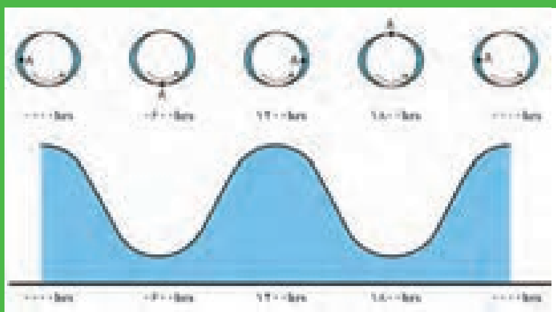
پودمان اول

کاربرد برخی تابع‌ها در زندگی روزمره



مطالعهٔ پدیده‌های دوره‌ای به‌دلیل تأثیر زیاد آنها در زندگی روزمره از اهمیت زیادی برخوردار است. مدل‌سازی این‌گونه پدیده‌ها به کمک تابع‌های مثلثاتی انجام می‌شود. طلوع و غروب خورشید، تغییر فصل‌ها، جزر و مد، حرکت چرخ و فلک و تغییر ارتفاع یک سرنشین آن، نمونه‌هایی از این پدیده‌ها می‌باشد.

بررسی جزر و مد و تغییرات ناشی از آن از مؤلفه‌های اصلی مطالعهٔ الگوی نوسانات تراز آب، تغییرات خط ساحلی، آب گرفتگی سواحل و مدیریت نوار ساحلی می‌باشد. امروزه با احداث نیروگاه‌های جزر و مدی در برخی از نقاط، از انرژی جزر و مد برای تولید برق استفاده می‌شود این انرژی حاصل نیروهای جاذبهٔ ماه و خورشید و از انرژی‌های تجدیدپذیر می‌باشد.

۱ــ تابع‌های چندضابطه‌ای

احمد می‌دانست هزینهٔ گاز مصرفی خانه، تابعی از میزان مصرف گاز است. او می‌خواست قانون این تابع را به‌دست آورد، اما با مشکلی روبه‌رو شد که در کلاس آن را مطرح کرد.

احمد گفت: من فکر می‌کردم که هزینهٔ مصرف گاز تابعی از میزان مصرف گاز است. اما شنیدم که دولت برای صرفه‌جویی در مصرف آب، برق و گاز، هزینهٔ مصرف آن را با یک قانون ثابت اندازه‌گیری نمی‌کند. مثلاً، تا یک میزان از مصرف گاز، آن را مجانی حساب می‌کند و تا یک میزان دیگر از مصرف، آن را با تعرفه کم حساب می‌کند و مصارف بالا را با تعرفه‌های زیاد حساب می‌کند. وقتی قانون ثابتی برای محاسبهٔ هزینهٔ گاز نباشد، آیا باز هم می‌توانیم بگوییم هزینهٔ گاز، تابعی از میزان مصرف گاز است؟

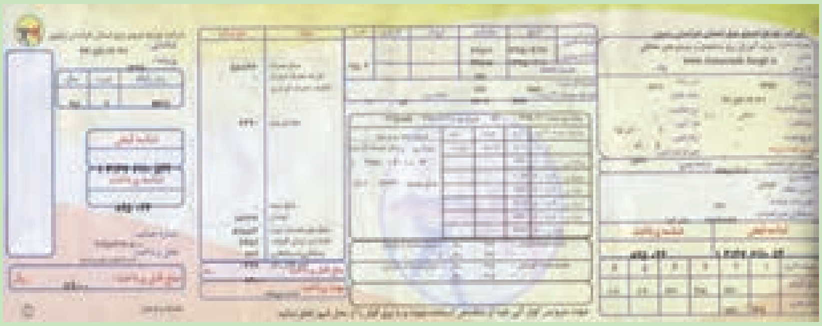
دبیر گفت: آیا با مشخص شدن میزان مصرف گاز، می‌توان هزینهٔ گاز را به‌طور مشخص به‌دست آورد؟

احمد گفت: حتماً می‌توان این کار را کرد، چون دولت هزینهٔ مصرف گاز را حساب می‌کند و قبض آن را به خانه‌ها می‌فرستد. پس، هزینهٔ گاز، تابعی از میزان مصرف گاز است. اما برای محاسبهٔ هزینهٔ گاز، قانون یکسانی را نمی‌توانیم به‌کار ببریم. آیا این موضوع مشکلی ایجاد می‌کند؟

دبیر گفت: خیر، قانون یک تابع به معنای مشخص بودن روش محاسبهٔ مقدار تابع است، نه اینکه حتماً فرمول ثابتی در کار باشد. ممکن است شیوهٔ محاسبهٔ مقدار تابع برای مقادیر مختلف فرق کند. فعالیت صفحهٔ بعد کمک می‌کند که شیوهٔ محاسبهٔ مقدار تابع هزینهٔ برق را مشخص کنید.

فعالیت ۱

واحد مصرف برق کیلو وات ساعت[۱] است. یکی از مهندسان شرکت برق برای هدفمندکردن الگوی مصرف برق، طرحی پیشنهاد کرد. براساس این طرح، مصرف کمتر از ۱۰ کیلو وات ساعت در ماه مجانی است و برای مصارف از ۱۰ تا کمتر از ۱۰۰ کیلو وات ساعت، به ازای هر کیلو وات ساعت ۵۰ تومان هزینه حساب می‌شود. همچنین برای مصارف از ۱۰۰ تا ۵۰۰ کیلو وات ساعت، به ازای هر کیلو وات ساعت ۱۲۰ تومان محاسبه می‌گردد و بیشتر از ۵۰۰ کیلو وات ساعت برق منزل قطع می‌شود.



۱ فرض کنید f، تابعی باشد که طبق قانون آن هزینهٔ مصرفی براساس این طرح محاسبه می‌شود. دامنهٔ این تابع را مشخص کنید.

۲ جدول زیر را که رابطهٔ بین برخی از مقادیر میزان مصرف برق و هزینهٔ آن را نشان می‌دهد، کامل کنید.

مصرف برق در ماه (کیلو وات ساعت)	۰	۵	۱۰	۷۰	۱۰۰	۲۰۰	۵۰۰
هزینهٔ برق مصرفی (تومان)	۰				۱۲۰۰۰		

۳ اگر میزان مصرف برق در یک ماه را با x نشان دهیم، در هر یک از حالت‌های زیر، قانون (یا ضابطهٔ) $f(x)$ را مشخص کنید.

الف) $۰ \leq x < ۱۰$

ب) $۱۰ \leq x < ۱۰۰$

پ) $۱۰۰ \leq x \leq ۵۰۰$

۴ $f(۳۷)$ و $f(۱۲۰)$ هر یک چه معنایی دارند؟ مقادیر آنها را بیابید.

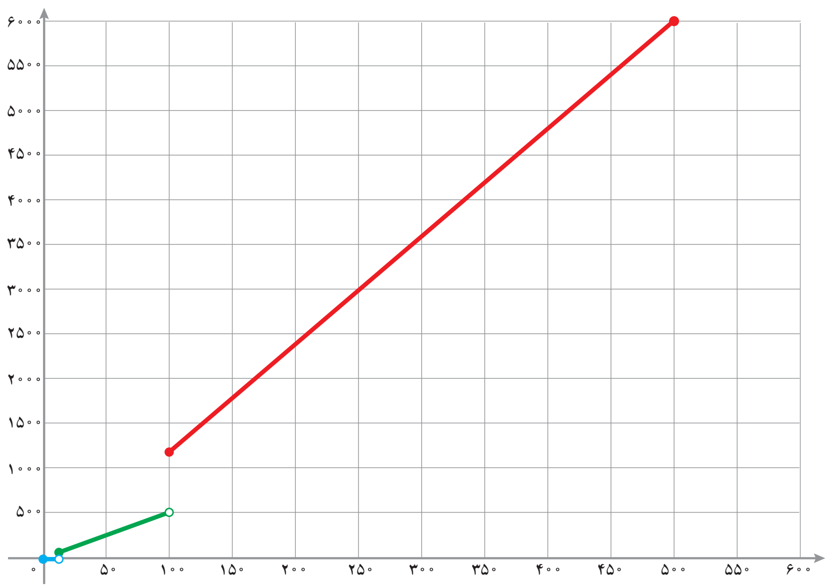
۱ـ یک کیلو وات‌ساعت (kwh) در واقع مقدارمصرف یک وسیلهٔ برقی ۱۰۰۰ واتی در مدت زمان یک ساعت است. برای مثال، اگر ۱۰ عدد لامپ ۱۰۰ وات را به مدت یک ساعت روشن کنیم، یک کیلو وات ساعت برق مصرف کرده‌ایم.

در این فعالیت تابعی را بررسی کردیم که روی بازه‌های مختلف، قانون‌های مختلفی داشت. برای یافتن مقدار این تابع در یک نقطه، ابتدا باید مشخص شود که آن نقطه در چه بازه‌ای قرار دارد. برای رسم نمودار این تابع باید نمودار آن را در بازه‌های مختلف با توجه به قانون آن بازه رسم کنیم و این نمودارها را با هم در نظر بگیریم.

اگر دامنهٔ تابعی از چند بازهٔ جدا از هم تشکیل شده باشد و روی هر کدام از این بازه‌ها قانون جداگانه‌ای استفاده شده باشد، برای نوشتن قانون این تابع، هر کدام از این بازه‌ها را جداگانه می‌نویسیم و قانون تابع در آن بازه را روبه‌روی آن می‌نویسیم. برای مثال قانون تابع f در فعالیت (۱) را به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & 0\leq x<10 \\ 50x & 10\leq x<100 \\ 120x & 100\leq x\leq 500 \end{cases}$$

این شیوهٔ تعریف، نشان می‌دهد که به ازای هر مقدار x در بازهٔ $[0,500]$ مقدار تابع در x تعریف می‌شود. پس، دامنهٔ این تابع بازهٔ $[0,500]$ است. نمودار این تابع به شکل زیر است:



تابعی که مانند تابع فعالیت بالا باشد، **تابع چندضابطه‌ای** می‌نامند، زیرا ضابطه یا قانون آن در بازه‌های مختلف، متفاوت است.

