پودمان چهارم

لگاریتم و خواص آن

دانشمندان اخیراً موفق به کشف دورترین کهکشان در محدوده شناخته شده جهان هستی شدند. این کهکشان که MACS ۰۶۴۷ – JD نام‌گذاری شده، تقریباً ۱۳/۳ میلیارد سال نوری با ما فاصله دارد و از نظر اندازه، جزء کوچکی از کهکشان راه شیری است. به گفتهٔ دانشمندان، با توجه به سرعت نور در فضا، آنچه که اکنون ما از زمین می‌بینیم، متعلق به زمانی است که دنیا تنها ۴۲۰ میلیون سال سن داشته است. شاید جالب باشد بدانید که سن فعلی جهان حدود ۱۳/۷۵ میلیارد سال است.
کار با این گونه اعداد بزرگ وقت و انرژی زیادی از دانشمندان را به خود اختصاص می‌داد؛ اختراع لگاریتم تا قبل از ظهور کامپیوتر کمک مؤثری در تسهیل این محاسبات داشته است. امروزه لگاریتم درحسابداری، شیمی، فیزیک و... مورد استفاده قرار می‌گیرد.

امروز دبیر با ورود به کلاس گفت:

«چه کسی می‌داند کدام موضوع از ریاضیات است که به گفتهٔ لاپلاس طول عمر اختر شناسان را چند برابر کرده است؟»

او همچنین گفت: به نظر من این موضوع نه تنها طول عمر اختر شناسان، بلکه طول عمر دریانوردان، بازرگانان، شیمی‌دانان، ریاضی‌دانان، و زمین شناسان و همهٔ انسان‌های کرهٔ زمین را چند برابر کرده است.

طرح این سؤال موجب تعجب هنرجویان شده بود و همه کنجکاو بودند که این چه موضوعی از ریاضی است که موجب افزایش طول عمر می‌شود.

مریم گفت: تاکنون فکر می‌کردم موضوع‌هایی که در زمینهٔ افزایش طول عمر کار می‌شود مربوط به حوزهٔ زیست‌شناسی است، برای من جالب است بدانم ارتباط این موضوع با ریاضی چیست.

دبیر گفت: این موضوع در بسیاری از شاخه‌های علوم نیز کاربرد دارد و برای آشنایی با این موضوع بهتر است فعالیت زیر را انجام دهید.

فعالیت ۱

۱ فاصلهٔ زمین از خورشید تقریباً ۱۲۹۱۴۰۱۶۳کیلومتر و فاصلهٔ ستارهٔ پروکسیما قنطورس تا زمین تقریباً ۱۷۷۱۴۷برابر فاصلهٔ زمین تا خورشید است. برای تعیین فاصلهٔ این ستاره تا زمین باید از کدام چهار عمل اصلی استفاده کرد؟ حدس می‌زنید برای انجام این عمل چقدر زمان نیاز دارید؟

۲ ستارهٔ شباهنگ (سیروس) در فاصلهٔ تقریباً ۶۸۶۳۰۳۷۷۷۳۶۴۸۸۳ کیلومتری از زمین است، اگر بخواهیم بدانیم فاصلهٔ ستاره شباهنگ از زمین چند برابر فاصلهٔ خورشید تا زمین است چه عملی باید انجام دهید؟ حدس می‌زنید زمان انجام این عمل چقدر است؟

۳ با استفاده از جدول مقابل که در آن توان‌هایی از ۳ محاسبه شده است، جاهای خالی را کامل کنید و حاصل را با استفاده از ضرب اعداد توان‌دار بنویسید.

۱۲۹۱۴۰۱۶۳ × ۱۷۷۱۴۷ = ۳...... × ۳...... = ۳......

۶۸۶۳۰۳۷۷۷۳۶۴۸۸۳ ÷ ۱۲۹۱۴۰۱۶۳ = ۳...... ÷ ۳...... = ۳......

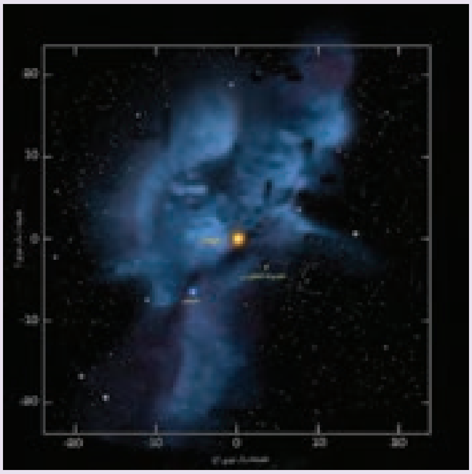
۴ با استفاده از قسمت قبل و جدول مقابل به سؤال‌های (الف) و (ب) پاسخ دهید.

الف) فاصلهٔ پروکسیما قنطورس از زمین چقدر است؟

ب) فاصلهٔ ستارهٔ شباهنگ (سیروس) چند برابر فاصلهٔ خورشید تا زمین است؟

۵ محاسبهٔ مستقیم ساده‌تر است یا استفاده از جدول؟ زمان انجام کدام روش کمتر است؟

....



نزدیک‌ترین ستاره به زمین که فقط در نیمکره جنوبی قابل رؤیت است پروکسیما قنطورس و نزدیک‌ترین ستاره که از همهٔ نقاط زمین قابل رؤیت است شباهنگ (سیروس) است.

