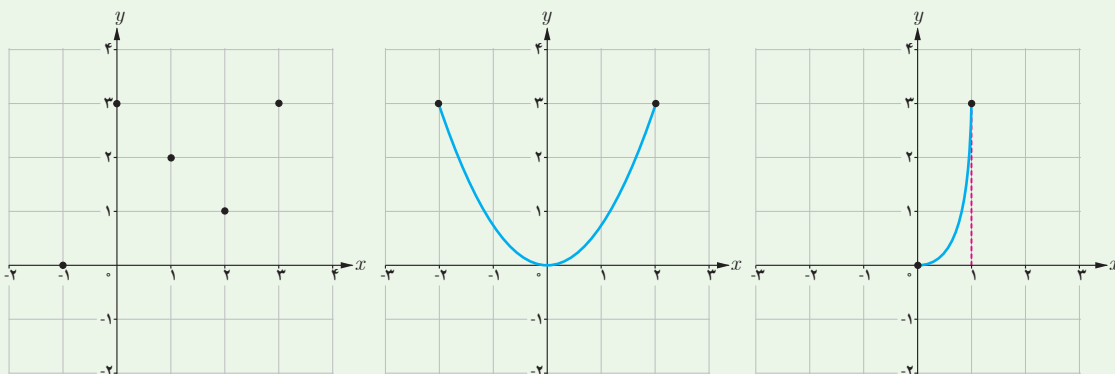
x	-2	0	1	2	4
$f(x)$	0	3	-1	3	1

الف) مقادیر $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(4)$ را بیابید.
ب) نمودار f را در صفحه مختصات رسم کنید.



۳ نمودار تابع g به صورت روبه‌رو است:
الف) با توجه به شکل، دامنه g را بنویسید.
ب) $g(2)$ ، $g(-2)$ و $g(0)$ را به دست آورید.
پ) آیا $g(4)$ معنایی دارد؟ چرا؟

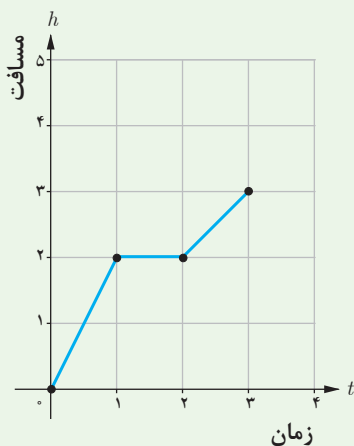
۴ سه تابع زیر را در نظر بگیرید. دامنهٔ هر یک از این تابع‌ها را بنویسید.



الف

ب

پ



۵ وضعیتی از زندگی روزمره را بنویسید که نمودار زیر نشان‌دهندهٔ آن وضعیت باشد.

۶ تابع g با دامنه $\{-2, -1, 0, 3\}$ را طوری رسم کنید که $g(-2) = 1$ و $g(0) = 2$.

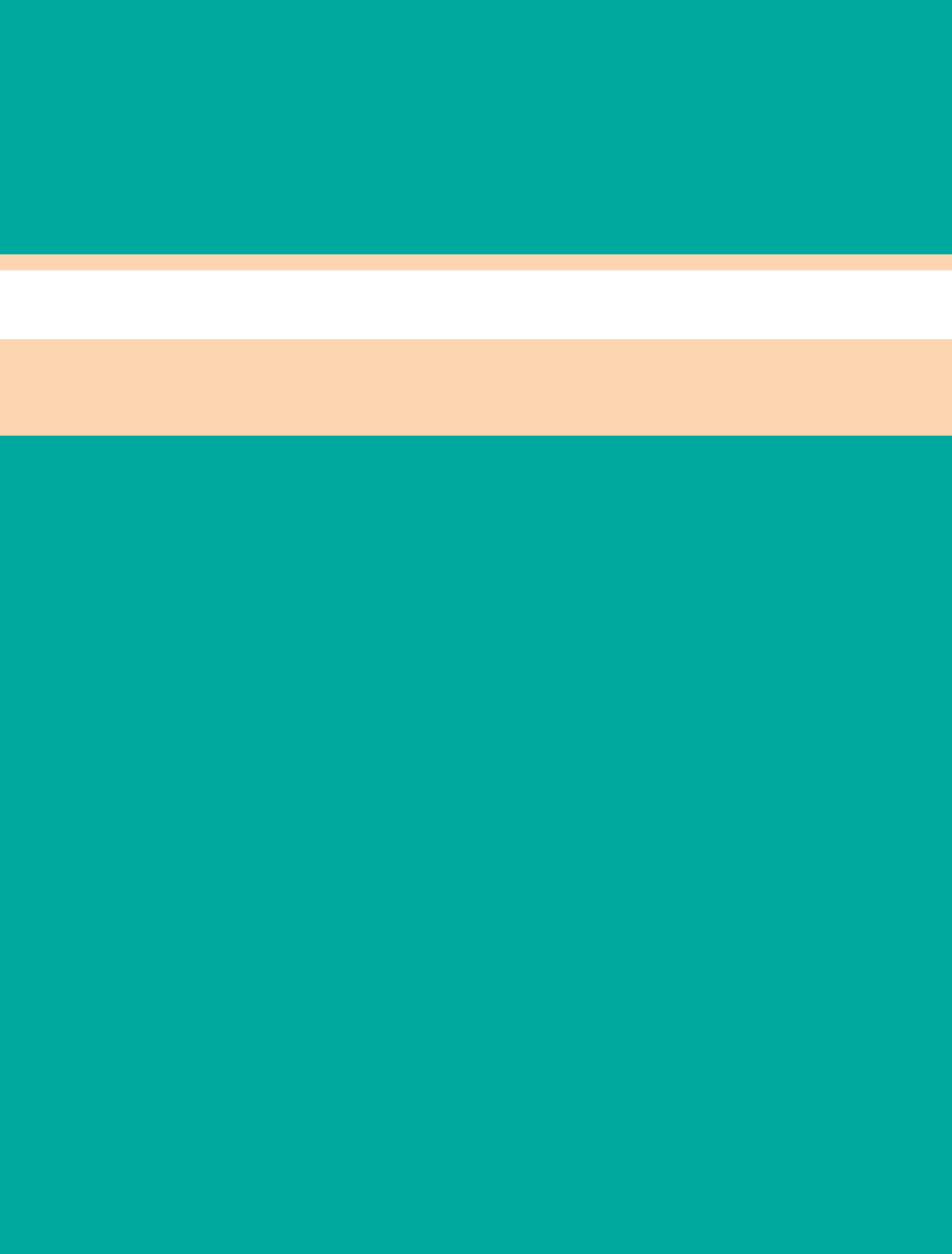
۷ تابع دلخواه f با دامنه $[-1, 4]$ را طوری رسم کنید که $f(-1) = 1$ و $f(2) = -3$.

۸ تابع h با دامنه $[0, 3]$ و قانون $h(x) = 3x^2 + a$ را در نظر بگیرید.

الف) مقدار a را طوری بیابید که $h(1) = 2$.

ب) $h(2)$ را بیابید.

پ) آیا $h(4)$ معنایی دارد؟ چرا؟



پودمان دوم

تابع‌های خطی و درجهٔ دوم و کاربرد آنها در حل معادله‌ها و نامعادله‌ها



گونه‌ای از گیاه بامبو پس از آنکه به ارتفاع تقریبی ۲۰ سانتی‌متر می‌رسد، در هر ساعت به‌طور تقریبی، $\frac{3}{8}$ سانتی‌متر رشد می‌کند. یعنی در یک شبانه‌روز این گیاه حدود $\frac{91}{2}$ سانتی‌متر رشد می‌کند.

تابع های خطی

محمد علاقه زیادی به گیاهان و پرورش آنها داشت. او با کمک مادرش، در باغچه حیاط خانه شان، انواع گل و گیاه را کاشته بود و هر روز به آنها رسیدگی می کرد. او به اندازه رشد هر کدام از این گیاهان دقت می کرد. برخی از آنها در روزهای متوالی رشدهای متفاوت و برخی دیگر رشد یکنواختی داشتند. محمد به مادرش گفت: جالب است! نحوه رشد هر کدام از این گیاهان باهم فرق دارد.

مادر محمد که دبیر ریاضی بود به او گفت: دقیقاً همین طور است. پیشنهاد می کنم دو یا سه گیاه را انتخاب کنی و هر روز طول آنها را اندازه بگیری. در این صورت می توانی نحوه رشد طولی هر کدام را بهتر درک کنی.

محمد به مادرش گفت: اگر مدتی این کار را انجام دهم، آیا می توانم پیش بینی کنم هر کدام از آنها بعد از یک ماه چقدر رشد طولی خواهند کرد؟

مادرش گفت: بله، باید یک مدل ریاضی برای رفتار رشد طولی آنها بنویسی تا بتوانی مقدار رشد طولی آنها را در روزهای آینده پیش بینی کنی.

انجام فعالیت صفحه بعد می تواند پاسخی برای این سؤال فراهم سازد.