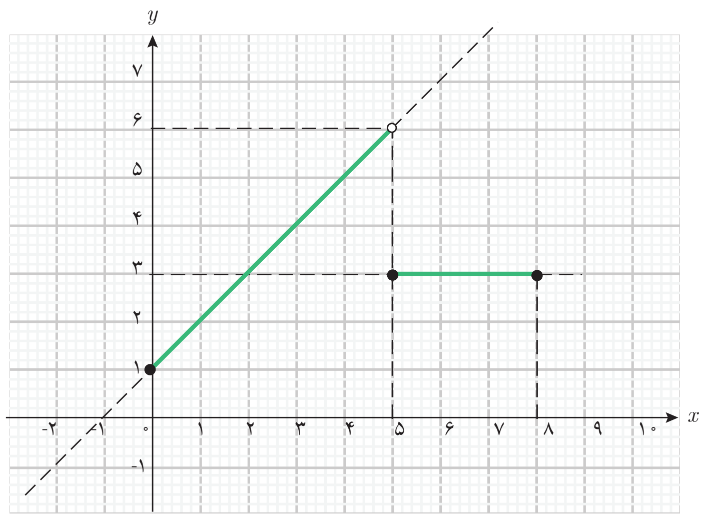
برای رسم نمودار تابع‌های چند ضابطه‌ای، نمودار آنها را در بازه‌های مشخص‌شده رسم می‌کنیم و نمودارهای به‌دست آمده را هم‌زمان با هم در نظر می‌گیریم.

مثال ۱

تابع g با دامنهٔ $[0,8]$ را به‌صورت زیر درنظر بگیرید و نمودار آن را رسم کنید.

$$g(x)=\begin{cases} x+1 & 0\leq x<5 \\ 3 & 5\leq x\leq 8 \end{cases}$$

ابتدا نمودار تابع $x+1$ را در دامنهٔ $\mathbb{R}$ رسم می‌کنیم، سپس قسمتی از آن را که در بازهٔ $[0,5)$ قرار دارد، در نظر می‌گیریم. همچنین نمودار تابع $g(x)=3$ (تابع ثابت) را در دامنهٔ $\mathbb{R}$ رسم می‌کنیم و قسمتی از آن را که در بازهٔ $[5,8]$ قرار دارد، در نظر می‌گیریم.

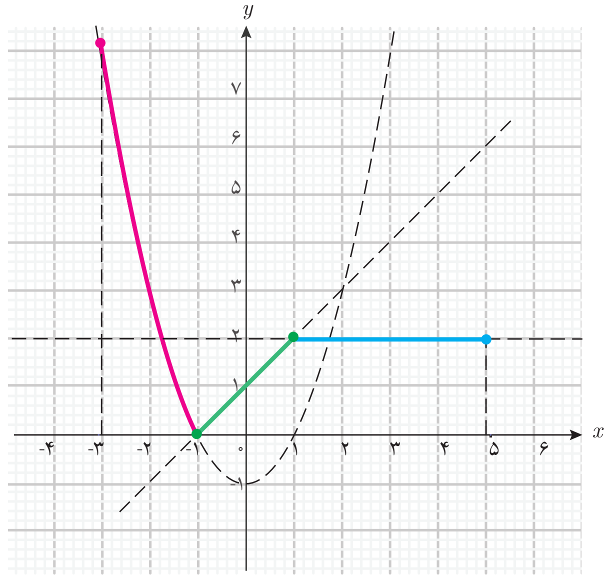


مثال ۲

تابع f با دامنهٔ $[-3,5]$ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید و نمودار آن را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & -3\leq x<-1 \\ x+1 & -1\leq x\leq 1 \\ 2 & 1<x\leq 5 \end{cases}$$

در بازه $[-3,-1)$، قانون تابع به‌صورت $f(x)=x^2-1$ است. نمودار آن را در این بازه رسم می‌کنیم، برای

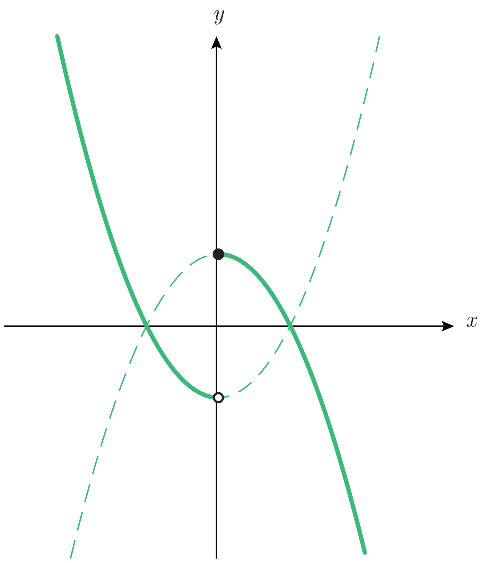


این منظور می‌توان نمودار تابع $y=x^{۲}$ را در $\mathbb{R}$ رسم کرد، یک واحد به پایین انتقال داد و سپس بخشی از نمودار را که در بازهٔ $[-۳,-۱)$ است در نظر گرفت. در بازهٔ $[-۱,۱]$، قانون تابع، به‌صورت $f(x)=x+۱$ است و نمودار آن، قسمتی از یک خط است که آن را در این بازه رسم می‌کنیم. در بازهٔ $(۱,۵]$، قانون تابع به‌صورت $f(x)=۲$ (تابع ثابت) است. نمودار آن را در این بازه رسم می‌کنیم. برای یافتن نقاط ابتدایی و انتهایی نمودار می‌توان مقدار تابع را در این نقاط محاسبه کرد.

مثال ۳

نمودار تابع چند ضابطه‌ای زیر را رسم کنید.

$$g(x)=\begin{cases} x^{۲}-۱ & x<۰ \\ -x^{۲}+۱ & ۰\leq x \end{cases}$$



دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ است. قانون این تابع، روی بازهٔ $(-\infty,۰)$ به‌صورت $g(x)=x^{۲}-۱$ است. نمودار آن را در این بازه رسم می‌کنیم. قانون این تابع، روی بازه $[۰,+\infty)$ به‌صورت $g(x)=-x^{۲}+۱$ است.نمودار آن را در این بازه رسم می‌کنیم.

کار در کلاس ۱

۱ تابع با قانون $f(x)=\begin{cases} x+۱ & -۲\leq x<۱ \\ ۳ & ۱\leq x<۴ \\ -x+۲ & ۴\leq x\leq ۷ \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) دامنهٔ تابع f را بنویسید.

ب) مقادیر $f(-۱)$، $f(۱)$، $f(۲)$، $f(۴)$ و $f(۵)$ را تعیین کنید.

پ) نمودار f را رسم کنید.

۲ فرض کنید در محاسبهٔ هزینهٔ گاز مصرفی خانگی، طبق دستورالعمل زیر عمل شود. دامنه و قانون تابعی که هزینهٔ گاز مصرفی را بیان می‌کند، به‌دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.


پرداخت گردید

۱ـ مصرف حداکثر تا حجم ۵ متر مکعب، مجانی است.

۲ـ مصرف حداکثر تا ۵۰ متر مکعب، ۵ مترمکعب آن مجانی و بقیه هر مترمکعب ۲۰۰ تومان است.

۳ـ مصرف حداکثر تا ۱۰۰ متر مکعب، تا ۵۰ متر مکعب آن طبق قانون قبلی و بقیهٔ آن هر متر مکعب ۳۰۰ تومان است.

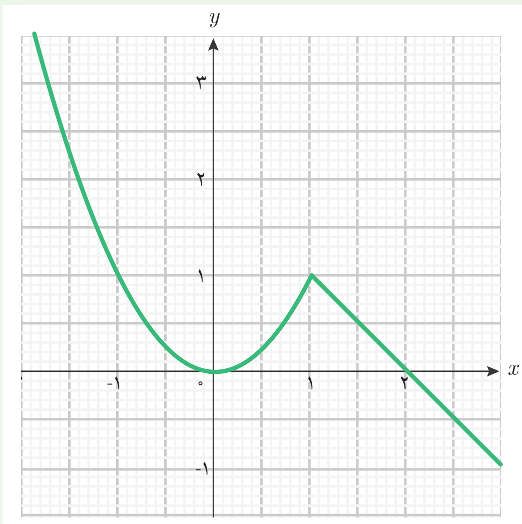
۴ـ مصرف بیش از ۱۰۰ متر مکعب، گاز قطع می‌شود.