حاصل	۳^n	n
۱	$۳^{۰}$	۰
۳	$۳^{۱}$	۱
۹	$۳^{۲}$	۲
۲۷	$۳^{۳}$	۳
⋮	⋮	⋮
۱۷۷۱۴۷	$۳^{۱۱}$	۱۱
۵۳۱۴۴۱	$۳^{۱۲}$	۱۲
⋮	⋮	⋮
۱۲۹۱۴۰۱۶۳	$۳^{۱۷}$	۱۷
۳۸۷۴۲۰۴۸۹	$۳^{۱۸}$	۱۸
⋮	⋮	⋮
۷۶۲۵۵۹۷۴۸۴۹۸۷	$۳^{۲۷}$	۲۷
۲۲۸۷۶۷۹۲۴۵۴۹۶۱	$۳^{۲۸}$	۲۸
۶۸۶۳۰۳۷۷۷۳۶۴۸۸۳	$۳^{۲۹}$	۲۹

در این فعالیت دیدیم که برای ضرب و تقسیم دو عدد بزرگ، اگر بتوان آنها را به صورت اعداد توان‌دار (با پایهٔ مساوی) نوشت آنگاه با جمع و تفریق توان‌های آنها به نتیجهٔ مورد نظر خواهیم رسید. استفاده از این تکنیک که به‌جای ضرب و تقسیم اعداد بزرگ، با جمع و تفریق اعداد کوچک‌تر کار می‌کنیم موجب افزایش سرعت و کاهش زمان محاسبات می‌شود و از اشتباهاتی که درمحاسبهٔ مربوط به اعداد بزرگ است جلوگیری می‌کند. به‌نظر می‌رسد جملهٔ معروف لاپلاس نیز به این دلیل بوده که برای انجام این محاسبات، وقت و نیروی بسیار زیادی از دانشمندان تلف می‌شده است و این روش باعث شده که دانشمندان وقت خود را با محاسبات حجیم هدر ندهند.

استفاده از اعداد توان‌دار و توجه به توان آنها برای انجام محاسبات، موجب پیدایش مفهومی به نام **لگاریتم** در ریاضی شده است. در فعالیت (۱) با توجه به تساوی $۱۷۷۱۴۷=۳^{۱۱}$، برای انجام عمل ضرب به جای عدد ۱۷۷۱۴۷ از عدد ۱۱ (که توان در $۳^{۱۱}$ می‌باشد) استفاده شده است. بنا به تعریف عدد ۱۱ را **لگاریتم** ۱۷۷۱۴۷ در مبنای ۳ می‌نامند.

مثال ۱

الف) تساوی $۸ = ۲^۳$ نمایش عدد ۸ به صورت یک عدد توان‌دار با پایه ۲ است؛ بنابراین ۳ را لگاریتم ۸ در مبنای ۲ می‌نامند.

ب) اگر عدد ۱۰۰۰ را به صورت یک عدد توان‌دار با پایه ۱۰ بنویسیم، داریم، $۱۰۰۰ = ۱۰^۳$ بنابراین لگاریتم ۱۰۰۰ در مبنای ۱۰ عدد ۳ است .

پ) عدد ۶۴، توانِ سوم عدد ۴ است، یعنی $۶۴ = ۴^۳$، بنابراین لگاریتم ۶۴ در مبنای ۴ عدد ۳ است.

کار در کلاس ۱

۱ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) از $۸۱ = ۳^۴$ نتیجه می‌شود: لگاریتم ...... در مبنای ...... عدد ۴ است.

ب) لگاریتم ۱۰۰۰۰ در مبنای ۱۰ عدد .... است؛ زیرا $۱۰۰۰۰ = ۱۰^{....}$

پ) $... = ۴^۲$ نشان می دهد: لگاریتم ...... در مبنای ۴ عدد ...... است.

۲ عدد ۶۴ را به‌صورت یک عدد توان دار با پایهٔ ۲ نوشته و با استفاده از آن لگاریتم ۶۴ در مبنای ۲ را بنویسید.

....

با معرفی لگاریتم این سؤال مطرح خواهد شد که آیا می‌توان هر عدد حقیقی را به‌عنوان مبنای لگاریتم درنظر گرفت؟ فعالیت بعد مناسب بودن عدد ۱ به‌عنوان مبنا را بررسی می کند.

فعالیت ۲

تساوی‌های $۱ = ۱^{۰}$ و $۱ = \sqrt[۳]{۱} = ۱^{\frac{۱}{۳}}$ و $۱ = ۱^{۲}$ و $۱ = ۱^{۳}$ و $۱ = \frac{۱}{۱^{۳}} = ۱^{-۳}$ و $۱ = ۱^{۴}$ و ... را در نظر بگیرید،

۱ در تساوی $۱ = ۱^{...}$ به‌جای نقطه چین چه اعدادی می‌توان قرار داد؟

....

۲ آیا می‌توان عدد a را طوری پیدا کرد که: $۲ = ۱^{a}$. به عبارت دیگر آیا لگاریتم ۲ در مبنای ۱ قابل تعریف است؟

....

۳ آیا عدد a را می‌توان طوری یافت که در تساوی: $۳ = ۱^{a}$ صدق کند. به عبارت دیگر آیا لگاریتم ۳ در مبنای ۱ قابل تعریف است؟

....

۴ آیا عددی غیر از ۱ را می‌توان به‌صورت عددی توان‌دار با پایهٔ ۱ نوشت؟ چرا ؟

....

۵ با توجه به نتایج بالا، فکر می‌کنید می‌توان عدد ۱ را به عنوان مبنای لگاریتم انتخاب کرد؟ چرا ؟

....

فعالیت بالا نشان می‌دهد عدد ۱ را نمی‌توان به عنوان مبنا برای لگاریتم در نظر گرفت.
تعریف لگاریتم در حالت کلی به شکل زیر است.