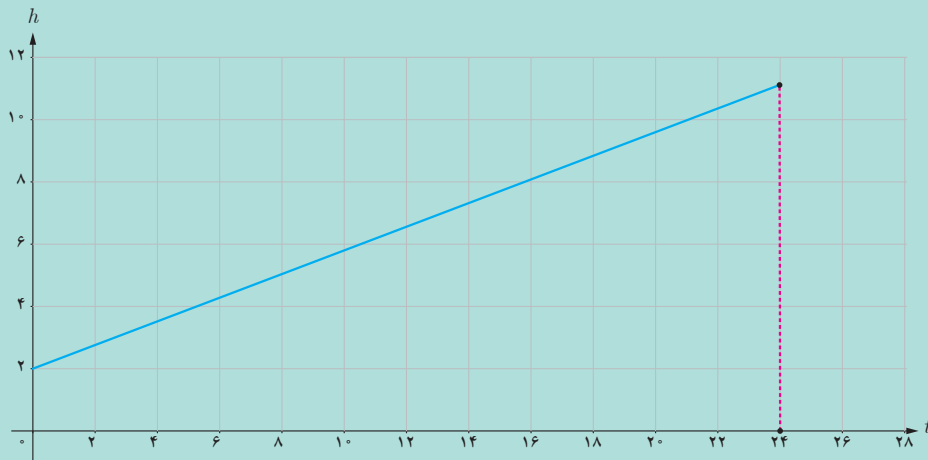




نوعی بامبو پس از آنکه به ارتفاع ۲۰ سانتی متر می‌رسد، به‌طور تقریبی در هر ساعت $\frac{3}{8}$ سانتی متر رشد می‌کند. ارتفاع بامبو تابعی از زمان است و اگر ارتفاع بامبو را (برحسب سانتی متر) پس از t ساعت با $h(t)$ نشان دهیم داریم: $h(t) = 20 + \frac{3}{8}t$. اگر رشد بامبو را در یک شبانه‌روز در نظر بگیریم، دامنه این تابع $[0, 24]$ خواهد بود. **۱** جدول زیر را کامل کنید و اختلاف مقادیر تابع را در داخل مربع‌ها بنویسید.

t (برحسب ساعت)	۰	۱	۲	۳	۴
h (برحسب سانتی متر)					

نمودار زیر، نمودار تابع $h(t) = 20 + \frac{3}{8}t$ را نشان می‌دهد.



۲ به ازای هر یک واحد افزایش مقدار t ، مقدار h چه تغییری می‌کند؟

.....

۳ رابطه بین دو کمیت h و t ، خطی است یا غیر خطی؟ چرا؟

.....

۴ $h(2)$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟ $h(18)$ چطور؟

.....

۵ اگر $h(a) = 39$ ، a را پیدا کنید. این مقدار چه چیزی را نشان می‌دهد؟

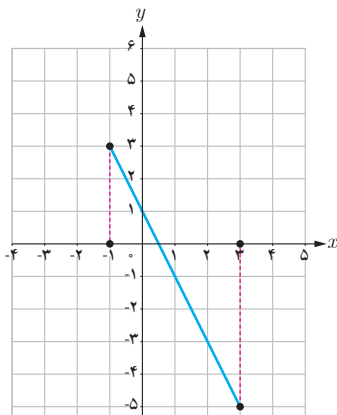
.....



همان طور که می بینید در فعالیت (۱)، h و t با هم رابطه خطی دارند و قانون تابعی که رابطه آنها را توصیف می کند، یک چند جمله ای درجه ۱ است. در این تابع به ازای هر ۱ واحد افزایش متغیر تابع، مقدار تابع $3/8$ واحد افزایش می یابد. نمودار این تابع، یک خط راست با شیب $3/8$ است.

تابع هایی را که بتوان با قانون $f(x) = ax + b$ (a و b دو عدد مشخص هستند) نوشت، **تابع های خطی** می نامند. دامنه این تابع ها می تواند \mathbb{R} یا هر زیر مجموعه ای از \mathbb{R} باشد. نمودار تابع های خطی با دامنه \mathbb{R} به صورت خط راست است. ویژگی اساسی تابع های خطی، آن است که به ازای هر ۱ واحد افزایش یا کاهش متغیر تابع، مقدار تابع به اندازه ثابتی تغییر می کند.

مثال ۱



تابع خطی $f(x) = -2x + 1$ را با دامنه $[-1, 3]$ در نظر بگیرید. مقدار تابع را در دو نقطه به طول های -1 و 3 به کمک قانون آن به دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

داریم $f(-1) = 3$ ، $f(3) = -5$ پس $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ دو نقطه از نمودار این تابع هستند و نمودار این تابع به شکل روبه رو است.

جدول زیر تعدادی از نقاط روی این خط را نشان می دهد.

x	-1	0	1	2	3
$-2x+1$	3	1	-1	-3	-5

$\begin{matrix} \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\ \boxed{-2} & \boxed{-2} & \boxed{-2} & \boxed{-2} \end{matrix}$

همان طور که مشاهده می شود، با هر ۱ واحد افزایش متغیر، مقدار تابع ۲ واحد کاهش می یابد و این نشان می دهد شیب خط -2 است.



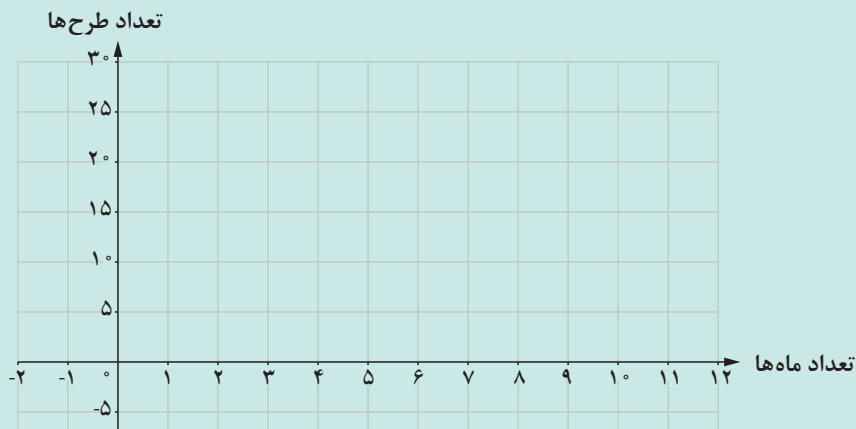
رضا علاقه زیادی به طراحی داشت. او تا سال قبل، ۵ طرح رسم کرده بود و تصمیم گرفت از این به بعد هر ماه ۲ طرح ارائه کند و این کار را تا ۱۲ ماه ادامه دهد.

۱ رضا قبل از این تصمیم، چند طرح داشت؟ او در آخر ماه اول چند طرح داشت؟ در آخر ماه پنجم چطور؟

۲ اگر تعداد ماه‌های سپری شده را با x و تعداد کل طرح‌ها پس از x ماه را با $f(x)$ نمایش دهیم، قانون تابع f و دامنه آن را بنویسید.

۳ مقادیر $f(0)$ ، $f(10)$ را به دست آورید و معنای آن را بیان کنید. آیا $f(-1)$ معنایی دارد؟

۴ اگر دامنه تابع را بازه $[0, 12]$ در نظر بگیریم، نمودار تابع را رسم کنید.



۵ اگر $f(a) = 17$ مقدار a را به دست آورید و معنای آن را بیان کنید.

با مرور آنچه که درباره تابع‌های خطی دیدیم، مشاهده می‌شود که در برخی از تابع‌های خطی، با افزایش مقدار متغیر، مقدار تابع به میزان ثابتی افزایش می‌یابد و در برخی دیگر به میزان ثابتی کاهش می‌یابد. آیا می‌توان تابع‌های خطی پیدا کرد که با افزایش یا کاهش مقدار متغیر، مقدار تابع تغییر نکند؟ در فعالیت زیر این نوع از تابع‌های خطی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

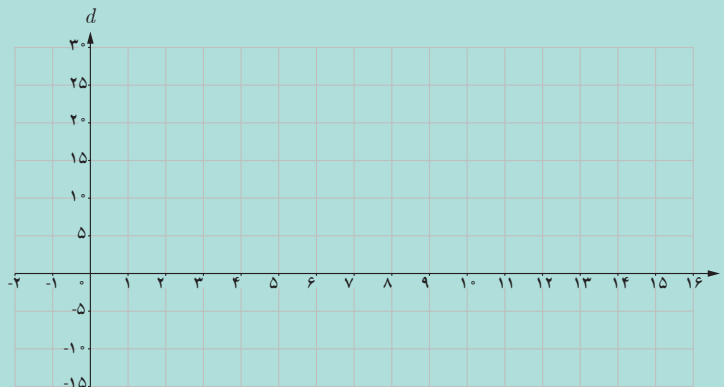


خودرویی از نقطه A شروع به حرکت می‌کند و پس از طی ۲ کیلومتر پشت چراغ قرمز می‌ایستد. مدت زمان چراغ قرمز ۲۰ ثانیه است.

- مقدار مسافت طی شده به وسیله خودرو از نقطه A ، پس از ۲ ثانیه توقف پشت چراغ قرمز چقدر است؟ پس از ۵ ثانیه چطور؟
- جدول زیر را کامل کنید.

t (زمان توقف بر حسب ثانیه)	۰	۲	۵	۱۰	۲۰
d (مسافت طی شده بر حسب کیلومتر)	-	-	-	-	-

۳ نمودار تابع را از زمان $t=0$ تا زمان $t=20$ رسم کنید.



۴ با تغییر زمان (t) ، مسافت طی شده (d) چه تغییری می‌کند؟

در بازه زمانی $[0, 20]$ که چراغ قرمز است و خودرو پشت چراغ قرمز متوقف است، گرچه زمان می‌گذرد، مسافت طی شده خودرو از نقطه A ، ۲ کیلومتر است و تغییری نمی‌کند. قانون این تابع خطی، به صورت $f(t) = 2$ است و نمودار آن پاره خطی به موازات محور x هاست. در این فعالیت تابعی را بررسی کردیم که به ازای تمام مقادیر دامنه، مقداری ثابت دارد. این نوع تابع‌ها، ساده‌ترین نوع توابع خطی هستند.



تابعی را که به ازای تمام مقادیر متغیر، مقداری ثابت دارد، تابع ثابت می‌نامند.