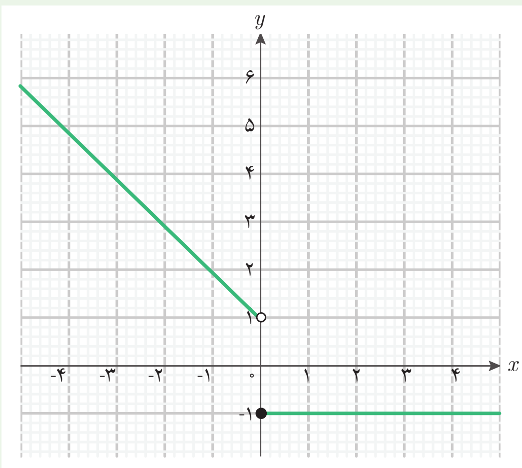
مسائل

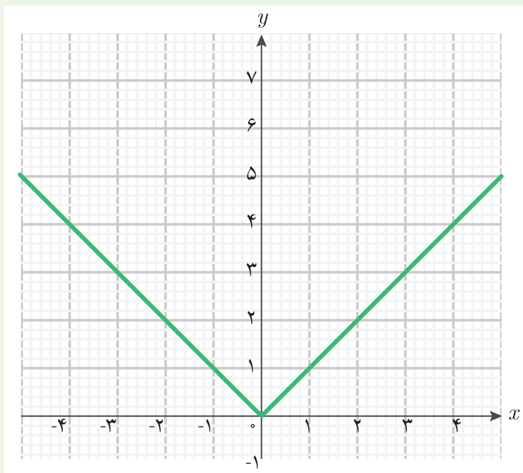
۱ در زیر چهار تابع و سه نمودار داده شده است. مشخص کنید که هر نمودار مربوط به کدام تابع است؟

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+x+۱ & x<۲ \\ -x+۱ & ۲\leq x \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} -x+۱ & x<۰ \\ -۱ & ۰\leq x \end{cases}$$

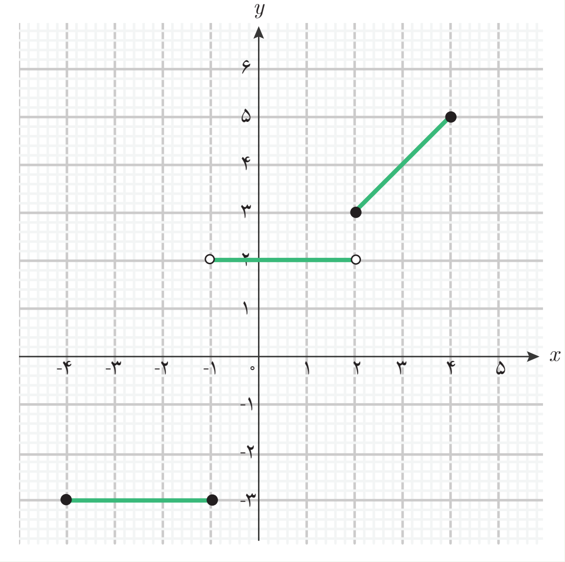
$$h(x)=\begin{cases} -x & x<۰ \\ x & ۰\leq x \end{cases} \qquad k(x)=\begin{cases} x^{۲} & x<۱ \\ -x+۲ & ۱\leq x \end{cases}$$







۲ نمودار زیر نمایش یک تابع چند ضابطه‌ای است. دامنه و قانون آن را بنویسید.



۳ تابع با قانون
$$g(x)=\begin{cases} -x^۲ & -۳\le x<۱ \\ -۲ & x=۱ \\ -x+۳ & ۱<x\le ۵ \end{cases}$$
را در نظر بگیرید.

الف) دامنهٔ تابع g را بنویسید.

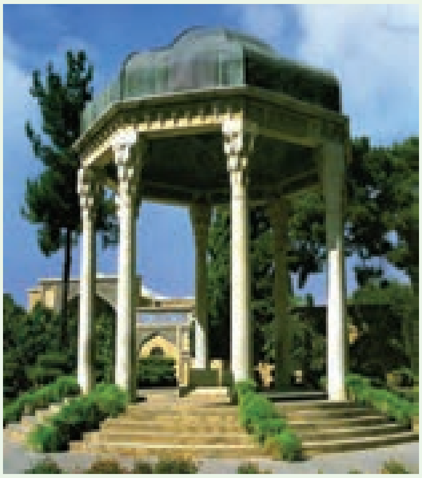
ب) مقادیر $g(-۲)$، $g(۱)$ و $g(۳)$ را به‌دست آورید.

پ) نمودار تابع g را رسم کنید.

۴ نمودار تابع چند ضابطه‌ای زیر را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲-۱ & x\le -۱ \\ ۱-x^۲ & -۱<x<۱ \\ x^۲-۱ & ۱\le x \end{cases}$$

۵ گردشگری در شیراز برای خرید چند کارت پستال به مغازه رفت و تصمیم گرفت از یک نوع کارت، تعدادی خریداری کند. از این نوع کارت، ۴۰ عدد موجود بود. این کارت‌ها طبق جدول زیر فروخته می‌شد.



خرید	هزینه
خرید حداکثر تا ۱۰ کارت	هر کارت ۳ هزار تومان
خرید بیش از ۱۰ کارت تا حداکثر ۲۰ کارت	۱۰ کارت اول مطابق قانون قبلی و مازاد بر ۱۰ کارت، هر کارت ۲ هزار تومان
خرید بیش از ۲۰ کارت	۲۰ کارت اول مطابق قانون قبلی و مازاد بر ۲۰ کارت، هر کارت ۱ هزار تومان

هزینهٔ پرداخت‌شده توسط گردشگر، تابعی از تعداد کارت‌های خریداری شده است.
اگر x تعداد کارت‌هایی باشد که این گردشگر خریداری می‌کند، دامنه و قانون این تابع را به‌دست آورید.

الف) نمودار آن را رسم کنید.

ب) هزینهٔ خرید ۱۴ کارت چقدر است؟

پ) هزینهٔ خرید ۲۳ کارت چقدر است؟

۶ برخی بیماران مبتلا به دیابت، برای کنترل قند خون، از انسولین استفاده می‌کنند. سه ساعت پس از دریافت دارو، تأثیر انسولین روی قند خون به حداکثر می‌رسد. پس از این زمان، این تأثیرگذاری تا پنج ساعت تقریباً ثابت می‌ماند، سپس کاهش پیدا می‌کند و تا هنگام نوبت تزریق بعدی ثابت می‌ماند.

سطح انسولین در یک بیمار را می‌توان با تابع زیر مدل‌سازی کرد. در اینجا، $f(t)$ نشان‌دهندهٔ سطح انسولین t ساعت پس از تزریق انسولین است.

$$f(t)=\begin{cases} ۴۰t+۱۰۰ & ۰\leq t\leq ۳ \\ ۲۲۰ & ۳<t\leq ۸ \\ -۸۰t+۸۶۰ & ۸<t\leq ۱۰ \\ ۶۰ & ۱۰<t\leq ۲۴ \end{cases}$$

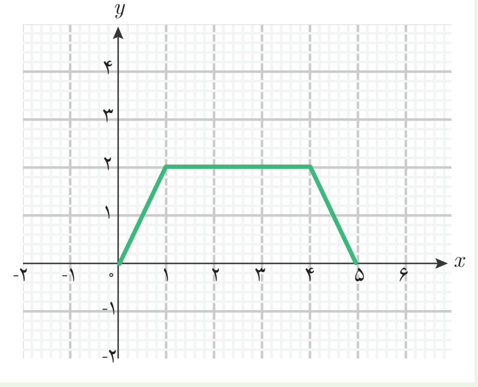
اگر بیمار، انسولین را در ساعت ۷ صبح دریافت کند، سطح انسولین خون او را در هر یک از زمان‌های زیر پیدا کنید.

الف) ۸ صبح — ب)۱۱ صبح

پ)۴ بعدازظهر — ت)۶ بعدازظهر

۷ تابعی دو ضابطه‌ای با دامنهٔ [۲,۲-] مثال بزنید که نمودار آن از دو پاره‌خط تشکیل شده باشد.

۸ وضعیتی در زندگی روزمره را به‌صورت تابعی سه ضابطه‌ای توصیف کنید که نمودار آن به‌صورت روبه‌رو باشد.



۹ دولت هزینهٔ مصرف برق خانگی مناطق مختلف کشور را متفاوت محاسبه می‌کند. با استفاده از اطلاعات منطقه‌ای از کشور که در آن زندگی می‌کنید، تابعی معرفی کنید که هزینهٔ مصرف برق برحسب میزان مصرف برق در ماه را درمنطقهٔ شما بیان کند. سپس نمودار آن را رسم کنید.

۲ــ تابع‌های مثلثاتی

مجید در فکر حرکت چرخ‌وفلک شهر بازی پارسال بود. او یاد گرفته بود که چگونه طول مسیر طی‌شده توسط یکی از کابین‌های چرخ‌وفلک را برحسب زاویهٔ چرخش محاسبه کند، اما می‌خواست بداند که چگونه می‌تواند ارتفاع کابین را در هر لحظه از سطح زمین محاسبه کند. او با خود گفت: وقتی زاویهٔ چرخش کابین مشخص باشد، موقعیت کابین کاملاً مشخص است؛ پس ارتفاع آن از سطح زمین نیز مشخص می‌شود. بنابراین می‌توان ارتفاع کابین را برحسب زاویهٔ چرخش به‌دست آورد.

مجید فکر خود را در کلاس درس ریاضی مطرح کرد و در مورد درستی آن پرسید.

دبیر گفت: بله، حتماً می‌توان ارتفاع کابین از سطح زمین را برحسب زاویهٔ چرخش کابین به‌دست آورد.

سعید گفت: در این صورت، آیا می‌توانیم نتیجه بگیریم، ارتفاع کابین از سطح زمین، تابعی از زاویهٔ چرخش آن است؟

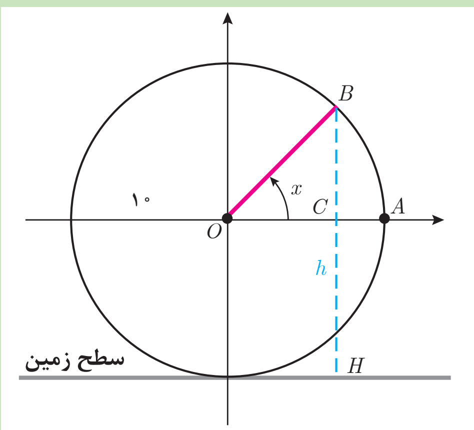
دبیر گفت: بله، اگر به تعریف تابع دقت کنیم، وقتی می‌گوییم کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) است، یعنی با مشخص‌شدن مقداری برای کمیت (الف)، مقدار کمیت (ب) نیز دقیقاً مشخص می‌شود. چون با مشخص شدن زاویهٔ چرخش کابین، ارتفاع آن نیز دقیقاً مشخص می‌شود، می‌توانیم بگوییم که ارتفاع کابین از سطح زمین تابعی از زاویهٔ چرخش آن است.