تعریف

اگر a یک عدد حقیقی مثبت مخالف ۱ باشد و اعداد حقیقی b و c به گونه‌ای باشند که:
$b=a^{c}$ آنگاه c را لگاریتم b در مبنای a می‌نامند و با $\log_{a}b$ نشان می‌دهند. یعنی $\log_{a}b = c$

در تعریف لگاریتم[1]، مبنا همواره عددی مثبت و مخالف ۱ در نظر گرفته می‌شود، زیرا توان‌رسانی به توان اعداد دلخواه فقط با پایهٔ مثبت قابل تعریف است.

نکته

در نماد $\log_{a}b$، عدد b توان a نیست، بلکه a مبنای لگاریتم است، به عبارت دیگر: $\log_{a}b \neq \log a^{b}$

۱ــ لگاریتم در زبان انگلیسی logarithm است و آن را به‌طور خلاصه با log نمایش می‌دهند.

مثال ۲

در تساوی $۹ = ۳^{۲}$ ، عدد ۹ به صورت یک عدد توان‌دار با پایه ۳ نمایش داده شده است؛ بنابراین ۲ برابر است با لگاریتم ۹ در مبنای ۳ و می‌نویسیم: $\log_{۳} ۹ = ۲$ یعنی :

توان عدد، مقدار لگاریتم است

$$\log_{۳} ۹ = ۲ \qquad ۳^{۲} = ۹$$

پایهٔ عدد، مبنای لگاریتم است

مثال ۳

در توان‌رسانی با اعداد گویا دیدیم برخی اعداد رادیکالی را (که زیر رادیکال عددی نامنفی باشد) می‌توان به صورت عددی با توان گویا نوشت. مثلاً $\sqrt{۱۰} = ۱۰^{\frac{۱}{۲}}$، بنابراین لگاریتم $\sqrt{۱۰}$ در مبنای ۱۰ برابر با $\frac{۱}{۲}$ یا ۰/۵ است و می‌نویسیم:

$$\log_{۱۰} \sqrt{۱۰} = ۰/۵$$

لگاریتم در بسیاری از شاخه‌های علوم نظیر نجوم، فیزیک، زمین‌شناسی، شیمی، ریاضی و همچنین در حسابداری و مسائل مالی کاربرد فراوانی دارد. استفاده از این مفهوم و به‌کارگیری خواص آن در حل مسائل مربوط به این شاخه‌ها، گسترده‌تر از محاسبات مربوط به ضرب و تقسیم اعداد بسیار بزرگ یا بسیار کوچک می‌باشد.

مثال ۴

نوعی باکتری را در نظر بگیرید که در هر واحد زمانی ۲ برابر می‌شود ، اگر با ۱ گرم از این نوع باکتری شروع کنیم مقدار این باکتری‌ها پس از ۱ واحد زمانی $۲^{۱}$ گرم و پس از ۲ واحد زمانی $۲^{۲}$ گرم خواهد بود. اگر بخواهیم بدانیم پس از چند واحد زمانی مقدار باکتری‌ها ۸ گرم خواهد شد، لازم است بدانیم چه توانی از ۲ مساوی ۸ است و این همان $\log_{۲} ۸$ می‌باشد. به‌همین ترتیب $\log_{۲} ۱۶$ مقدار زمانی که لازم است تا این باکتری‌ها به ۱۶ گرم برسد را نشان می‌دهد.

کار در کلاس ۲

۱ هر سطر جدول زیر، تساوی‌های متناظر را نشان می‌دهد، جدول را کامل کنید.

تساوی برحسب لگاریتم	تساوی برحسب عدد توان‌دار
$\log_{۵}۱۲۵ = \cdots\cdots$	$۵^{۳} = ۱۲۵$
$\log_{۷}\cdots\cdots = \cdots\cdots$	$۷^{۲} = \cdots\cdots$
$\log_{۳}۸۱ = \cdots\cdots$	$۳^{\cdots} = ۸۱$
$\log_{\cdots}۶۴ = ۳$	$۴^{\cdots} = ۶۴$
....	$۲^{۵} = \cdots\cdots$
....	$b^{۳} = ۲/۱$
$\log_{۳}۲۷ = \cdots\cdots$	....
$\log_{۸}۲ = \cdots\cdots$	$\sqrt[۳]{۸} = ۸^{\frac{۱}{۳}} = ۲$
$\log_{a}۴ = ۳/۳$	....

۲ عدد ۲۵ را به صورت یک عدد توان‌دار با پایهٔ ۵ نوشته و با استفاده از آن حاصل $\log_{۵}۲۵$ را بنویسید.

یک سؤال مهم آن است که آیا می‌توان از همهٔ اعداد لگاریتم گرفت؟ یعنی آیا اعدادی وجود دارند که لگاریتم آنها تعریف نشده باشد؟ فعالیت زیر پاسخ این سؤال را فراهم می‌کند.

فعالیت ۳

۱ اگر $b = ۴^c$، جدول زیر را کامل کنید.

c	۲-	۱-	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲
b	$\frac{۱}{۱۶}$	....	$\frac{۱}{۲}$	....	۲	....	....

۲ آیا در سطر دوم جدول عددی منفی وجود دارد؟ دربارهٔ علامت b چه می‌توان گفت؟

....

۳ با توجه به اینکه تساوی $b = ۴^c$ نشان می‌دهد $\log_۴ b = c$، دربارهٔ علامت b در $\log_۴ b$ چه می‌توان گفت؟

....

۴ اگر در پایه به جای ۴، عدد ۳ باشد با یک مثال درستی نتیجه‌ای که از قسمت قبل به دست آورده‌اید را بررسی کنید.

....

۵ اگر a عددی مثبت و مخالف ۱باشد و $b = a^c$ دربارهٔ علامت b چه می‌توان گفت؟ دربارهٔ علامت b در $\log_a b$ چه می‌توان گفت؟ آیا از عدد منفی می‌توان لگاریتم گرفت؟

....