اگر f یک تابع ثابت باشد قانون آن به صورت $f(x) = c$ می‌باشد که در آن c یک عدد مشخص است. نمودار تابع ثابت با دامنه \mathbb{R} خطی به موازات محور x ها (شیب صفر) است.

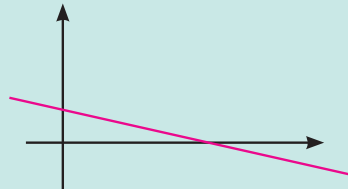
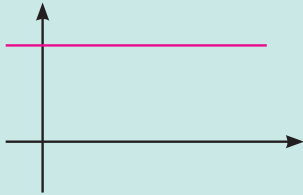
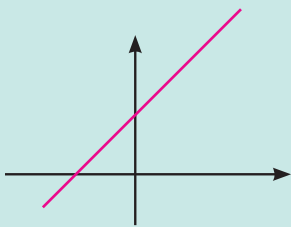
مثال ۲

معمولاً پس از ۲۲ سالگی رشد قد متوقف می‌شود. طول قد که تابعی از زمان است در بازه زمانی تقریبی ۲۲ سالگی تا حدود ۶۰ سالگی، تقریباً ثابت است. بنابراین طول قد افراد به عنوان تابعی بر حسب سن افراد، در این بازه، یک تابع ثابت است.

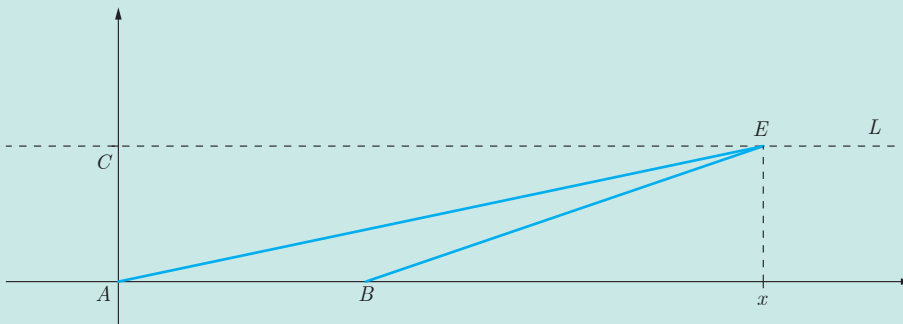
کار در کلاس ۲



۱ نمودارهای زیر چند تابع خطی را نشان می‌دهند. مشخص کنید کدام نمودار، مربوط به تابع ثابت است؟ دلیل خود را توضیح دهید.



۲ در صفحه مختصات زیر، مثلثی با رئوس $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ رسم کنید.



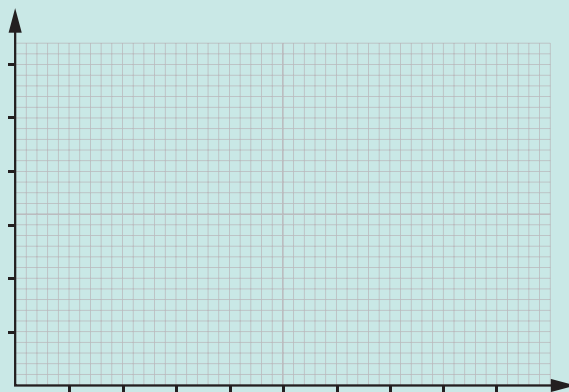
الف) در جدول زیر، x طول نقطه‌ای از خط L (مانند E) است و S (تابعی از x) مساحت مثلث ABE است. جدول زیر را کامل کنید و اختلاف مقادیر تابع را در داخل مربع‌ها بنویسید.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$S(x)$

ب) قانون این تابع را بنویسید و توضیح دهید چرا S تابعی خطی از x است؟

.....

پ) با استفاده از جدول، نمودار تابع را رسم کنید.



می‌دانیم نمودار هر تابع خطی با دامنه \mathbb{R} یک خط راست است. نمودار تابع خطی $f(x) = ax + b$ با تغییر مقادیر a و b چگونه تغییر می‌کند؟ فعالیت روبه‌رو، می‌تواند پاسخی برای این سؤال فراهم کند.



تابع خطی $f(x) = ax + b$ را در نظر بگیرید. با استفاده از جئوجبرا مطابق دستورالعمل صفحه ۴۳، دو لغزنده برای a و b در نظر بگیرید.

۱ با ثابت نگه داشتن a و تغییر مقادیر b ، نمودار تابع چگونه تغییر می کند؟ وضعیت خط های به دست آمده، نسبت به هم چگونه است؟

۲ با ثابت نگه داشتن b ، به ازای مقادیر مختلف a ، نمودار تابع چگونه تغییر می کند؟

۳ اگر a مثبت باشد، زاویه خط با جهت مثبت محور طول ها چگونه است؟ اگر a منفی باشد، زاویه خط با جهت مثبت محور طول ها چگونه است؟

فعالیت بالا نشان می دهد که با ثابت ماندن a و تغییر b نمودار تابع، خط هایی هستند که با یکدیگر موازی هستند. اگر b افزایش یابد، این خط به موازات خود به بالا منتقل می شود و اگر b کاهش یابد، این خط به موازات خود به پایین منتقل می شود و با صفر شدن b ، خط از مبدأ می گذرد. با ثابت ماندن b و تغییر a خط هایی به دست می آیند که شیب های مختلفی دارند و همگی از یک نقطه می گذرند. اگر a مثبت باشد، زاویه خط با جهت مثبت محور طول ها، زاویه تند و اگر a منفی باشد این زاویه باز است.

مثال ۳

نمودار همه تابع های خطی با قانون $f(x) = ax + 3$ ، در چه نقطه ای مشترک هستند؟

تابع های خطی $f(x) = ax + 3$ را در نظر می گیریم.

برای مثال:

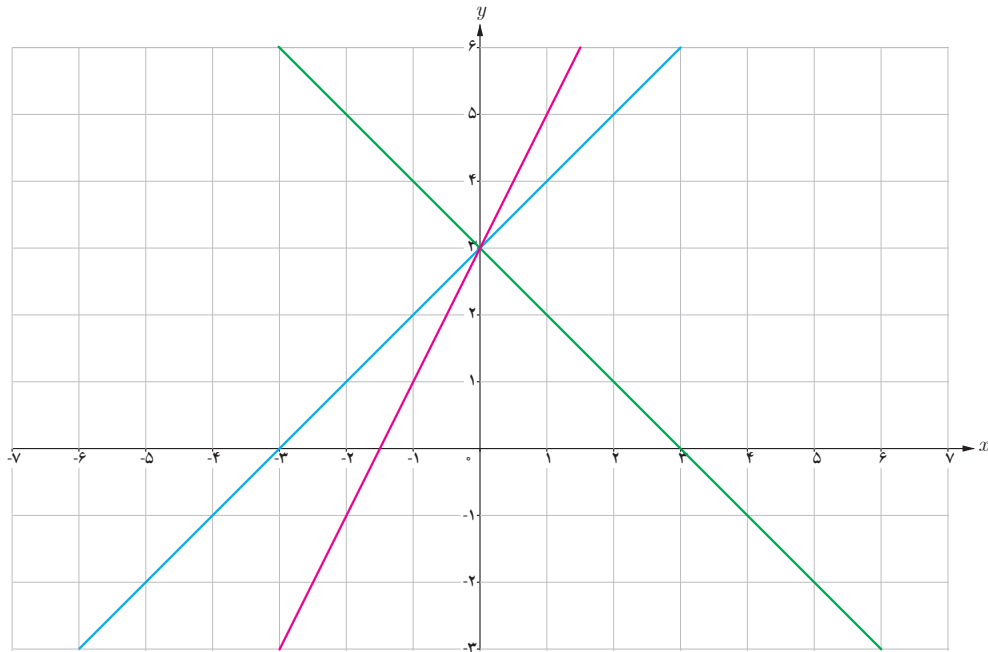
اگر $a = 1$ باشد، در این صورت قانون تابع $f(x) = x + 3$ است.

اگر $a = 2$ باشد، در این صورت قانون تابع $f(x) = 2x + 3$ است.

اگر $a = -1$ باشد، در این صورت قانون تابع $f(x) = -x + 3$ است.

مشاهده می کنیم که برای مقدارهای مختلف a ، تابع های مختلفی به دست می آید. برای رسم نمودار این تابع ها به کمک جئوجبرا، ابتدا لغزنده ای به نام a تعریف می کنیم (مطابق دستورالعمل صفحه ۴۳). با کلیک راست روی نمودار، گزینه ردیابی را فعال می کنیم تا بتوانیم نمودار این تابع ها را همزمان مشاهده کنیم.

شکل زیر نمودار برخی از این تابع‌ها را نشان می‌دهد.



همان‌طور که مشاهده می‌کنیم نمودار این تابع‌ها، در نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ همدیگر را قطع می‌کنند. پس تمام این تابع‌های خطی از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ می‌گذرد.

کاردرکلاس ۳



۱ وضعیت خط‌های به معادله $2y + 5x = C$ را به ازای مقادیر مختلف C ، توصیف کنید. شیب این خط‌ها چقدر است؟

.....

.....

۲ وضعیت خط‌های به معادله $2y + cx = 4$ را به ازای مقادیر مختلف C ، توصیف کنید. این خط‌ها از چه نقطه مشترکی می‌گذرند؟

.....