سعید گفت: ولی قانون این تابع و دامنهٔ آن چیست؟

دبیر گفت: برای به‌دست آوردن قانون این تابع، انجام فعالیت زیر می‌تواند به شما کمک کند.

فعالیت ۲

فرض کنید شعاع دایرهٔ چرخ‌وفلکی ۱۰ متر باشد. برای سادگی محاسبه، نقطهٔ شروع حرکت کابین را در ارتفاع ۱۰متری از سطح زمین طبق شکل روبه‌رو در نظر بگیرید (نقطه A). مقدار زاویهٔ چرخش برحسب رادیان را با x و ارتفاع کابین از سطح زمین برحسب متر را با h نشان دهید.

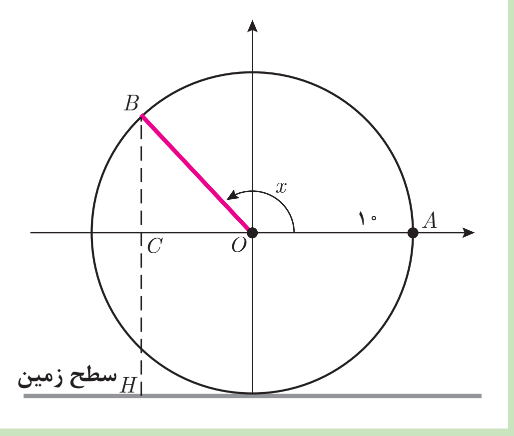


1 ارتفاع کابین را وقتی زاویهٔ چرخش صفر است، پیدا کنید.

2 در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCB طول پاره‌خط BC را برحسب $\sin x$ بنویسید.

3 قانون تابعی که h را برحسب زاویهٔ تند x بیان می‌کند، بنویسید.

4 یک زاویهٔ باز دلخواه مانند x در شکل زیر در نظر بگیرید و درستی رابطهٔ بین x و h را که در بند (۳) به‌دست آوردید، در این حالت بررسی کنید.



در فعالیت (۲) دیده می‌شود که ارتفاع کابین برحسب زاویهٔ چرخش، در حالتی که نقطهٔ متناظر زاویهٔ چرخش در ربع اول و دوم قرار داشته باشد، به‌صورت $h=۱۰+۱۰\sin x$ است. برای سایر زاویه‌های چرخش (ربع سوم و چهارم) نیز می‌توان نشان داد که این تساوی برقرار است.

اگر چرخ‌وفلک بیش از یک دور در جهت مثبت یا در جهت منفی بچرخد، باز هم رابطهٔ بین x و h به همین صورت برقرار است، زیرا نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه فقط به مکان نقطهٔ متناظر آن روی دایره بستگی دارد.

گفتگو

سعید گفت: پس، تابع با قانون $f(x)=۱۰+۱۰\sin x$، ارتفاع کابین چرخ و فلک را برحسب زاویهٔ چرخش آن به‌دست می‌دهد. اما دامنهٔ این تابع چیست؟

دبیر گفت: دامنهٔ این تابع بستگی به آن دارد که این کابین از شروع تا پایان حرکت چند دور می‌زند. برای مثال، اگر چرخ‌وفلک ۳ دور بزند، زاویه‌های چرخش (برحسب رادیان) از صفر تا $۳\times۲\pi$ خواهند بود و دامنهٔ این تابع، بازهٔ $[۰,۶\pi]$ است.

برای اشاره به تابع‌هایی که متغیر آنها زاویه است و در قانون آنها از نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه استفاده می‌شود، معمولاً از اصطلاح **تابع‌های مثلثاتی** استفاده می‌شود. طبق قرارداد، در تابع‌های مثلثاتی، متغیر (زاویه) همواره برحسب **رادیان** در نظر گرفته می‌شود.

مثال ۴

تابع مثلثاتی $f(x)=\sin x+\cos x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$، را در نظر بگیرید و مقادیر $f(۱)$ و $f(-۳)$ و $f(\frac{\pi}{۶})$ را به‌دست آورید.

مقادیر x برحسب رادیان هستند. در محاسبهٔ $f(۱)$ مقدار $x=۱$ نشان‌دهندهٔ زاویهٔ ۱ رادیان است. به کمک ماشین حساب نتیجه می‌شود:

$$f(۱)=\sin ۱+\cos ۱\approx ۱/۳۸$$

همچنین در محاسبهٔ $f(-۳)$ مقدار $x=-۳$ نشان‌دهندهٔ زاویهٔ ۳- رادیان است. به کمک ماشین حساب نتیجه می‌شود:

$$f(-۳)=\sin(-۳)+\cos(-۳)=-\sin(۳)+\cos(۳)\approx -۱/۱۳$$

برای محاسبهٔ $f(\frac{\pi}{۶})$ داریم:

$$f(\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۶}+\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}$$

کار در کلاس ۲

تابع $f(x)=۱۰+۱۰\sin x$ ارتفاع کابین چرخ‌وفلکی را برحسب زاویهٔ چرخش آن (x برحسب رادیان) نشان می‌دهد. این چرخ‌وفلک ۵ دور چرخیده است.

الف) دامنهٔ این تابع را بنویسید.

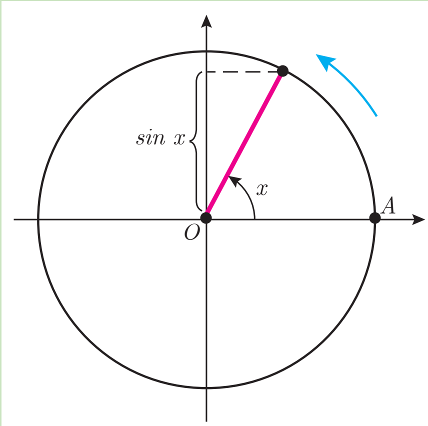
ب) $f(\frac{\pi}{۶})$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟ این مقدار را بیابید.

پ) به ازای چه زاویه‌هایی، کابین در پایین‌ترین نقطه قرار دارد؟

ت) $f(\frac{\pi}{۲})$ را بیابید. در این حالت، وضعیت کابین از لحاظ ارتفاع چگونه است؟

تابع با قانون $f(x)=\sin x$ یکی از ساده‌ترین تابع‌های مثلثاتی است. دامنهٔ این تابع می‌تواند هر بازه‌ای از اعداد حقیقی باشد، زیرا x زاویهٔ چرخش است و زاویهٔ چرخش، هر عدد حقیقی می‌تواند باشد. در فعالیت صفحهٔ بعد تغییرات مقادیر این تابع را در یک دامنهٔ داده شده، برحسب تغییرات متغیر x بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۳



متحرکی را روی نقطهٔ A از دایرهٔ مثلثاتی زیر در نظر بگیرید که دایره را یک دور طی می‌کند.

۱ جملات زیر را کامل کنید (زاویهٔ چرخش را برحسب رادیان در نظر بگیرید).

الف) اگر زاویهٔ چرخش این متحرک را با x نشان دهیم، x از ......تا ...... تغییر می‌کند.

ب) وقتی x از صفر تا $\frac{\pi}{۲}$ افزایش می‌یابد، $\sin x$ از .... تا .... (افزایش/ کاهش) می‌یابد.

پ) وقتی x از $\frac{\pi}{۲}$ تا π افزایش می‌یابد، $\sin x$ از .... تا .... (افزایش/ کاهش) می‌یابد.

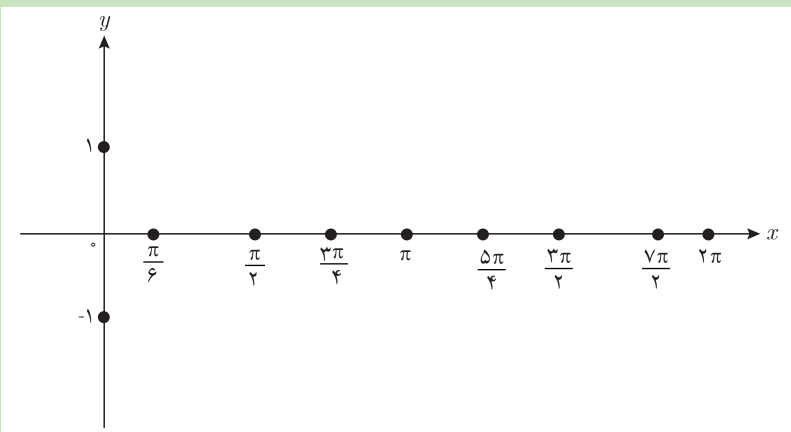
ت) وقتی x از π تا $\frac{۳\pi}{۲}$ افزایش می‌یابد، $\sin x$ از .... تا .... (افزایش/ کاهش) می‌یابد.

ث) وقتی x از $\frac{۳\pi}{۲}$ تا ۲π افزایش می‌یابد، $\sin x$ از .... تا .... (افزایش/ کاهش) می‌یابد.