با انجام فعالیت (۳) ملاحظه می‌کنید اعداد مثبت به هر توانی برسند حاصل، همواره عددی مثبت خواهد بود. یعنی هیچ توانی از یک عدد مثبت، عددی منفی نمی‌باشد، بنابراین:

نکته

فقط اعداد مثبت لگاریتم دارند، یعنی عبارت $\log_a b$ برای $b > ۰$ تعریف می‌شود.

کار در کلاس ۳

۱ با توجه به ویژگی‌های توان رسانی اعداد، جملات زیر را کامل کنید.

برای هر عدد مثبت و مخالف ۱ مانند a:

الف) با توجه به $a^{۱} = a$، داریم ... = $\log_a a$

ب) از $a^{\circ} = ۱$ نتیجه می‌شود : ... = $\log_a ۱$

پ) با درنظر گرفتن $a^{-n} = \frac{۱}{a^n}$ می‌توان گفت: ... = $\log_a \frac{۱}{a^n}$

ت) اگر $b = a^c$، آنگاه $\log_a b = c$. بنابراین: ... = $\log_a a^c$

مثال ۵

عبارت‌های زیر برقرار هستند:

الف) $\log_{۴} ۴ = ۱$ زیرا $۴^{۱} = ۴$ ب) $\log_{\sqrt{۳}} \sqrt{۳} = ۱$ پ) $\log_{۵} ۱ = ۰$ زیرا $۵^{\circ} = ۱$ ت) $\log_{۰/۴} ۱ = ۰$

ث) با توجه به اینکه $۱۰^{-۳} = \frac{۱}{۱۰^{۳}} = \frac{۱}{۱۰۰۰} = ۰/۰۰۱$ داریم $\log_{۱۰} ۰/۰۰۱ = -۳$.

ج) از $۴^{-۱} = \frac{۱}{۴} = \frac{۲۵}{۱۰۰} = ۰/۲۵$ نتیجه می‌شود: $\log_{۴} ۰/۲۵ = -۱$.

معمولاً برای نمایش لگاریتم در مبنای ۱۰ مبنای لگاریتم را نمی‌نویسند. پس $\log b = \log_{۱۰} b$.
با توجه به تعریف لگاریتم می‌توان دید که لگاریتم اعدادی که توان‌های صحیح یا گویایی از مبنای لگاریتم می‌باشند به سادگی قابل محاسبه است، اما محاسبهٔ لگاریتم سایر اعداد چگونه انجام می‌شود؟ مثلاً برای محاسبهٔ $\log_{۱۰} ۹$ باید توانی از ۱۰ را پیدا کنیم که مساوی عدد ۹ باشد، واضح است که این عدد به سادگی قابل محاسبه نیست اما با استفاده از ماشین حساب می‌توان تقریب اعشاری این عدد را پیدا کرد.

استفاده ازماشین حساب

با استفاده از ماشین حساب حاصل لگاریتم‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\log ۹$

ب) $\log ۰/۰۰۱۶$

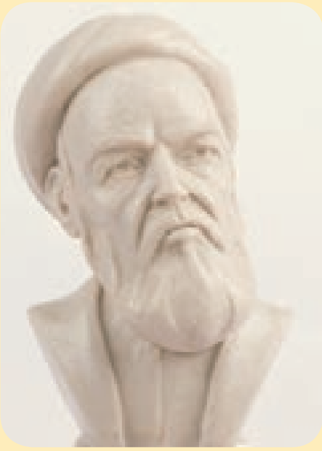
9 → log → =

0 → . → 0 → 0 → 1 → 6 → log → =

خواندنی

مطالعهٔ نجوم از دیرباز مورد توجه ایرانیان بوده است. یکی از جلوه‌های آن مطالعات دقیق دربارهٔ تعیین طول سال است، ستاره‌شناسان آریایی با ستاره‌ها و طلوع و غروب آن آشنا بوده‌اند، سال نو در ایران باستان با گذر خورشید از نقطهٔ اعتدال بهاری آغاز می‌شد. در دورهٔ اسلامی علم هیئت به‌عنوان یکی از شاخه‌های اصلی نجوم در دایرهٔ علوم اسلامی قرار گرفت و دانشمندان بزرگ اسلامی از جمله خواجه‌نصیرالدین طوسی در این زمینه مشغول به فعالیت شدند. تأسیس رصدخانه‌ها، تدریس علم نجوم و هیئت، ساخت ابزارهای نمایش زمان، اصلاح تقویم و... شاهدهایی از عظمت این علم در دوران اسلامی در ایران است.

فعالیت دانشمندان ایرانی در زمینهٔ نجوم و اشکالاتی که مخصوصاً خواجه‌نصیرالدین طوسی و شاگردانش بر نظریهٔ "زمین مرکزی" مربوط به بطلمیوس وارد کردند، زمینهٔ فکری کوپرنیک ستاره‌شناس لهستانی ـ آلمانی را فراهم کرد تا مدل غیر بطلمیوسی "خورشید مرکزی" را ارائه کند در این نظریه خورشید را مرکز عالم در نظر گرفته و سایر اجرام آسمانی به دور آن می‌گردند. محاسبات مورد نیاز برای تنظیم مدل خورشید مرکزی وقت زیادی از دانشمندان را به خود اختصاص می‌داد. این مشکل زمینه‌های ابداع لگاریتم توسط ریاضی‌دان هم‌عصر کوپرنیک یعنی جان نپر را فراهم کرد.



خواجه نصیرالدین طوسی منجم، حکیم، متکلم و... دانشمند ایرانی است که در قرن ششم می‌زیسته است. وی رصدخانه و کتابخانهٔ مراغه را تأسیس کرد که در آن حدود چهارصد هزار جلد کتاب وجود داشت.