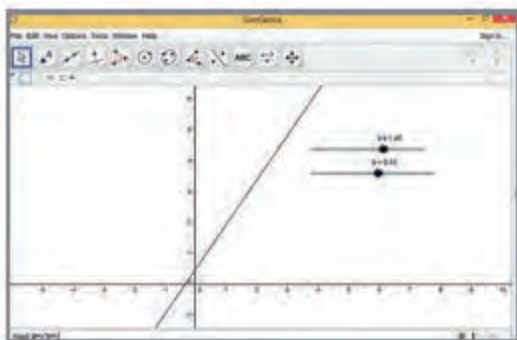
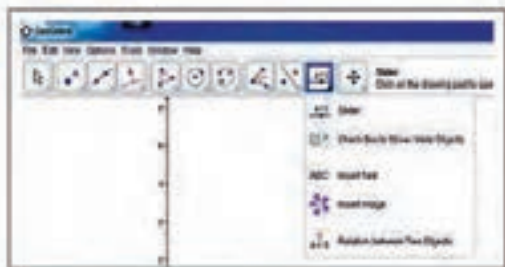
۳ آیا هر خطی در صفحه مختصات، نمودار یک تابع خطی است؟ چرا؟

.....

استفاده از نرم افزار

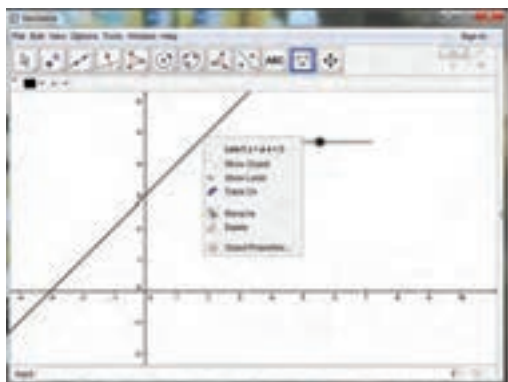
لغزنده در جئوجبرا

از نوار ابزار نرم افزار جئوجبرا دو Slider یا لغزنده به نام های a و b انتخاب کنید و دامنه تغییرات برای هر کدام تعریف کنید.



سپس در قسمت وارد کردن تابع، فرمول تابع را که شامل a و b است بنویسید.

برای تغییر مقدار a و b ، نقطه روی لغزنده را حرکت دهید.





۱ در زیر، جدول مقادیر مربوط به چهار تابع داده شده است. کدام جدول می تواند مربوط به یک تابع خطی باشد؟

x	-۲	-۱	۰	۱
$g(x)$	۵	-۱۰	-۲۵	-۴۰

x	-۲	-۱	۰	۱
$f(x)$	-۸	-۱	۰	۱

x	۰	۱	۲	۳
$k(x)$	۱	۳	۵	۷

x	-۲	-۱	۰	۱
$h(x)$	۵	۵	۵	۵

۲ علی در یک شرکت بیمه کار می کند. او ۱,۰۰۰,۰۰۰ تومان به عنوان حقوق پایه دریافت می کند و به ازای هر مشتری جدید که جذب می کند، ۵۰,۰۰۰ تومان به حقوقش اضافه می شود. الف) قانونی برای حقوق علی به عنوان تابعی از تعداد مشتری هایی که ماهانه جذب می کند، بنویسید.

ب) اگر او در یک ماه ۱۲ مشتری جدید برای شرکت جذب کرده باشد، میزان حقوق او در آن ماه چقدر خواهد بود؟

پ) چرا این تابع خطی است؟

ت) اگر علی بخواهد در یک ماه ۲,۰۰۰,۰۰۰ تومان حقوق بگیرد، در این ماه چند مشتری باید جذب کند؟

۳ آرمان سوار بر یک کشتی، در فاصله ۱۰ کیلومتری از ساحل قرار دارد و با سرعت ثابت ۳ کیلومتر بر ساعت از ساحل دور می شود. این حرکت ۵ ساعت ادامه داشته است.

الف) قانون و دامنه تابع مربوط به فاصله آرمان از ساحل (برحسب کیلومتر) را برحسب t (زمان برحسب ساعت) بنویسید.

ب) آرمان پس از ۲ ساعت در چه فاصله‌ای از ساحل خواهد بود؟

پ) چرا این تابع خطی است؟ شیب نمودار این تابع مثبت است یا منفی؟

۴) دمای هوا در شهر تهران در تابستان، در طول یک هفته، در ساعت ۱ ظهر، ۳۵ درجه سانتی‌گراد بوده است.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

d (روز)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
t (دما برحسب درجه سانتی‌گراد)							

ب) دامنه و قانون این تابع را بنویسید.

پ) آیا این تابع، یک تابع ثابت است؟ چرا؟

ت) نمودار تابع را در دامنه‌اش رسم کنید.

۵) رابطه بین دو واحد اندازه‌گیری دما، درجه سانتی‌گراد (c) و درجه فارنهایت (F) با قانون $F(c) = \frac{9}{5}c + 32$ بیان می‌شود.

الف) مقدارهای $F(28)$ و $F(-40)$ را محاسبه کنید و معنای آن را بیان کنید.

ب) دمای صفر درجه سانتی‌گراد، معادل چند درجه فارنهایت است؟

پ) اگر $F(c) = 212$ ، مقدار c را حساب کنید. c چه چیزی را نشان می‌دهد؟

تابع‌های درجه دوم

گفتگو



صدرا در ایام تعطیلات تابستان به همراه خانواده‌اش به شهر تبریز سفر کرده بود. آنها با استفاده از یک دفترچه راهنما که از ایستگاه گردشگری شهر دریافت کرده بودند، هر روز از یک مکان تاریخی یا یک موزه دیدن می‌کردند. آن روز برای بازدید به مسجد کبود رفته بودند. صدرا تمام مدت به سقف مسجد خیره و محو زیبایی آن شده بود.

او به پدرش گفت: معماران چگونه توانسته‌اند انحناى گنبد را با این دقت ایجاد کنند. آیا معماران در زمان قدیم از ریاضیات مربوط به این معماری اطلاع داشته‌اند؟! پدرش به او گفت که بهتر است این سؤال را از دبیر ریاضی‌اش بپرسد. وقتی صدرا این موضوع را برای دبیرش تعریف کرد، دبیر ریاضی گفت: این منحنی‌ها از ساده‌ترین نوع منحنی‌ها در ریاضی هستند، که منحنی‌های درجه دوم نامیده می‌شوند. نمونه‌ای از این منحنی‌ها، نمودار $f(x) = x^2$ است.

تابع‌هایی را که بتوان قانون آنها را به صورت یک چندجمله‌ای درجه دوم نوشت، یک تابع درجه دوم می‌نامند. قانون یک تابع درجه دوم در حالت کلی به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که در آن a و b و c اعداد حقیقی مشخصی هستند ($a \neq 0$). دامنه این تابع‌ها می‌توانند \mathbb{R} یا هر زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R} باشند.

تعریف



مثال ۴

تابع‌های زیر نمونه‌هایی از تابع درجه ۲ با دامنه \mathbb{R} هستند.

$$(1) f(x) = 2x^2 + 3x + 1$$

$$(2) g(x) = -3x^2 + 5$$

$$(3) h(x) = 1/2x^2 - 5x + 2$$



اکنون می‌خواهیم بررسی کنیم که نمودار تابع‌های درجه دوم دلخواه چگونه است. با توجه به اینکه با نمودار تابع درجه دوم $y = x^2$ آشنا هستید، با نوشتن قانون $f(x) = ax^2 + bx + c$ به فرم $f(x) = k(x - q)^2 + p$ می‌توانیم نمودار هر تابع درجه ۲ دلخواه را بررسی و رسم کنیم. فعالیت زیر، شما را با شکل کلی نمودار تابع‌های درجه دوم آشنا خواهد کرد.

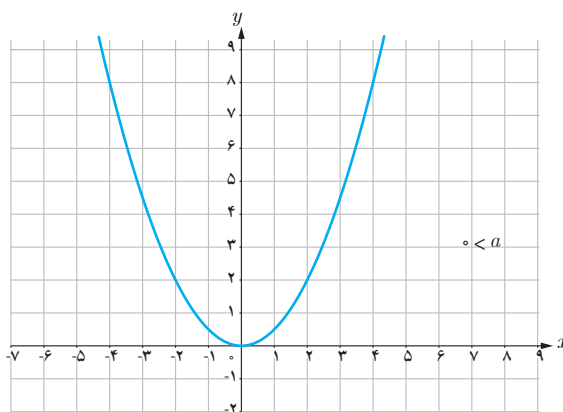
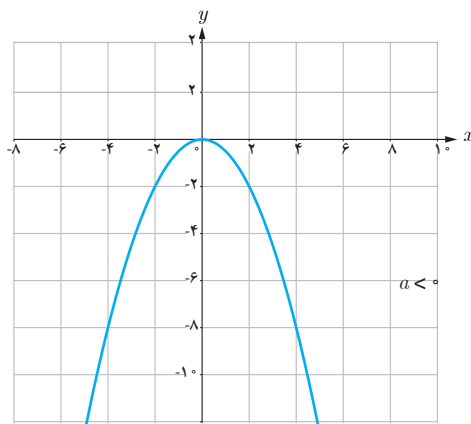
به کمک جئوجبرا نمودار تابع $y = x^2$ را رسم کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید. (در هر مرحله یک لغزنده تعریف کنید).

۱ نمودار تابع‌های درجه دوم $y = x^2 + p$ را به ازای مقادیر مختلف p رسم کنید. وضعیت نمودار تابع $y = x^2 + p$ را با نمودار تابع $y = x^2$ توصیف کنید.

۲ نمودار تابع‌های درجه دوم $y = (x - q)^2$ را به ازای مقادیر مختلف q رسم کنید. وضعیت نمودار تابع $y = (x - q)^2$ را با نمودار تابع $y = x^2$ توصیف کنید.