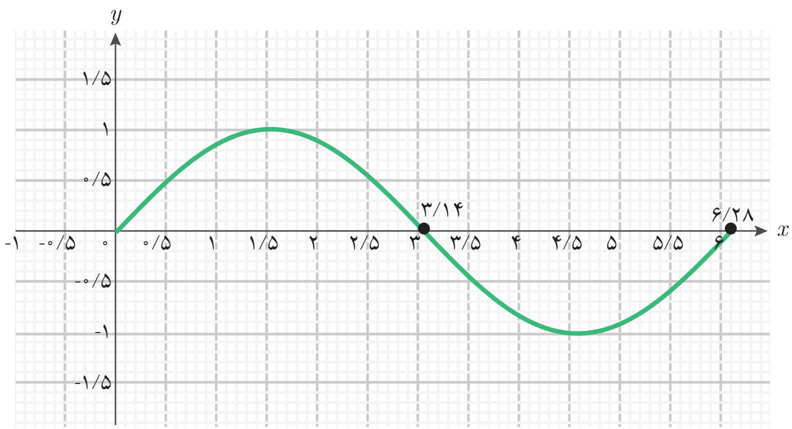
۲ با توجه به نتایج به‌دست آمده در بالا، جدول زیر را کامل کنید. افزایش یا کاهش مقادیر تابع را با فلش نمایش دهید (دو مورد در جدول مشخص شده است).

x	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	π	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۷\pi}{۴}$	۲π
$\sin x$		↗		↘					

۳ با مشخص‌کردن نقاط جدول در دستگاه مختصات زیر، نمودار تابع با قانون $f(x)=\sin x$ را در دامنهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌طور تقریبی رسم کنید.

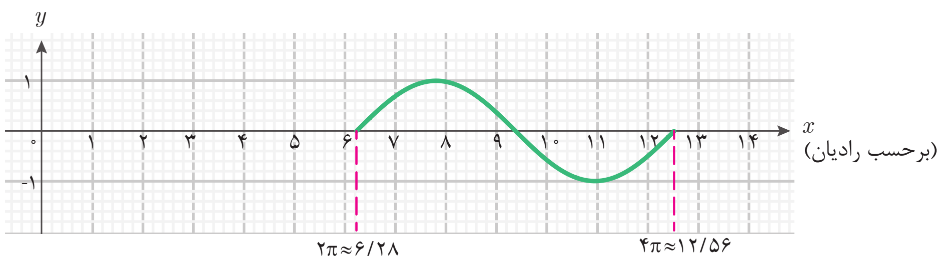


شکل زیر نمودار تابع $\sin x$ را با دامنهٔ [۰,۲π] نشان می‌دهد.

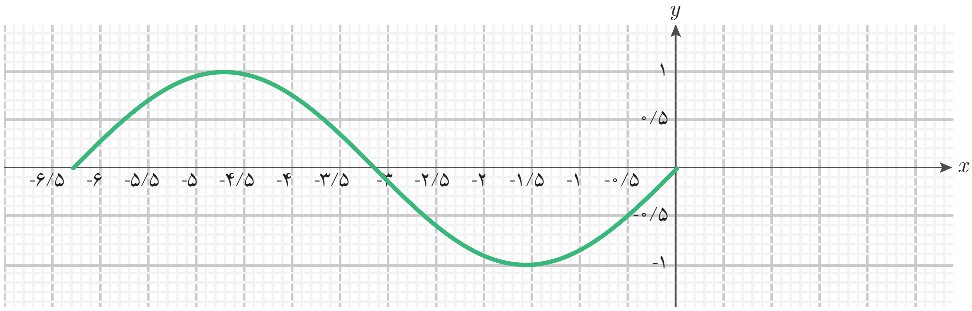


توجه داشته باشید که مقادیر x روی محور طول‌ها، اندازهٔ زاویه‌ها برحسب رادیان است. برای مثال، π **رادیان یعنی تقریباً ۳/۱۴ رادیان و ۲π رادیان تقریباً ۶/۲۸ رادیان** است؛ بنابراین دامنهٔ [۰,۲π] تقریباً همان [۰,۶/۲۸] است.

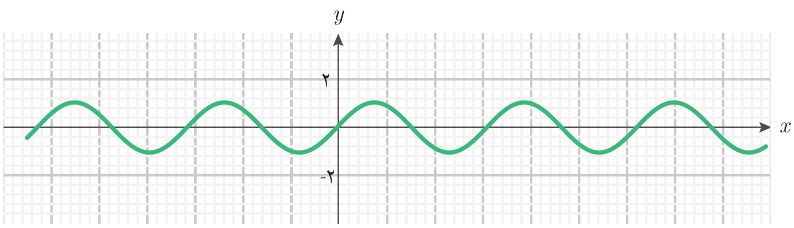
با ادامهٔ حرکت، پس از یک دور کامل روی دایرهٔ مثلثاتی، تغییرات سینوس زاویهٔ چرخش در بازهٔ [۲π,۴π]، همانند تغییرات آن در بازهٔ [۰,۲π] است. زیرا اگر به زاویه‌ای مضرب صحیحی از ۲π را اضافه یا از آن کم کنیم، نسبت‌های مثلثاتی آن تغییر نمی‌کنند. بنابراین، نمودار این تابع در بازه‌های دیگر، مانند ...، [۴π,۶π]، [۲π,۴π]، [۰,۲π-]، ...، مشابه نمودار این تابع در بازهٔ [۰,۲π] است. پس، برای رسم نمودار این تابع در بازه‌های دیگر، می‌توان نمودار بالا را به اندازهٔ مضارب صحیح ۶/۲۸≈۲π به چپ یا راست منتقل کرد. برای مثال، نمودار $f(x) = \sin x$ در بازهٔ [۲π,۴π] به‌صورت زیر است:



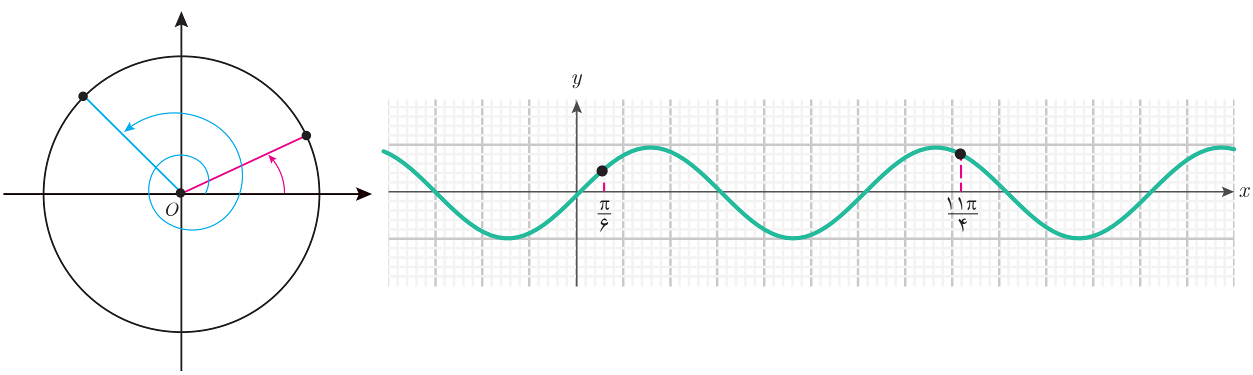
نمودار $f(x)=\sin x$ در بازهٔ [-۲π,۰] به‌صورت زیر است:



بنابراین، نمودار $f(x)=\sin x$ در $\mathbb{R}$ به‌صورت زیر است.



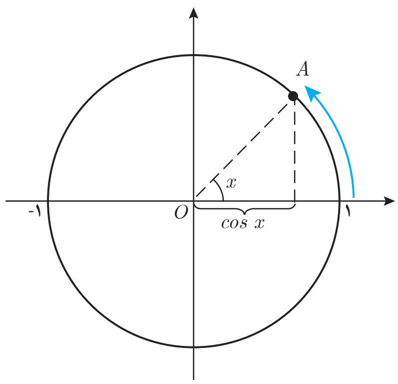
هر نقطه از نمودار بالا متناظر یک زاویهٔ چرخش روی دایرهٔ مثلثاتی است. برای مثال، در شکل زیر، دو زاویهٔ چرخش $\frac{\pi}{۶}$ و $\frac{۳\pi}{۴}+۲\pi$ با نقطهٔ متناظر آنها روی نمودار تابع $\sin x$ مشخص شده است.

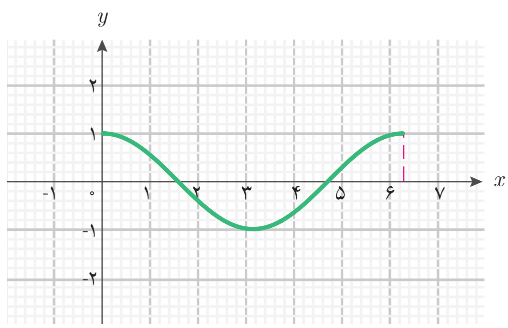


مثال ۵

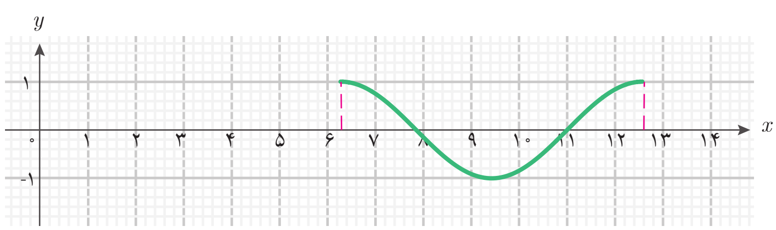
نمودار تابع $g(x)=\cos x$ را در دامنهٔ [۰,۲π] رسم کنید.

چگونگی تغییرات مقدار $\cos x$ برحسب x، مشابه تغییرات $\sin x$ برحسب x است.
با تغییر x از صفر تا π مشاهده می‌شود که مقدار $\cos x$ از ۱ تا ۱- کاهش می‌یابد. سپس، با تغییر x از π تا ۲π مقدار $\cos x$ از ۱- تا ۱ افزایش می‌یابد. شکل زیر، نمودار تابع $\cos x$ را در دامنهٔ [۰,۲π] نشان می‌دهد.