مسائل

۱ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید:

الف) از $۶۴ = ۴^{۳}$ نتیجه می‌شود: لگاریتم ۶۴ در مبنای .... عدد .... است.

ب) لگاریتم ۳۲ در مبنای ۲ عدد .... است؛ زیرا $۳۲ = ۲^{\cdots}$.

پ) از $\sqrt[۳]{۲} = ۲^{\frac{۱}{۳}}$ نتیجه می‌شود: لگاریتم $\sqrt[۳]{۲}$ در مبنای ۲ عددِ .... است.

ت) با توجه به اینکه $۲۴۰۱ = ۷^{۴}$ داریم: $\log_{۷} ۲۴۰۱ = \ldots$

ث) با توجه به $۸^{-\frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{۲}$، می‌توان گفت: $\log_{۸} \frac{۱}{۲} = \cdots$.

ج) تساوی‌های $۰/۰۰۱ = \frac{۱}{۱۰۰۰} = \frac{۱}{۱۰^{۳}} = ۱۰^{-۳}$ نشان می‌دهند: $\log ۰/۰۰۱ = \ldots$

۲ مانند قسمت (الف) تساوی شامل لگاریتم متناظر با هر قسمت را بنویسید.

الف) $۱۶ = ۴^{۲} \leftrightarrow \log_{۴} ۱۶ = ۲$ ب) $۰/۰۰۰۱ = ۱۰^{-۴}$ پ) $۰/۱۲۵ = ۲^{-۳}$

ت) $۲/۱ = a^{۳}$ ث) $۴/۳ = ۲^{x}$ ج) $۹ = (\frac{۱}{۳})^{-۲}$ چ) $(۲۴۰۱)^{\frac{۱}{۴}} = ۷$

۳ در هر کدام از موارد زیر یک تساوی شامل لگاریتم داده شده است، مانند قسمت (الف) تساوی شامل عدد توان‌دارِ متناظر با هر کدام را بنویسید.

الف) $\log_{۲} ۶۴ = ۶ \leftrightarrow ۲^{۶} = ۶۴$ ب) $\log_{۳}(\frac{۱}{۹}) = -۲$ پ) $\log_{a} ۳ = ۶$

ت) $\log_{b} c = ۲$ ث) $\log_{۳} ۲ = x$ ج) $\log_{۳۲} ۲ = \frac{۱}{۵}$

۴ حاصل لگاریتم‌های زیر را به دست آورید:

الف) $\log_{۷} ۴۹ = \ldots$ ب) $\log_{۵} ۱۲۵ = \ldots$ پ) $\log_{۲} ۱۲۸ = \ldots$

ت) $\log_{۲} \frac{۱}{۸} = \cdots$ ث) $\log_{۱۰} ۰/۰۰۰۱ = \ldots$

۵ با استفاده از ماشین حساب، حاصل لگاریتم‌های زیر را تا دو رقم اعشار بنویسید:

الف) $\log ۵۰ \approx \ldots$ ب) $\log ۱۲ \approx \ldots$ پ) $\log ۲ \approx \ldots$

۶ نوعی باکتری را در نظر بگیرید که وزن آنها پس از ۱ واحد زمانی ۴ برابر می‌شود.

الف) پس از چند واحد زمانی، وزن ۱ گرم از این باکتری‌ها ۶۴ گرم خواهد شد؟

ب) پس از چند واحد زمانی، وزن این باکتری‌ها ۳۲ گرم خواهد شد؟

۷ در هر مورد زیر، یک تساوی شامل عددی توان‌دار و تساوی لگاریتمی متناظر با آن را طوری بنویسید که حاصل، لگاریتم عددی با ویژگی خواسته شده باشد.

الف) عدد طبیعی ب) عدد صحیح منفی پ) عدد گویا

خواص لگاریتم

گفتگو

اگر به کلام لاپلاس، در خصوص نقش لگاریتم در انجام محاسبات با اعداد بزرگ و آشنایی با مفهوم لگاریتم توجه کرده باشید، شاید این سؤال به ذهن شما نیز رسیده باشد که:

« چگونه برای ضرب و تقسیم اعداد بزرگ از لگاریتم استفاده می‌کنند؟»

دبیر پرسید: با توجه به فعالیت (۱) که در خصوص فاصلهٔ ستارگان و برای معرفی لگاریتم مطرح شد، آیا کسی می‌تواند پاسخ سؤال فوق را حدس بزند؟

مریم گفت: در فعالیت (۱) برای ضرب دو عدد بزرگ ابتدا آنها را به‌صورت دو عدد توان‌دار نوشتیم. سپس توان‌های آنها را با هم جمع کرده و مقدار عدد توان‌دار جدید را به‌دست آوردیم. بنابراین، با استفاده از جدول مقادیر توان‌های ۳، عمل ضرب اعداد، به جمع توان‌های آنها تبدیل شد.

دبیر گفت: بله، بنابراین شما به جای ضرب و تقسیم اعداد توان‌دار، توان‌های آنها را جمع و تفریق کردید. با توجه به مفهوم لگاریتم، این توان‌ها چه هستند؟

مریم گفت: این توان‌ها، لگاریتم آن اعداد در مبنای ۳ بودند. یعنی برای انجام محاسبهٔ مورد نیاز، لگاریتم‌ها را جمع یا تفریق کردیم.

دبیر گفت: پاسخ نهایی سؤال شما مربوط به خواص لگاریتم است. فعالیت زیر یکی از خواص مهم لگاریتم را نشان می‌دهد.