۳ نمودار تابع‌های درجه دوم $y = kx^2$ را به ازای مقادیر مختلف مثبت و منفی برای k رسم کنید. با تغییر علامت k از مثبت به منفی چه تغییری در نمودار ایجاد می‌شود؟

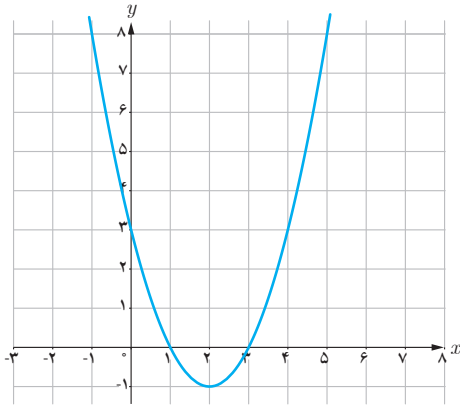
در فعالیت (۴)، با شکل کلی نمودار برخی از تابع‌های درجه دوم آشنا شدید. نمودار هر تابع درجه دوم از طریق نمودار تابع $y = ax^2$ با انتقال به پایین یا بالا (قسمت (۱)) و انتقال به چپ یا راست (قسمت (۲)) ساخته می‌شود. نمودار $y = ax^2$ برای حالت $0 < a$ و $a < 0$ در زیر آمده است.



مثال ۵

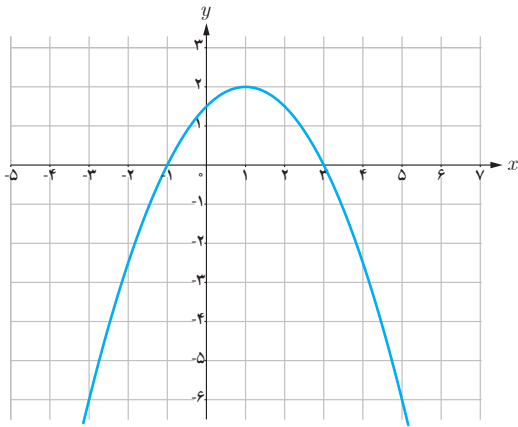
الف) نمودار تابع $y = (x-2)^2 - 1$ را رسم می‌کنیم.

نمودار این تابع همان نمودار تابع $y = x^2$ است که به اندازه ۲ واحد به سمت راست و به اندازه ۱ واحد به پایین منتقل شده است.



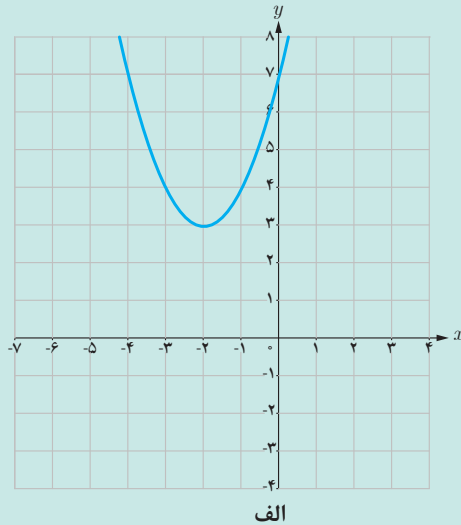
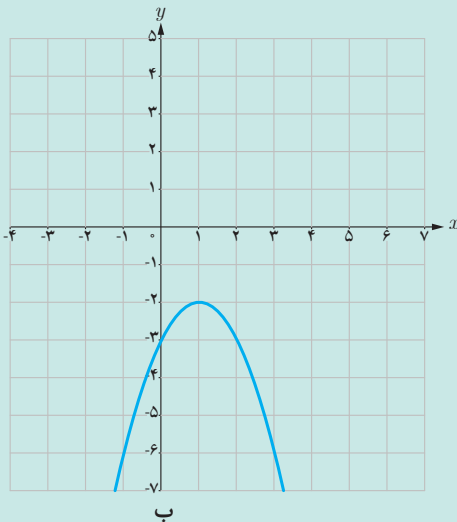
ب) اگر نمودار تابع درجه دوم $y = k(x-q)^2 + p$ به شکل زیر باشد، علامت k و مقدار p و q را تعیین کنید.

به سمت پایین بودن نمودار، نشان می‌دهد که $k < 0$. این شکل نشان می‌دهد که نمودار تابع $y = kx^2$ ، ۱ واحد به راست و ۲ واحد به بالا منتقل شده است، پس $q = 1$ و $p = 2$.



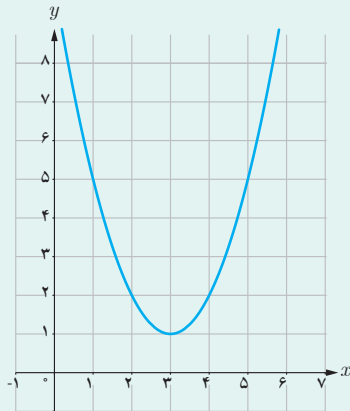
نمودارهای زیر مربوط به تابع درجه دوم $y = k(x-q)^2 + p$ می‌باشد، علامت k و مقدار p و q را تعیین کنید.

کاردکلاس ۴

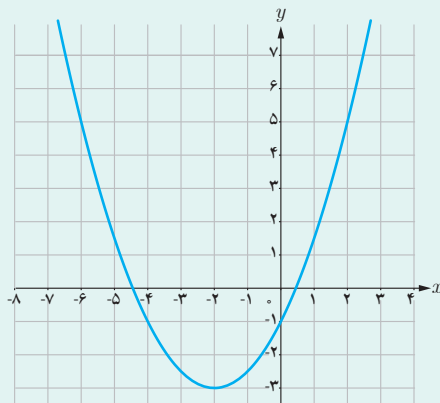




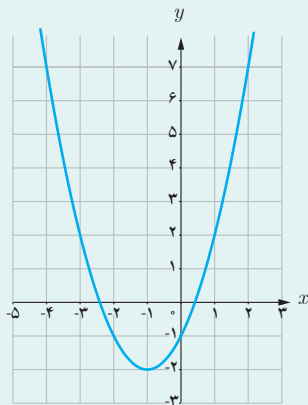
۱ نمودارهای زیر مربوط به تابع درجه دوم، $y=k(x-q)^2+p$ هستند. علامت k و مقدار q ، p را تعیین کنید.



ب



الف



۲ نمودار زیر مربوط به یک تابع درجه دوم است. مشخص کنید که کدام قانون، مربوط به این نمودار است.

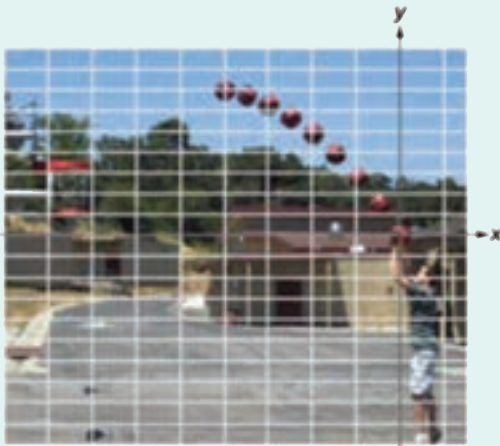
$$\text{الف) } f(x) = (x-1)^2 + 1$$

$$\text{ب) } f(x) = (x-1)^2 - 1$$

$$\text{پ) } f(x) = (x+1)^2 + 2$$

$$\text{ت) } f(x) = (x+1)^2 - 2$$

۳ فرید بسکتبال بازی می کند. تصویر زیر یک پرتاب او را به سمت سبد نشان می دهد. صفحه مختصات طوری قرار داده شده است که مبدأ مختصات دقیقاً روی نقطه پرتاب توپ قرار گیرد. ارتفاع توپ از سطح زمین در هر لحظه یک تابع درجه دوم با قانون $h(x)=k(x-q)^2+p$ است. علامت k و p و q را تعیین کنید.



کاربرد تابع‌ها در حل معادله‌ها

گفتگو



برف شدیدی در حال باریدن بود. امیر و امین و چند نفر از هم‌کلاسی‌هایشان به همراه دبیر ریاضی خود قرار بود فردای آن روز به کوه بروند. پدر امیر که کوه‌نوردی حرفه‌ای بود به آنها قول داده بود که به همراه گروه، فردا به کوه بیاید تا گروه را راهنمایی کند. او به گروه توصیه کرد لباس گرم همراه داشته باشند. صبح زود، گروه در حال بالا رفتن از کوه بود که امیر گفت: من سردم شده است. پدرش به او گفت: بهتر است یکی از لباس‌هایی را که آورده‌ای بپوشی، هر چه بالاتر برویم، هوا سردتر می‌شود. امیر رو به دبیر ریاضی کرد و گفت: معلوم می‌شود دما به ارتفاع بستگی دارد. آیا دما، تابعی از ارتفاع است؟ دبیر گفت: بله همین‌طور است. در واقع به ازای هر 150 متر افزایش ارتفاع، 1 درجه از دمای هوا کاسته می‌شود. امین پرسید: آیا می‌توانیم بفهمیم در چه ارتفاعی، دمای هوا صفر درجه می‌شود؟ دبیر قول داد که در کلاس، راجع به این موضوع بیشتر بحث کنند.