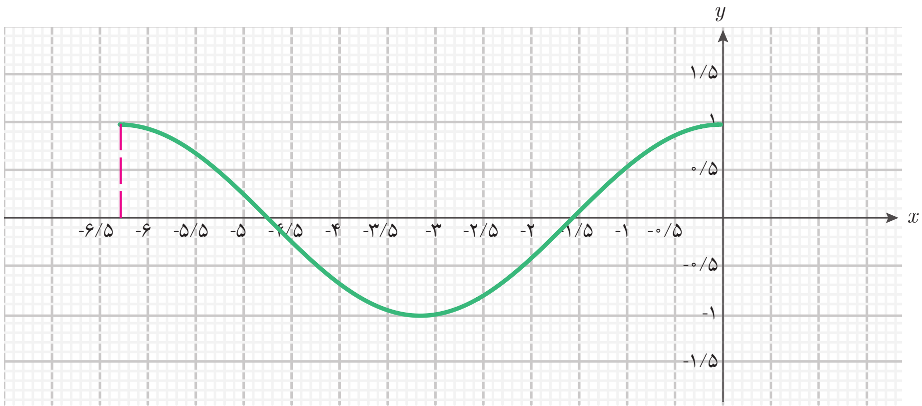




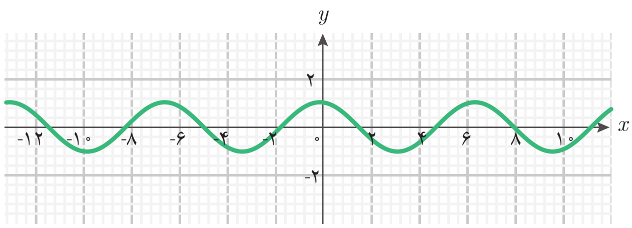
با افزایش مقادیر x (بیش از ۲πرادیان) و ادامهٔ حرکت نقطه A (پس از یک دور کامل روی دایره مثلثاتی)، مانند سینوس، تغییرات $\cos x$ در بازهٔ [۲π,۴π] مشابه تغییرات آن در بازه [۰,۲π] است. زیرا اگر به زاویه‌ای مضرب صحیحی از ۲π را اضافه یا از آن کم کنیم، نسبت‌های مثلثاتی آن تغییر نمی‌کنند. بنابراین، نمودار تابع $\cos x$ در بازه‌های دیگر، مانند ...، [۴π,۶π]، [۲π,۴π]، [۰,۲π-]، ...، همان انتقال یافتهٔ نمودار تابع $\cos x$ در بازه [۰,۲π] است. پس، برای رسم نمودار تابع $\cos x$ در بازه‌های دیگر، می‌توان نمودار این تابع در بازه [۰,۲π] را به اندازهٔ مضارب صحیح ۲π≈۶/۲۸ به چپ یا راست منتقل کرد.
برای مثال، نمودار $\cos x$ در بازه [۲π,۴π] به‌صورت زیر است:



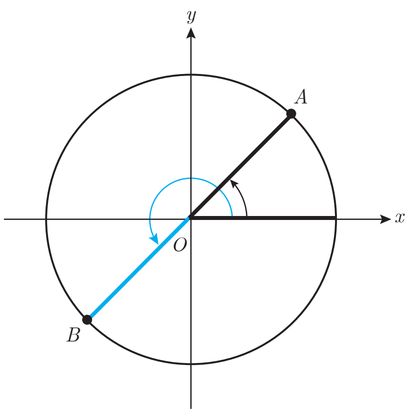
همچنین، نمودار $\cos x$ در بازهٔ $[-۲\pi,۰]$ به‌صورت زیر است:

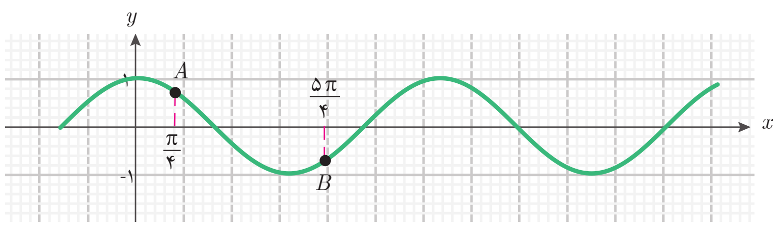


بنابراین، نمودار تابع $g(x) = \cos x$ در $\mathbb{R}$ به شکل زیر است:



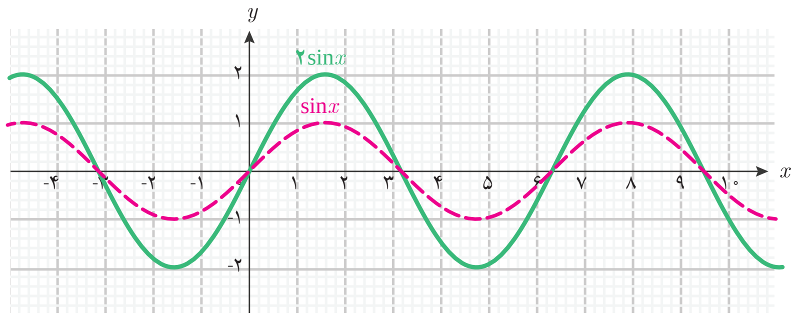
هر نقطه از این نمودار، متناظر یک زاویهٔ چرخش روی دایرهٔ مثلثاتی است. برای مثال، در شکل زیر دو زاویهٔ چرخش $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{۵\pi}{۴}$ با نقطهٔ متناظر آنها روی نمودار تابع $\cos x$ مشخص شده است.





مثال ۶

تابع مثلثاتی $h(x)=۲\sin x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. مقدار این تابع در نقطهٔ x با ضرب ۲ در $\sin x$ حاصل می‌شود. نمودار این تابع و تابع $\sin x$ با هم در شکل زیر رسم شده‌اند.

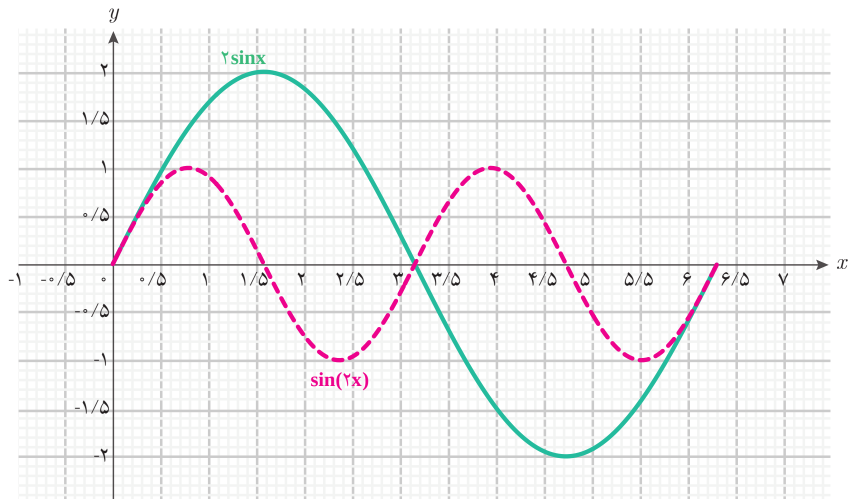


همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، عرض نقاط نمودار تابع $۲\sin x$ با ضرب ۲ در عرض نقاط نمودار تابع $\sin x$ به‌دست می‌آیند.

مثال ۷

تابع‌های $\sin(۲x)$ و $۲\sin x$ را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ رسم کنید و تفاوت آنها را توضیح دهید.

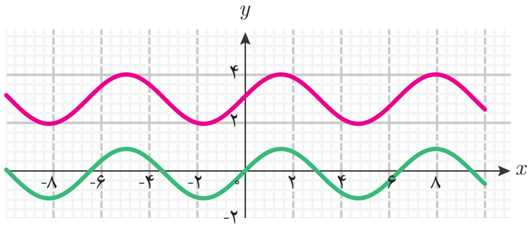
نمودار این دو تابع را در این بازه به کمک جئوجبرا رسم می‌کنیم.



همان‌طور که مشاهده می‌شود این دو تابع تفاوت‌های مهمی با هم دارند و با هم مساوی نیستند. مقادیر تابع $۲\sin x$ از ۲ تا ۲- تغییر می‌کنند ولی مقادیر تابع $\sin(۲x)$ از ۱ تا ۱- تغییر می‌کنند. در بازهٔ $[\pi,۲\pi]$ نمودار تابع $۲\sin x$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ تکرار نمی‌شود ولی نمودار تابع $\sin(۲x)$ تکرار می‌شود.

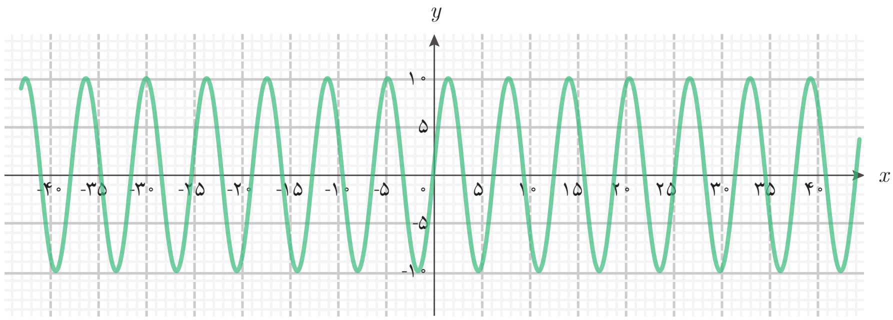
مثال ۸

تابع مثلثاتی $f(x)=3+\sin x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. برای رسم نمودار این تابع، ابتدا نمودار $\sin x$ را رسم می‌کنیم. سپس با انتقال این نمودار به اندازهٔ ۳ واحد به بالا نمودار تابع f به‌دست می‌آید.