فعالیت ۴

۱ جدول زیر را کامل کنید.

b	c	$\log b$	$\log c$	bc	$\log bc$
۱۰	۱۰۰	۱	....	۱۰۰۰	۳
۱۰۰۰۰	۱۰۰۰	....	۳	....	۷
۰/۱	۱۰۰	۱-	....	$۱۰^{-۳}$	....
$\sqrt{۱۰}$	$\sqrt{۱۰}$	....	....	....	۱
۱۰^{x}	۱۰^{y}	x	....	۱۰^{x+y}	....

۲ در هر سطر چه رابطه‌ای بین اعداد ستون‌های $\log b$ و $\log c$ و ستون $\log bc$ وجود دارد؟

....

۳ این رابطه را به صورت یک جمله بیان نمایید و آن را با زبان ریاضی بنویسید.

....

فعالیت (۴) نشان می‌دهدکه لگاریتم حاصل ضرب دو عدد با مجموع لگاریتم‌های آن دو عدد برابر است. این یکی از خواص مهم لگاریتم است و در حالت کلی داریم:

نکته

برای $b,c > ۰$ داریم: $\log bc = \log b + \log c$

این رابطه برای لگاریتم‌هایی که مبنای غیر از ۱۰ دارند نیز برقرار است.

مثال ۶

با استفاده از این خاصیت لگاریتم، می‌توانیم بدون آنکه دو عدد را ضرب کنیم لگاریتم حاصل‌ضرب آنها را به دست آوریم.

الف) $\log ۱۰۰\sqrt[۵]{۱۰} = \log(۱۰۰\times\sqrt[۵]{۱۰}) = \log ۱۰۰ + \log\sqrt[۵]{۱۰} = ۲ + \log ۱۰^{\frac{۱}{۵}} = ۲ + \frac{۱}{۵} = \frac{۱۱}{۵}$

ب) $\log ۲ + \log ۵ = \log(۲\times ۵) = \log ۱۰ = ۱$

پ) $\log ۱۲۵ + \log ۴ + \log ۲ = \log(۱۲۵\times ۴\times ۲) = \log ۱۰۰۰ = ۳$

اکنون که با لگاریتم و یکی از خاصیت‌های آن آشنا شده‌ایم، می‌توانیم مسئله مربوط به فعالیت (۱) را به کمک لگاریتم حل کنیم.

مثال ۷

فاصله زمین از خورشید با دقت بیشتر ۱۴۹۶۸۰۰۰۰ کیلومتر و فاصلهٔ ستارهٔ پروکسیما قنطورس تا زمین با دقت بیشتر۲۶۸۶۰۶ برابر فاصلهٔ زمین تا خورشید است. برای به‌دست آوردن فاصله این ستاره تا زمین باید حاصل ضرب ۲۶۸۶۰۶×۱۴۹۶۸۰۰۰۰ را حساب کنیم. انجام این ضرب مشکل است ولی محاسبهٔ لگاریتم آن آسان است. کافی است که لگاریتم این دو عدد را حساب کنیم و با هم جمع کنیم. بنابراین ابتدا لگاریتم این دو عدد را به کمک ماشین حساب به دست می‌آوریم:

$\log ۱۴۹۶۸۰۰۰۰ \approx ۸/۲$ و $\log ۲۶۸۶۰۶ \approx ۵/۴$

با استفاده از خاصیت لگاریتم داریم:

$$\log(۱۴۹۶۸۰۰۰۰ \times ۲۶۸۶۰۶) = \log ۱۴۹۶۸۰۰۰۰ + \log ۲۶۸۶۰۶ \approx ۸/۲ + ۵/۴ = ۱۳/۶$$

پس: $\log(۱۴۹۶۸۰۰۰۰ \times ۲۶۸۶۰۶) \approx ۱۳/۶$

چون مبنای این لگاریتم ۱۰ بوده است، خواهیم داشت:

$$۱۴۹۶۸۰۰۰۰ \times ۲۶۸۶۰۶ \approx ۱۰^{۱۳/۶}$$

با استفاده از ماشین حساب داریم: $۱۰^{۱۳/۶} \approx ۳۹۸۱۰۷۱۷۰۵۵۳۴۹$.

بنابراین فاصله مورد نظر تقریباً ۳۹۸۱۰۷۱۷۰۵۵۳۴۹ کیلومتر است.

این شیوهٔ محاسبه را برای محاسبه حاصل‌ضرب هر دو عدد بزرگ یا کوچکی می‌توان به‌کار برد.

استفاده ازماشین حساب

با استفاده از ماشین حساب، $\log ۱۰۰ + \log ۱۰۰۰$ و $\log(۱۰۰+۱۰۰۰)$ را با تقریب تا دو رقم اعشار به‌دست آورید و در مربع علامت مساوی(=)یا نامساوی (≠) قرار دهید:

$$\log(۱۰۰+۱۰۰۰) \;\square\; \log ۱۰۰ + \log ۱۰۰۰$$

1 → 0 → 0 → log → + → 1 → 0 → 0 → 0 → log → =

1 → 1 → 0 → 0 → log → =

نکته

در حالت کلی: برای $a,b > ۰$ داریم: $\log(a+b) \neq \log a + \log b$

کار درکلاس ۴

۱ حاصل لگاریتم‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\log ۴ + \log ۲۵ =$

ب) $\log ۱۰۰\sqrt{۱۰} =$

پ) $\log \sqrt[۳]{۲۰} + \log \sqrt[۳]{۲} + \log \sqrt[۳]{۲۵} =$

۲ فاصلهٔ دورترین ستاره‌ای که با چشم غیر مسلح قابل رؤیت است از زمین، $۵۰۵۶۱۱۹۷۲۲ \times ۱۰^{۱۱}$ برابر فاصلهٔ زمین از خورشید است. فاصلهٔ این ستاره از زمین را با استفاده از ماشین حساب به دست آورید.