اگر دما در سطح دریا ۱۵ درجه سانتی‌گراد باشد، در کوه دماوند رابطه بین دما (T) بر حسب درجه سانتی‌گراد و ارتفاع از سطح دریا (h بر حسب متر) با قانون $T(h) = 15 - \frac{h}{150}$ مشخص می‌شود. در اینجا T تابعی از h است و دامنه این تابع بازه $[0, 5610]$ است. (۵۶۱۰، ارتفاع قله دماوند بر حسب متر است)

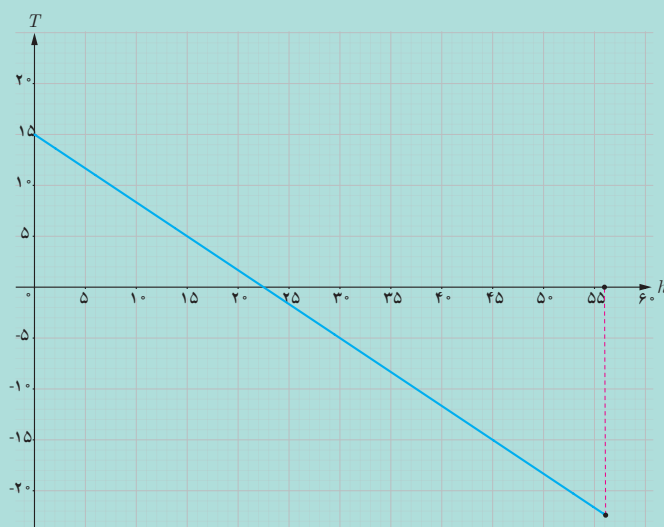
۱ $T(0)$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۲ در ارتفاع ۱۸۰۰ متری از سطح دریا، دما چند درجه است؟

۳ نمودار تابع T در زیر رسم شده است. با توجه به نمودار به سؤال‌های زیر پاسخ دهید. روی محور افقی هر واحد را ۱۰۰ متر در نظر می‌گیریم. الف) تابع T ، از درجه است. ب) نمودار این تابع در چه نقطه‌ای محور افقی (ارتفاع) را قطع می‌کند؟ این نقطه چه چیزی را نشان می‌دهد؟

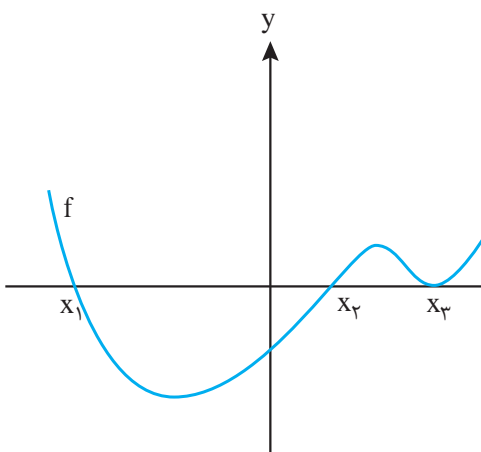
۴ جواب معادله $15 - \frac{h}{150} = 0$ را بیابید. جواب این معادله چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۵ از مقایسه (۳) و (۴) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



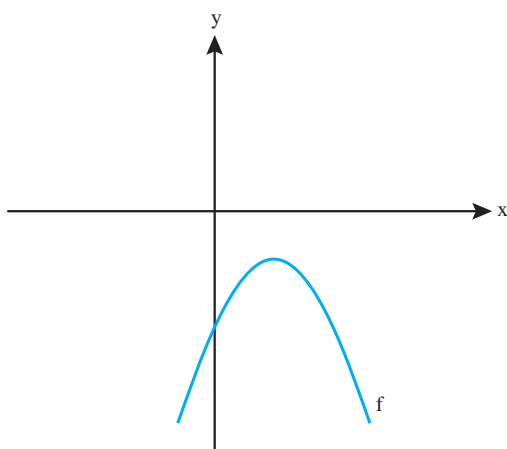
در فعالیت (۵) دیدیم که نمودار تابع T ، محور افقی را در نقطه $h = 225^\circ$ قطع می‌کند؛ یعنی دما، در ارتفاع 225° متری از سطح دریا، صفر درجه سانتیگراد است. همچنین دیدیم، برای پیدا کردن جواب معادله $0 = 15 - \frac{h}{150}$ ، کافی است طول نقطه برخورد نمودار تابع $T(h) = 15 - \frac{h}{150}$ با محور افقی را بیابیم.

در حالت کلی برای حل معادله $ax + b = 0$ می‌توان نمودار تابع $f(x) = ax + b$ را رسم کرد. طول محل برخورد نمودار این تابع با محور x همان جواب معادله $ax + b = 0$ است. همچنین، برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ می‌توان نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ را رسم کرد. طول محل‌های برخورد نمودار این تابع با محور x ها (در صورت وجود) همان جواب‌های معادله درجه دوم هستند.

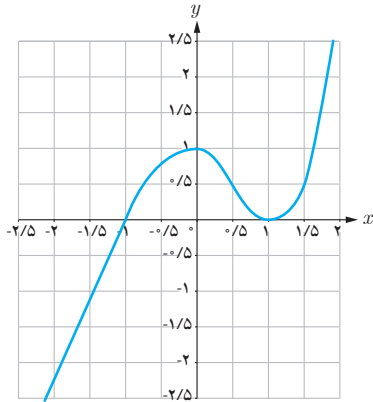


از این روش می‌توان برای حل همه معادله‌ها استفاده کرد. هر معادله‌ای را می‌توان به شکل کلی $f(x) = 0$ نوشت که در آن f تابعی با دامنه مشخص است. با رسم نمودار f ، محل‌های برخورد نمودار با محور x ها (در صورت وجود) جواب‌های معادله $f(x) = 0$ هستند. در شکل روبه‌رو، نقاط x_1 ، x_2 و x_3 جواب‌های معادله $f(x) = 0$ هستند. اگر نمودار f محور x ها را قطع نکند، به این معناست که معادله $f(x) = 0$ جواب ندارد.

مثال ۶



معادله $0 = -x^2 + 2x - 2$ را به کمک رسم نمودار حل کنید. شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x) = -x^2 + 2x - 2$ را نشان می‌دهد. این نمودار محور طول‌ها را قطع نمی‌کند. پس معادله بالا جواب ندارد.



معادله $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ را به کمک رسم نمودار حل کنید.

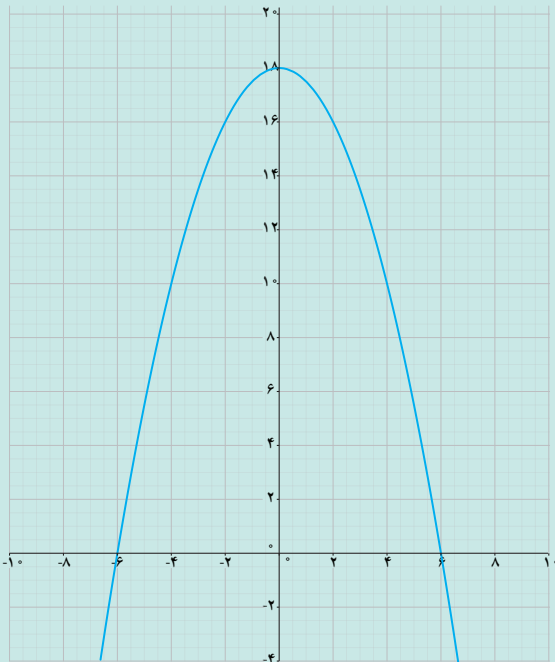
نمودار تابع $y = x^3 - x^2 - x + 1$ را به کمک جئوجبرا رسم می کنیم (شکل روبه رو).

این نمودار، محور طول‌ها را در نقاط ± 1 قطع می کند، پس جواب‌های آن معادله، ± 1 هستند.

کاردرکلاس ۵



آب از بالای آبخاری که ارتفاع آن 180 متر است، به رودخانه می ریزد. تابع $h(t) = -5t^2 + 180$ ارتفاع یک قطره آب (بر حسب متر) از سطح رودخانه را بعد از t ثانیه از جدا شدن از بالای آبخار نشان می دهد. **۱** ارتفاع یک قطره آب از سطح رودخانه بعد از 2 ثانیه، چقدر است؟



۲ نمودار تابع با قانون $h(t)$ و دامنه \mathbb{R} آورده شده است. (زمان را روی محور افقی و ارتفاع را روی محور عمودی، هر واحد 10 متر، در نظر بگیرید.) نمودار این تابع در چه نقطه‌هایی محور t ها را قطع می کند؟ این نقطه‌ها چه چیزی را نشان می دهند؟

۳ جواب‌های معادله $-5t^2 + 180 = 0$ چه مقادیری هستند؟ کدام جواب در شرایط این مسئله قابل قبول نیست؟ دلیل خود را بیان کنید.

۴ دامنه تابع h را طوری تعیین کنید که قانون $h(t)$ ارتفاع قطره آب از سطح رودخانه را مشخص کند.



۱ اگر نمودار تابع f به شکل زیر باشد، کدام گزینه جواب‌های معادله $f(x) = 0$ است.

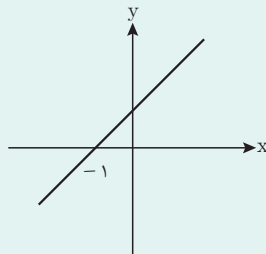


الف) ۲ و ۲- و ۱- ب) ۱ و ۱- و ۰/۸

پ) ۲ و ۰/۸ و ۱- ت) معادله جواب ندارد.

۲ شکل زیر نمودار خط به معادله $y = ax + 2$ است.

با استفاده از شکل a را پیدا کنید.



۳ معادلات زیر را به کمک رسم نمودار با استفاده از جئوجبرا حل کنید.

الف) $3x - 6 = 0$ پ) $x^2 + 5x + 6 = 0$ ث) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

ب) $-3x^2 - 2x = 16$ ت) $x^3 - x^2 = 4x + 1$ ج) $x^3 - 3x - 2 = 0$

۴ توپی را به هوا پرتاب می‌کنیم. ارتفاع آن از سطح زمین (بر حسب متر) تابعی از زمان (بر حسب ثانیه) است. اگر ارتفاع توپ را با h و زمان را با t نشان دهیم برای یک پرتاب خاص، قانون این تابع به صورت $h(t) = -5t^2 + 20t$ است. دامنه تابع $[0, 4]$ است.