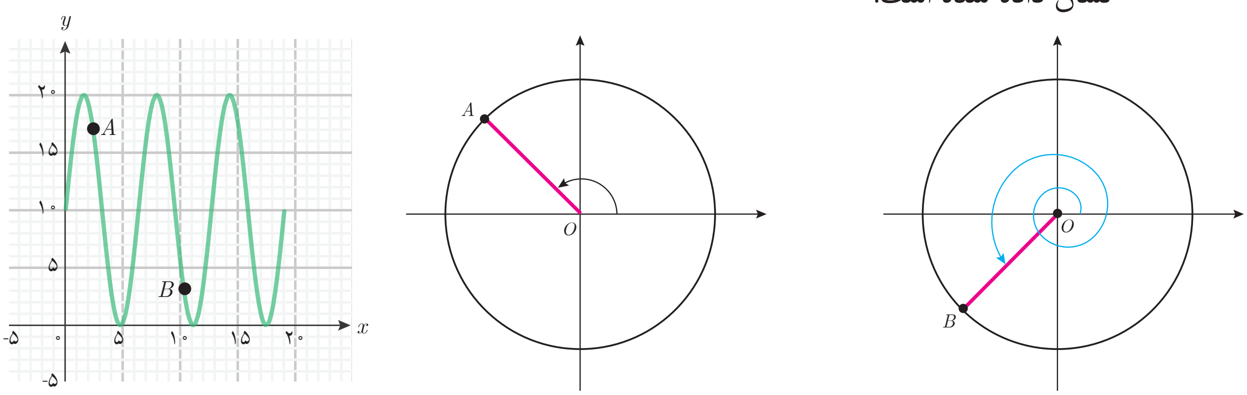


مثال ۹

تابع مثلثاتی $f(x)=10+10\sin x$ را که در فعالیت (۲) به‌دست آمده است، در نظر بگیرید. برای رسم نمودار این تابع، ابتدا نمودار $10\sin x$ را رسم می‌کنیم که به شکل زیر در می‌آید.

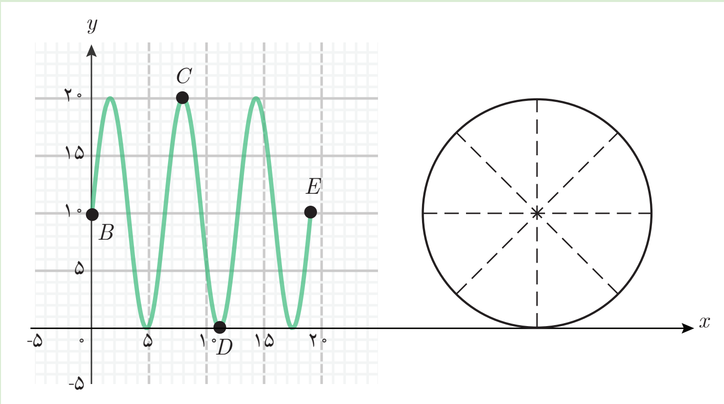


سپس، انتقال این نمودار به اندازهٔ ۱۰ واحد به بالا، نمودار تابع $f(x)=10+10\sin x$ را می‌سازد. نمودار این تابع با دامنهٔ $[0,6\pi]$ به شکل زیر است. نقاط متناظر در دو حالت از چرخ‌وفلک در نمودار نشان داده شده است.



کار در کلاس ۳

۱ نمودار تابع $f(x)=۱۰+۱۰\sin x$ را که در فعالیت (۲) به‌دست آمده است، با دامنهٔ $[۰,۶\pi]$ در نظر بگیرید.



الف) هر یک از نقاط B، C، D و E روی نمودار، متناظر کدام زاویهٔ چرخش است؟ مکان کابین روی چرخ‌وفلک را در هر کدام از این چهار نقطه مشخص کنید.

ب) نقطه‌ای را روی نمودار مشخص کنید که نشان می‌دهد کابین یک دور چرخیده است.

پ) به ازای چه مقادیری از زاویهٔ چرخش در دامنهٔ تابع، کابین در پایین‌ترین نقطه است؟

ت) به ازای چه مقادیری از زاویهٔ چرخش در دامنهٔ تابع، کابین در بالاترین نقطه است؟

۲ نمودارهای تابع‌های $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید.

الف) آیا می‌توان با انتقال یکی به چپ یا راست، دیگری را به‌دست آورد؟ مقدار این انتقال چقدر است؟

ب) چه شباهت‌هایی بین این دو نمودار می‌بینید؟

مسائل

۱ برای تابع $u(x)=۴\sin x-۳\cos x(۲x)$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$، مقادیر $u(۲)$ و $u(\frac{\pi}{۶})$ و $u(۳\pi)$ را به‌دست آورید. (در صورت نیاز از ماشین‌حساب استفاده کنید.)

۲ سه تابع $f(x)=۳\cos x$ و $g(x)=\cos x+۲$ و $h(x)=۳\cos x-۲$ را با دامنهٔ $[۰,۲\pi]$ در نظر بگیرید.

الف) نمودار هر یک از این تابع‌ها را به همراه نمودار تابع $\cos x$ در دامنهٔ $[۰,۲\pi]$ رسم کنید.

ب) با توجه به نمودارهای به‌دست آمده توضیح دهید که نمودار این تابع‌ها چگونه از روی نمودار تابع $\cos x$ به‌دست می‌آید.

۳ با رسم نمودارهای دو تابع $\sin(۲x)$ و $۲\sin x.\cos x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ (به کمک جئوجبرا) درستی تساوی $\sin(۲x)=۲\sin x.\cos x$ را بررسی کنید.

۴ به کمک نمودار تابع $f(x)=\cos x$ با دامنهٔ $[۰,۲\pi]$، جواب‌های معادلهٔ $\cos x=۰$ را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌دست آورید.

۵ دو تابع $f(x)=\cos x$ و $g(x)=\sin(x+\frac{\pi}{۲})$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. سه زاویهٔ دلخواه برای x در نظر بگیرید و درستی تساوی $f(x)=g(x)$ را بررسی کنید. به کمک رسم نمودار این دو تابع (با جئوجبرا) تحقیق کنید که آیا تساوی $f(x)=g(x)$ به ازای هر مقدار x برقرار است؟

۳ــ تابع نمایی

حسن در حال مشاهدهٔ یک برنامهٔ تلویزیونی با عنوان «میزگرد تغییرات جمعیت و تأثیر آن بر توسعهٔ پایدار» بود. سخنان یکی از شرکت‌کنندگان در میزگرد توجه او را جلب کرد. این شرکت‌کننده ضمن بیان تأثیر تغییرات جمعیت بر رشد و توسعهٔ اقتصادی، به تغییر جمعیت کشور در طی سال‌های ۱۳۹۰ تا ۱۳۹۵ اشاره کرد. او با پیش‌بینی میزان جمعیت در سال‌های آینده، پیشنهادهایی برای برنامه‌ریزی مناسب جهت ایجاد اشتغال، تأمین بهداشت و درمان عمومی و غیره مطرح می‌کرد.

حسن علاقه‌مند بود بداند که نحوهٔ پیش‌بینی مقدار جمعیت در سال‌های آینده به چه صورت است. مجری برنامه چند بار از مدل ریاضی رشد جمعیت صحبت کرده بود. او به خاطر آورد که دبیر ریاضی گفته بود: پدیده‌های طبیعی را می‌توان به کمک ریاضی مدل‌سازی کرد و آنها را مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. بنابراین تصمیم گرفت که سؤال خود را با دبیر ریاضی مطرح کند. دبیر با شنیدن سؤال حسن، ضمن ابراز خوشحالی از طرح این سؤال، گفت: برای نمایش تغییرات جمعیت در طول زمان از نوعی تابع استفاده می‌شود که در جلسات آینده به آن خواهیم پرداخت. او در روز مورد نظر فعالیت زیر را مطرح کرد.

فعالیت ۴

جمعیت یکی از شهرهای ایران در سال ۱۳۹۰ یک میلیون نفر بوده است و نرخ رشد سالانهٔ جمعیت آن شهر ۲ درصد است.

۱ جمعیت شهر در پایان اولین سال چند برابر خواهد شد؟

۲ در جدول مقابل در هر مستطیل، یک عدد توان‌دار مناسب قرار دهید که جمعیت شهر را در پایان هر سال برحسب میلیون نفر نشان بدهد.

۳ اگر $f(x)$ جمعیت شهر، در پایان سال x باشد و رشد سالانهٔ جمعیت این شهر تا ۲۰ سال با ۲ درصد ادامه یابد، ضابطه و دامنهٔ تابع f را بنویسید.

شمارهٔ سال	جمعیت برحسب میلیون نفر
۱	$\square$
۲	$(۱/۰۲)^۲$
۳	$\square$
۴	$\square$
$\vdots$	$\vdots$
x	$\square$
$\vdots$	$\vdots$
۲۰	$\square$

در فعالیت صفحهٔ قبل تغییرات جمعیت شهری را بررسی کردید که سالانه ۲ درصد افزایش جمعیت داشت. یعنی، جمعیت این شهر هر سال ۱/۰۲ برابر می‌شود. جمعیت این شهر از سال ۱۳۹۰ به بعد، پس از x سال به‌صورت تابع با قانون $f(x)=(۱/۰۲)^x$ (برحسب میلیون نفر) است. قانون این تابع برای ۲۰ سال و در پایان هر سال معتبر است، بنابراین دامنهٔ تابع، $\{۱,۲,...,۲۰\}$ است. قانون این تابع به‌صورت یک عبارت توان‌دار است که **متغیر در توان** آن است. این گونه تابع‌ها را **تابع نمایی** می‌نامند.