....

دیدیم که لگاریتم حاصل ضرب دو عدد مثبت با مجموع لگاریتم‌های آنها برابر است. در مورد لگاریتم تقسیم دو عدد، چه رابطه‌ای برقرار است؟ فعالیت زیر به بررسی این مطلب می‌پردازد.

فعالیت ۵

۱ جدول زیر را کامل کنید.

b	c	$\log b$	$\log c$	$\frac{b}{c}$	$\log \frac{b}{c}$
۱۰۰۰	۱۰	۳	....	۱۰۰	....
۱۰۰	۱۰	....	....	....	....
۰/۱	۱۰۰	۱-	....	$۱۰^{-۳}$	....
$۱۰۰\sqrt{۱۰}$	$۱۰\sqrt{۱۰}$	....	$\frac{۳}{۲}$	....	....
۱۰^{x}	۱۰^{y}	x	....	۱۰^{x-y}	....

۲ در هر سطر چه رابطه‌ای بین اعداد ستون‌های $\log b$ و $\log c$ و ستون $\log \frac{b}{c}$ وجود دارد؟ این رابطه را به‌صورت یک جمله بیان کنید و آن را با زبان ریاضی بنویسید.

فعالیت (۵) نشان می‌دهد که لگاریتم تقسیم دو عدد با لگاریتم مقسوم منهای لگاریتم مقسوم علیه برابر است، درحالت کلی داریم:

نکته

برای $b,c > ۰$ داریم: $\log \frac{b}{c} = \log b - \log c$

این خاصیت، برای لگاریتم‌هایی که مبنای غیر از ۱۰ دارند نیز برقرار است.

مثال ۸

الف) با توجه به $\log ۵ \approx ۰/۷$ و $\log ۲۰ \approx ۱/۳$ مقدار تقریبی $\log ۴$ را به دست می‌آوریم:

$$\log ۴ = \log \frac{۲۰}{۵} = \log ۲۰ - \log ۵ \approx ۰/۶$$

ب) $\log \frac{۱}{۱۰۰} = \log ۱ - \log ۱۰۰ = ۰ - ۲ = -۲$

استفاده ازماشین حساب

با استفاده از ماشین حساب، (log۸ − log۲) و log (۸-۲) را با تقریب دو رقم اعشار به دست آورید و در مربع، علامت مناسب مساوی (=) یا نامساوی (≠) قرار دهید.

log(۸-۲) $\square$ log۸-log۲

8 → log → − → 2 → log → =

6 → log → =

نکته

در حالت کلی: برای $a,b > ۰$ داریم: $\log(a-b) \neq \log a - \log b$

کار در کلاس ۵

۱ حاصل لگاریتم‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log ۲۰ - \log ۲ =$

ب) $\log ۰/۰۰۱ = \log \frac{۱}{۱۰۰۰} = \cdots$

۲ با تکمیل نقطه چین‌ها، نتیجهٔ فعالیت (۵) را با استفاده از خاصیت لگاریتم ضرب دو عدد به دست آورید (b و $c > ۰$).

$$\log(b) = \log(\frac{bc}{c}) = \log(\frac{b}{c} \times \ldots) = \log(\frac{b}{c}) + \ldots$$

بنابراین:

$$\log(\frac{b}{c}) = \cdots - \cdots$$

از رابطهٔ $(a^m)^n = a^{mn}$ می‌توان استفاده کرد و خاصیت دیگری از لگاریتم را به دست آورد.

فعالیت ۶

۱ جدول زیر را تکمیل کنید.

b	n	b^n	$\log b$	$\log b^n$
۱۰	۵	....	....	....
۱۰۰	۲	....	۲	....
۰/۱	۳	....	۱-	....
$\sqrt{۱۰}$	۴	....	....	....
۱۰^x	n	$(۱۰^x)^n = ۱۰^{nx}$	x	....

۲ در هر سطر، چه رابطه‌ای بین اعداد ستون‌های n و $\log b$ و عدد ستون $\log b^n$ وجود دارد؟ این رابطه را به‌صورت یک جمله بیان کنید و آن را با زبان ریاضی بنویسید.

....

فعالیت بالا نشان می‌دهدکه لگاریتم b^n برابر است با n برابر لگاریتم b. درحالت کلی داریم:

نکته

برای $b>0$ و هر عدد حقیقی x داریم: $\log b^x = x\log b$

ویژگی بالا برای لگاریتم‌هایی که مبنای غیر از ۱۰ دارند نیز برقرار است.

مثال ۹

به کمک خواص لگاریتم، عبارت‌های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید و در صورت امکان ساده کنید $(a\,,\,b\,,\,c>0)$:

الف) $3\log\sqrt[3]{5}+2\log\sqrt{2}=\log(\sqrt[3]{5})^3+\log(\sqrt{2})^2=\log 5+\log 2=\log(5\times 2)=\log 10=1$

ب) $\frac{1}{2}\log a+2\log b-5\log c=\log a^{\frac{1}{2}}+\log b^2-\log c^5=\log\frac{\sqrt{a}b^2}{c^5}$

مثال ۱۰

عبارت‌های زیر را به صورت مجموع یا تفاضل چند لگاریتم بنویسید و در صورت امکان ساده کنید $(x\,,\,y\,,\,z>0)$:

الف) $\log(5^6\times 10^3)=\log 5^6+\log 10^3=6\log 5+3$

ب) $\log\frac{10x^2y^5}{z^4}=\log 10+\log x^2+\log y^5-\log z^4=1+2\log x+5\log y-4\log z$

کار در کلاس ۶

۱ حاصل لگاریتم‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log 200^5-\log 2^5=$

ب) $\log 12+2\log 2-\frac{1}{2}\log 36+\log 125=$

۲ عبارت‌های زیر را به‌صورت یک لگاریتم بنویسید ($b,c,x>0$).