در چه زمان‌هایی ارتفاع این توپ ۲ متر است؟ چند جواب به دست می‌آید؟ چرا؟

کاربرد تابع‌ها در حل نامعادله‌ها

یک مؤسسه خیریه با هدف کمک به ایتام و کودکان بی سرپرست فعالیت می‌کند. این مؤسسه به طور فصلی نمایشگاهی از دست سازها، برگزار می‌کند و درآمد حاصل از فروش آنها، را صرف این کودکان می‌کند.

در نمایشگاه سال قبل، درآمد حاصل از فروش یک نوع دست ساز، ۸ میلیون تومان بوده است. هیئت مدیره مؤسسه تصمیم گرفته است که در سال جاری، درآمد حاصل را به بیش از ۸ میلیون تومان برساند. بر اساس اطلاعات اقتصادی، رابطه بین قیمت این کالا و میزان کالای فروخته شده به صورت $x = 80000 - 200p$ است که در آن p قیمت کالا (بر حسب هزار تومان) و x تعداد کالای فروخته شده است.

آنها تصمیم دارند قیمت کالا را طوری تنظیم کنند تا درآمد حاصل از فروش به بیش از ۸ میلیون تومان برسد. با انجام فعالیت زیر می‌توانیم مدلی برای پاسخ‌گویی به این مسئله بسازیم.

گفتگو



فعالیت (۶)



۱ درآمد حاصل از فروش x کالا با قیمت p را با R نشان دهید و معادله درآمد را تشکیل دهید.

۲ رابطه بین قیمت کالا و میزان کالای فروخته شده به صورت $x = 80000 - 200p$ است. تابع درآمد را بر حسب p بنویسید.

۳ چندجمله‌ای قانون تابع درآمد بر حسب p از درجه چند است؟

۴ رابطه‌ای برای p بنویسید که در آن، درآمد حاصل از فروش دست سازها، بیشتر از ۸ میلیون تومان باشد.

همان طور که در فعالیت بالا دیدید، هدف مؤسسه، پیدا کردن رابطه‌ای بین قیمت کالا و درآمد حاصل از فروش است تا با قیمت‌گذاری مناسب، درآمدی بیش از ۸ میلیون تومان داشته باشد. مدل ریاضی این مسئله یک نامساوی است که با استفاده از آن می‌توان شرایط مطلوب مسئله را برقرار کرد. این گونه نامساوی‌ها را **نامعادله** می‌نامند.



نامساوی‌هایی به صورت $ax^2+bx+c \leq 0$ یا $ax^2+bx+c \geq 0$ را که در آنها a, b, c اعداد مشخصی هستند ($a \neq 0$) **نامعادله درجه دوم** می‌نامند. مقدارهایی از x که نامعادله را به یک نامساوی درست تبدیل می‌کنند، **جواب‌های نامعادله** می‌نامند.

مثال ۸

تویی از بالای ساختمانی به ارتفاع ۱۵ متر به هوا پرتاب شده است. ارتفاع این توپ از سطح زمین، به عنوان تابعی از زمان (t بر حسب ثانیه) در یک پرتاب خاص با تابع $h(t) = -5t^2 + 12t + 15$ بیان شده است. اگر بخواهیم زمان‌هایی را که ارتفاع توپ بیش از ۱۸ متر است به دست آوریم، باید نامعادله $18 < -5t^2 + 12t + 15$ را تشکیل دهیم که می‌توان آن را به صورت $-5t^2 + 12t - 3 > 0$ نوشت. جواب‌های این نامعادله همان زمان‌هایی است که ارتفاع توپ بیش از ۱۸ متر است.



در یک شرکت سازنده تلفن همراه، رابطه بین قیمت فروش تلفن همراه (p)، (بر حسب صد هزار تومان) و تعداد تلفن همراه فروخته شده (x)، از رابطه $p = 15 - 0.25x$ به دست می‌آید.

۱ مقدار x را بر حسب p بنویسید.

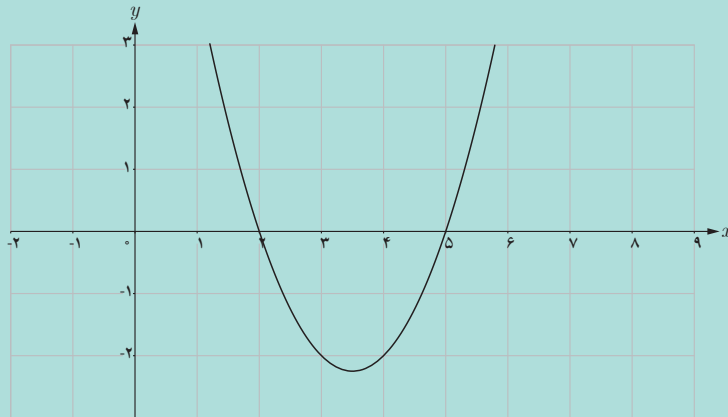
۲ درآمد حاصل از فروش تعداد x کالا ($R(p)$) را بر حسب p بنویسید.

۳ نامعادله‌ای بنویسید که نشان دهد برای چه مقدارهای p ، درآمد حاصل از فروش، بیشتر از ۴۰۰ میلیون است.

همان طور که مشاهده می‌کنید مدل ریاضی برخی از مسائلی که با آن روبه‌رو می‌شویم به صورت نامعادله است و برای حل مسئله لازم است نامعادله را حل کنیم. در بخش قبل دیدیم که محل‌های برخورد نمودار تابع $y = f(x)$ با محور طول‌ها (در صورت وجود)، جواب‌های معادله $f(x) = 0$ هستند. یعنی برای حل معادله $f(x) = 0$ ، می‌توانیم از نمودار تابع f کمک بگیریم. فعالیت صفحه بعد نشان می‌دهد برای حل نامعادله‌ها نیز می‌توان از نمودار تابع‌ها استفاده کرد.



تابع $f(x) = x^2 - 7x + 1$ را با دامنه \mathbb{R} در نظر بگیرید. نمودار آن در زیر رسم شده است.



۱ طول نقاط محل برخورد نمودار تابع با محور x ها، چه چیزی را نشان می دهند؟

۲ با استفاده از نمودار، جواب های معادله $f(x) = 0$ را به دست آورید.

۳ آن قسمت از نمودار تابع را که بالای محور x ها قرار گرفته است، رنگی (پررنگ) کنید. و جمله زیر را کامل کنید:

عرض نقاط رنگی (کوچک تر از صفر / بزرگ تر از صفر) است.

۴ به ازای چه مقادیری از دامنه، مقدار تابع مثبت است؟ این مقادیر از دامنه را به صورت بازه نمایش دهید.

۵ مجموعه جواب های نامعادله $x^2 - 7x + 1 > 0$ با مجموعه به دست آمده در (۴) چه رابطه ای دارد؟ توضیح دهید.

۶ آن قسمت از نمودار تابع را که پایین محور x ها قرار گرفته است با رنگ دیگری مشخص کنید.

۷ به ازای چه مقادیری از دامنه، مقدار تابع منفی است؟ این قسمت از دامنه را با استفاده از بازه ها بنویسید.

۸ آیا مجموعه جواب های نامعادله $x^2 - 7x + 1 < 0$ همان مجموعه به دست آمده در (۷) است؟ توضیح دهید.

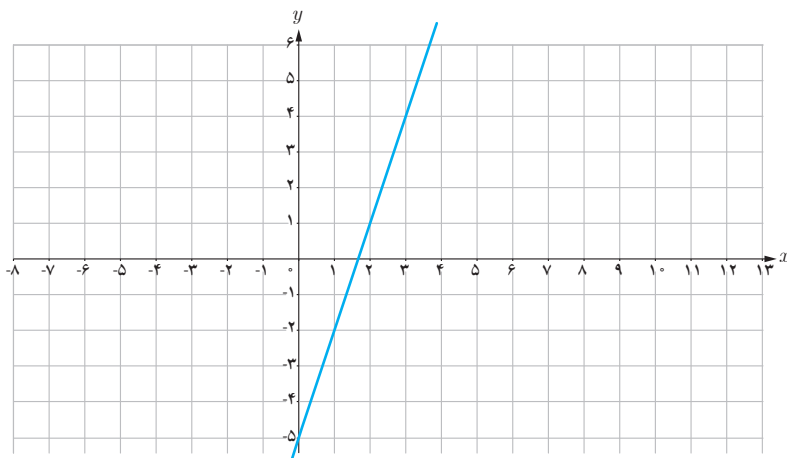
همان طور که در فعالیت (۷) می بینید، برای x هایی که نمودار تابع بالای محور x هاست، داریم $f(x) > 0$ ؛ پس مجموعه این x ها دقیقاً همان مجموعه جواب های نامعادله $f(x) > 0$ است. به طور مشابه، برای x هایی که نمودار تابع، پایین محور x ها است مقدار $f(x)$ منفی است و $f(x) < 0$. پس مجموعه این x ها دقیقاً همان مجموعه جواب های نامعادله $f(x) < 0$ است. نمودار تابع $f(x) = x^2 - 7x + 1$ محور x ها را در نقاطی به طول ۲ و ۵ قطع می کند. نمودار این تابع در بازه (۲, ۵) زیر محور x ها است و این بازه دقیقاً همان مجموعه جواب های نامعادله $x^2 - 7x + 1 < 0$ است. همچنین، نمودار این تابع، در مجموعه $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$ بالای محور x ها است و این مجموعه دقیقاً همان مجموعه جواب های نامعادله $x^2 - 7x + 1 > 0$ است.

در حالت کلی برای حل نامعادله $f(x) > 0$ که f یک تابع است، ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می کنیم. سپس، آن قسمت از نمودار تابع را که بالای محور x ها است مشخص می کنیم. آن x هایی از دامنه f که به ازای آنها، نمودار تابع بالای محور x ها است مجموعه جواب های نامعادله $f(x) > 0$ است. به طور مشابه، برای حل نامعادله $f(x) < 0$ ، ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می کنیم. سپس، آن قسمت از نمودار تابع را که پایین محور x ها است را مشخص می کنیم. آن x هایی از دامنه f که به ازای آنها نمودار تابع، پایین محور x ها است مجموعه جواب های نامعادله $f(x) < 0$ می باشد. مجموعه جواب های نامعادله های به صورت $f(x) \geq 0$ (یا $f(x) \leq 0$) علاوه بر مجموعه جواب های نامعادله $f(x) > 0$ یا $f(x) < 0$ ، طول نقاط برخورد نمودار تابع با محور x ها را هم شامل می شود.

مثال ۹

نامعادله $x - 4 > 2x - 1$ را با رسم نمودار حل کنید.

ابتدا با انتقال جملات به یک طرف، نامعادله را به شکل $3x - 5 > 0$ می نویسیم. سپس، نمودار تابع $f(x) = 3x - 5$ را که دامنه آن \mathbb{R} است رسم می کنیم.

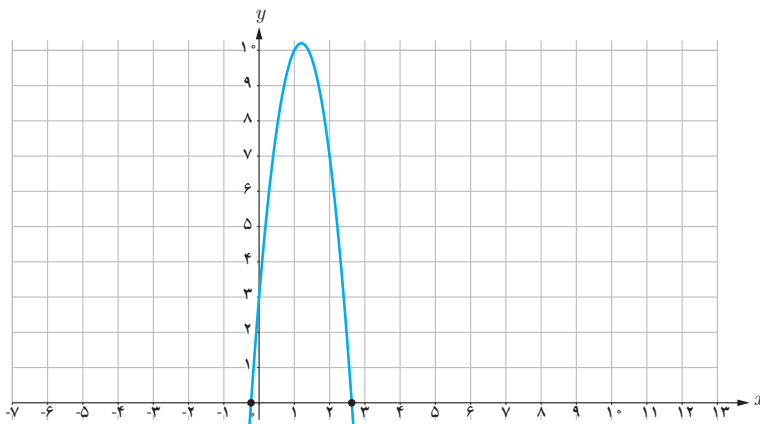


این خط در نقطه‌ای به طول $x = \frac{5}{3}$ ، محور x ها را قطع می‌کند و در بازه $(\frac{5}{3}, +\infty)$ بالای محور x ها است. پس، مجموعه جواب‌های نامعادله $3x - 5 > 0$ عبارت است از $(\frac{5}{3}, +\infty)$.

مثال ۱۰

نامعادله $-5t^2 + 12t + 5 \geq 2$ را حل کنید.

ابتدا نامعادله را به صورت $-5t^2 + 12t + 3 \geq 0$ می‌نویسیم. سپس، نمودار تابع $f(t) = -5t^2 + 12t + 3$ را که دامنه آن \mathbb{R} است به کمک جنوجبرا رسم می‌کنیم.



جنوجبرا، محل تقریبی برخورد نمودار این تابع با محور x ها را در نقاط به طول تقریبی $0/23$ و $2/63$ نشان می‌دهد. در بازه بین این نقاط نمودار تابع بالای محور x ها است، پس مجموعه جواب این نامعادله، بازه $[-0/23, 2/63]$ است.

مستطیل‌هایی را در نظر بگیرید که طول آنها ۸ سانتی‌متر بیشتر از عرض آنها است. عرض این مستطیل‌ها چه مقادیری باید داشته باشند تا مساحت آنها از ۲۵ سانتی‌متر مربع کمتر باشد.

.....

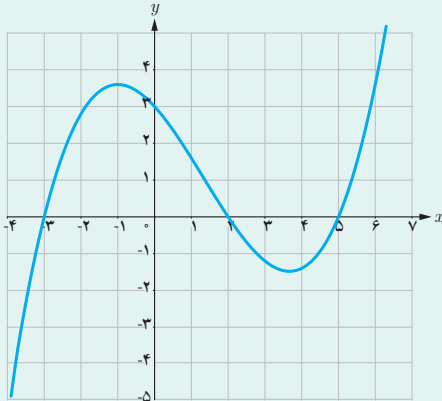
.....

کاردرکلاس ۷

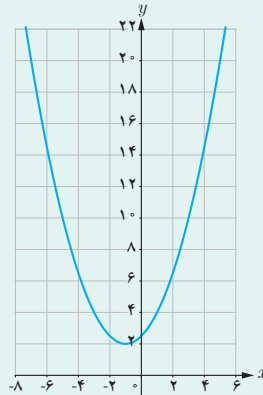




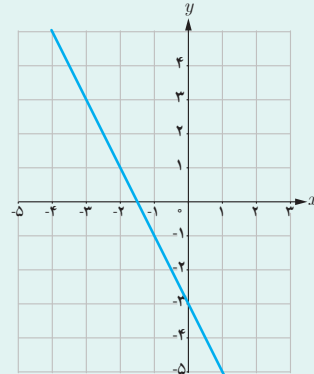
۱ در زیر نمودارهای چهار تابع رسم شده است. در هر مورد، مجموعه جواب‌های نامعادله $f(x) \geq 0$ را مشخص کنید.



پ



ب



الف

۲ نامعادله‌های زیر را حل کنید.

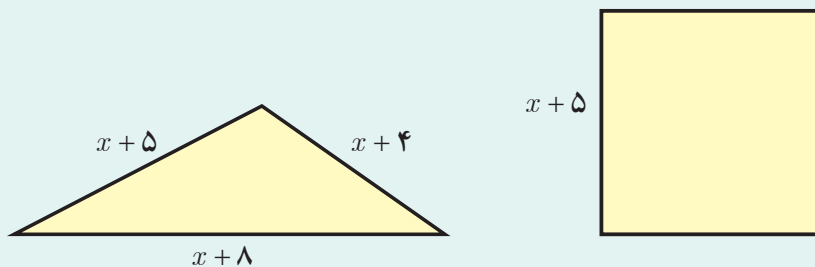
$$\text{پ) } -x^2 + 4x + 3 \geq -2$$

$$\text{ب) } 3x^2 - 5x - 1 > 0$$

$$\text{الف) } 2x - 3 < 0$$

۳ پرتابه‌ای به طور عمودی به هوا پرتاب می‌شود. ارتفاع این پرتابه از سطح دریا (برحسب متر) به صورت تابعی از زمان (برحسب ثانیه) با رابطه $h(t) = -5t^2 + 100t$ داده شده است. مشخص کنید در چه بازه زمانی، ارتفاع این پرتابه بیش از ۲۰۰ متر خواهد بود.

۴ مقدار x را طوری بیابید که اندازه محیط مثلث از اندازه مساحت مربع کمتر باشد.



۵ علی به تازگی یک کارگاه تولید قطعات یدکی راه اندازی کرده است. درآمد حاصل از فروش کالا به قیمت p (برحسب تومان) از قانون $R(p) = -1000p^2 + 50000p$ به دست می‌آید. به ازای چه مقادیری برای p ، میزان درآمد شرکت بیش از ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ است؟



هدایت غریزی زنبور عسل: مهندسی طبیعت

کندوی زنبور عسل نمونه بارزی از طراحی و استحکام است. ساختار کندو به گونه‌ای است که بیشترین فضا برای جمع‌آوری شیره را دارا می‌باشد. محاسبات ریاضی دانان نشان داده است که شش ضلعی مناسب‌ترین شکل هندسی برای دستیابی به این ویژگی است. زنبورها با الهام از وحی الهی، قوانین هندسی را رعایت نموده و پناهگاهی امن برای خود طراحی می‌کنند. یافته‌های انسان از دیرباز از به‌کارگیری و مدل‌سازی پدیده‌های خلقت حکایت دارد. امروزه ساختار کندوی عسل، الهام‌بخش الگوی آجرهای کم‌وزن و در عین حال با استحکام است. همچنین از بافتی مشابه شانه عسل در ساخت لاستیک‌های مخصوص زمستان یا تخته اسنوبورد استفاده می‌شود.



خداوند متعال این حقیقت علمی را این‌چنین به زنبور عسل الهام فرموده است: و پروردگار تو به زنبور عسل الهام کرد: از کوه‌ها، درخت‌ها و بناها خانه‌هایی برای خود بگیر؛ سپس از تمام ثمرات (و شیره گل‌ها) بخور و راه‌های پروردگارت را به اطاعت ببیما. آنگاه از درون آنها، شربتی رنگارنگ خارج می‌شود که در آن، شفا و درمان برای مردم است. به‌راستی در این امر، برای مردم اندیشمند نشانه‌ای است.

سوره نحل آیات ۶۸ و ۶۹

تحقیقات بسیاری درباره الگوهای ریاضی موجود در مسیر حرکت زنبورها و دیگر ابعاد زندگی آنها انجام شده است. ساده‌ترین رابطه ریاضی که می‌توان مشاهده کرد، رابطه بین تعداد حجره یا سلول‌ها (شش ضلعی‌ها) با شماره حلقه‌های دور یک سلول است که با یک تابع چندجمله‌ای از درجه ۲ نمایش داده می‌شود. اگر n شماره حلقه باشد، $Q(n) = 3n^2 - 3n + 1$ تابعی است که به کمک آن می‌توان تعداد حجره‌ها را پیدا کرد.