الف) $4\log 6+5\log b-\frac{1}{2}\log c=$

ب) $\log x^2-\log x=$

اکنون که با مفهوم لگاریتم و برخی از خواص آن آشنا شده‌اید به سؤال صفحه بعد که توسط یکی از هنرجویان مطرح شده است دقت کنید:

گفتگو

مریم گفت: در ماشین حساب‌ها معمولاً کلید لگاریتم در مبنای ۱۰ وجود دارد. آیا راهی وجود دارد که لگاریتم در مبنای غیر از ۱۰ را نیز با استفاده از این ماشین حساب‌ها به‌دست آورد؟

دبیر گفت: در پدیده‌های واقعی معمولاً لازم است لگاریتم اعداد در مبنای غیر از ۱۰ را به‌دست آوریم، محاسبهٔ لگاریتم این اعداد بدون استفاده از ماشین حساب کار ساده‌ای نیست.

مریم گفت: آیا راهی برای محاسبهٔ مقدار این لگاریتم با استفاده از ماشین حساب وجود دارد؟

دبیر گفت: با انجام فعالیت زیر با خاصیت دیگری از لگاریتم آشنا خواهید شد، برای محاسبهٔ لگاریتم اعداد در هر مبنا به‌کمک ماشین حساب از این خاصیت می‌توان استفاده کرد.

فعالیت ۷

۱ جدول زیر را کامل کنید.

b	a	$\log b$	$\log a$	$\frac{\log b}{\log a}$	$\log_a b$
۱۰۰	۱۰	....	....	....	۲
۱۰	۱۰۰	....	۲	....	$\frac{۱}{۲}$
$\sqrt{۱۰}$	۱۰	....	۱	....	....
۱۰۰۰	۱۰۰	....	....	....	$\frac{۳}{۲}$

۲ با مقایسهٔ اعداد دو ستون آخر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ چه رابطه‌ای بین $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$ وجود دارد؟

....

فعالیت (۷) نشان می‌دهد که لگاریتم یک عدد در مبنای غیر از ۱۰ را می‌توان به‌صورت تقسیم لگاریتم دو عدد در مبنای ۱۰ نوشت، در حالت کلی داریم:

نکته

برای $a,b > ۰$ و $a \neq ۱$ داریم: $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$

با استفاده از خاصیت بالا، محاسبهٔ لگاریتم اعداد در هر مبنایی با استفاده از ماشین حساب‌هایی که فقط قابلیت محاسبهٔ لگاریتم در مبنای ۱۰ را دارند، امکان‌پذیر می‌باشد.

مثال ۱۱

برای محاسبهٔ $\log_{۳} ۵$ به کمک ماشین حساب داریم: $\log ۵ \approx ۰/۷$ و $\log ۳ \approx ۰/۴۷$ بنابراین :

$$\log_{۳} ۵ = \frac{\log ۵}{\log ۳} \approx \frac{۰/۷}{۰/۴۷} \approx ۱/۴۸$$

استفاده ازماشین حساب

با استفاده از ماشین حساب حاصل $\log_{۵} ۸$ را به دست آورید:

8 → log → ÷ → 5 → log → =

کار درکلاس ۷

حاصل هر کدام از قسمت‌های زیر را به‌صورت یک لگاریتم بنویسید.

الف) $\dfrac{\log ۴}{\log ۳}$

ب) $۲ + \log_{۵} ۳$

مسائل

۱ عبارت‌های زیر را به‌صورت یک لگاریتم بنویسید و در صورت امکان ساده کنید.

الف) $\log\sqrt{۵}+\log\sqrt{۲}=\cdots$

ب) $\log ۴۰۰۰-\log ۴=\cdots$

پ) $۲\log ۵۰+۲\log ۲=\cdots$

ت) $۵\log x-\log y=\cdots$

ث) $۳\log a+۲\log b-\log z-\log a^{۲}+\log ۴=\cdots$

ج) $۴+\log_{۴} ۳$

چ) $۴-\log_{۳} ۵$

۲ اگر $\log ۲\approx ۰/۳۰۱$ و $\log ۳\approx ۰/۴۷۷$ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log ۴$ ب) $\log ۶$ پ) $\log ۱۸$ ت) $\log\frac{۲}{۳}$ ث) $\log ۵$ ج) $\log ۴۵$

۳ درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\frac{\log ۱۰}{\log ۱۰۰}=\frac{۱}{۱۰}$ ب) $\log ۱۰۰+\log ۰/۰۱=۰$ پ) $(\log ۱۰۰۰)^{۲}=\log ۱۰۰۰^{۲}$

۴ الف) با استفاده از ماشین حساب، تقریب اعشاری اعداد $\log ۲۰$ و $\log ۳۰$ و $\log ۶۰۰$ را تا دو رقم اعشار به دست آورید. آیا تساوی $\log(۲۰\times ۳۰)=\log ۲۰\times\log ۳۰$ برقرار است؟

ب) به کمک قسمت (الف) درمربع علامت مناسب $\neq$ یا $=$ را قرار دهید:

برای اعداد مثبت a و b در حالت کلی داریم: «$\log(a\times b)\ \square\ \log a\times\log b$»

۵ باکتری‌هایی را در نظر بگیرید که وزن آنها پس از ۱ واحد زمانی ۲ برابر می‌شود. با استفاده از ماشین حساب تعیین کنید پس از چند واحد زمانی وزن این باکتری‌ها ۲۰ گرم خواهد شد؟