با توجه به اینکه در توان‌رسانی به توان اعداد حقیقی دلخواه، پایه همواره مثبت است و توان هر عددی می‌تواند باشد، بنابراین دامنهٔ یک تابع با قانون a^x, $(۰<a)$، می‌تواند هر زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد.

تعریف

تابع نمایی

برای یک عدد حقیقیِ مثبتِ a که $a\neq ۱$، تابع‌هایی با قانون $f(x)=a^x$ را که دامنهٔ آن می‌تواند هر زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد، **تابع نمایی با پایهٔ a** می‌نامند.

همچنین، تابع‌های با قانون $f(x)=ka^x$، $(k\neq ۰)$ نیز تابع نمایی نامیده می‌شوند.

مثال ۱۰

تابع $f(x)=۴^x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ یک تابع نمایی است. در این تابع داریم:

$$f(۲)=۴^۲=۱۶\ ,\ f(۰)=۴^۰=۱\ ,\ f(\frac{۱}{۲})=۴^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۴}=۲\ ,\ f(-۱)=۴^{-۱}=\frac{۱}{۴}$$

کار در کلاس ۴

تابع $f(x)=۵\times ۲^x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید، مقادیر زیر را به‌دست آورید و در صورت امکان ساده کنید.

الف) $f(۲)$ ب) $f(۰)$ پ) $f(-۱)$ ت) $f(\frac{۱}{۳})$

تابع‌های نمایی ویژگی‌های مشترک و رفتارهای خاصی دارند. برای آشنایی بیشتر با خواص و ویژگی‌های تابع‌های نمایی، فعالیت صفحه بعد را انجام دهید.

فعالیت ۳

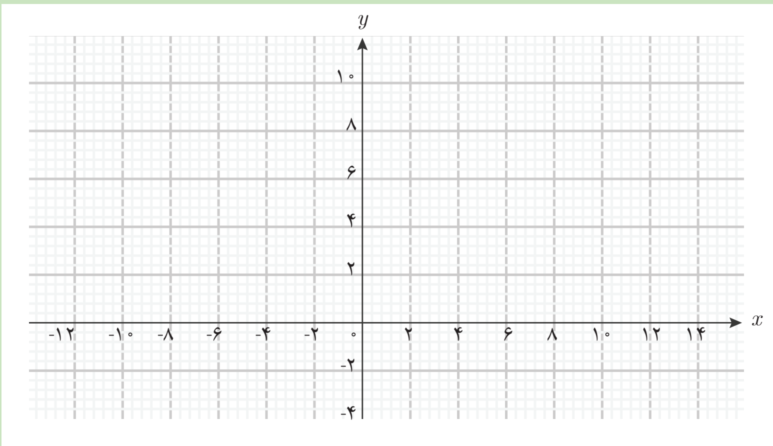
تابع $f(x)=۳^x$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید و سپس جدول زیر را کامل کنید.

x	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۲/۱
۳^x	...	...	...	۱	...	...	...

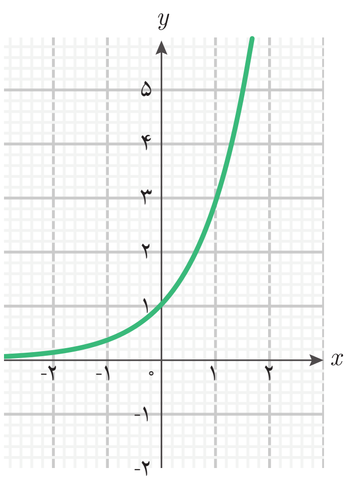
۱ با افزودن ۱ واحد به مقدار x، مقدار $f(x+۱)$ چند برابر $f(x)$ خواهد شد؟

۲ با افزایش مقدار x، مقدار تابع چه تغییری می‌کند (افزایش می‌یابد/ کاهش می‌یابد)؟

۳ نقاطی از نمودار تابع را که در جدول به‌دست آورده‌اید، در صفحهٔ مختصات زیر مشخص کنید و به کمک آنها نمودار تقریبی تابع را رسم کنید.



فعالیت بالا نشان می‌دهد تابع $f(x)=۳^x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ رفتاری افزایشی دارد، یعنی با افزایش مقدار x مقدار $f(x)$ نیز افزایش می‌یابد. میزان افزایش مقادیر تابع به‌گونه‌ای است که با ۱ واحد افزایش x، مقدار $f(x+۱)$ سه برابر $f(x)$ می‌شود. نمودار این تابع به شکل روبه‌رو است.



در مثال زیر رفتار یکی دیگر از این گونه تابع‌ها را بررسی می‌کنیم. در این مثال پایهٔ تابع نمایی، عددی بزرگ‌تر از ۱ است.

مثال ۱۱

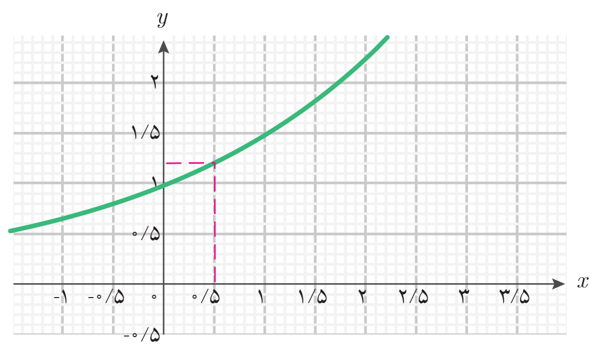
جدول زیر مربوط به تابع $f(x)=(\frac{۳}{۲})^x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ است.

x	۱-	۰	۱	۲	۳	۴
$(\frac{۳}{۲})^x$	$\frac{۲}{۳}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۹}{۴}$	$\frac{۲۷}{۸}$	$\frac{۸۱}{۱۶}$

$\times\frac{۳}{۲}$ $\times\frac{۳}{۲}$ $\times\frac{۳}{۲}$

جدول نشان می‌دهد با افزودن ۱ واحد به متغیر x، مقدار تابع یعنی $(\frac{۳}{۲})^x$، $\frac{۳}{۲}$ برابر (۱/۵ برابر) خواهد شد. نمودار این تابع به شکل زیر است.

نمودار این تابع در نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$ محور yها را قطع می‌کند و بالای محور طول‌ها واقع است؛ زیرا مقادیر تابع همواره مثبت است. یکی از موارد استفاده از این نمودار، یافتن برخی از توان‌های $\frac{۳}{۲}$ مانند یافتن مقدار تقریبی $\sqrt{۱/۵}$ (یعنی $(۱/۵)^{\frac{۱}{۲}}$) است. این محاسبه بدون استفاده از ماشین حساب به سادگی امکان‌پذیر نیست. با استفاده از نمودار می‌توان دید مقدار $\sqrt{۱/۵}$ تقریباً ۱/۲۲ است؛ یعنی: $\sqrt{۱/۵}\approx ۱/۲۲$.



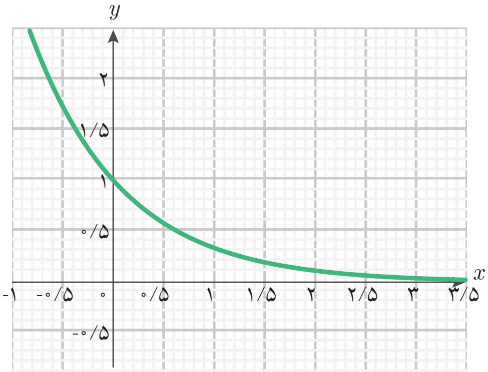
مثال ۱۲

تابع $f(x)=(\frac{1}{3})^x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ یک تابع نمایی با پایهٔ $\frac{1}{3}$ است. جدول زیر مقادیر تابع به ازای برخی از مقادیر x را نشان می‌دهد:

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=(\frac{1}{3})^x$	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

$\times\frac{1}{3}$ $\times\frac{1}{3}$ $\times\frac{1}{3}$ $\times\frac{1}{3}$ $\times\frac{1}{3}$

با افزودن ۱ واحد به متغیر x، مقدار $f(x)$، $\frac{1}{3}$ برابر خواهد شد. بنابراین $f(x)$ کاهش می‌یابد. نمودار این تابع به‌صورت روبه‌رو است.



نمودار این تابع در نقطهٔ $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ محور yها را قطع می‌کند و بالای محور xها واقع است؛ زیرا مقادیر تابع همواره مثبت است.

با توجه به مثال‌هایی که از تابع‌های نمایی بررسی کردیم، دربارهٔ رفتار این تابع‌ها می‌توان گفت:

در تابع نمایی $f(x)=a^x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$، با افزودن ۱ واحد به متغیر x، مقدار $f(x)$، a برابر خواهد شد. اگر $a>1$، با افزایش مقدار x، مقدار $f(x)$ افزایش خواهد یافت و اگر $0<a<1$، با افزایش مقدار x، مقدار $f(x)$ کاهش خواهد یافت. نمودار این‌گونه تابع‌ها همواره در بالای محور xها واقع است زیرا هر توانی از یک عدد مثبت، عددی مثبت است. نمودار این تابع از نقطهٔ $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ می‌گذرد؛ زیرا $f(0)=a^0=1$.

مثال ۱۳

با داشتن نرخ سود سالانهٔ یک بانک، مقدار پس‌انداز هر فرد در پایان هر سال چگونه به‌دست می‌آید؟

فرض کنید نرخ سود سالانهٔ اعلام‌شده توسط یکی از بانک‌ها ۱۰ درصد باشد و فردی ۸ میلیون تومان در این بانک سپرده‌گذاری کرده باشد. بنابراین،

در پایان سال اول $۸\times\frac{۱۰}{۱۰۰}=۸\times ۰/۱$ میلیون تومان به این فرد سود تعلق می‌گیرد و این سود، به موجودی او اضافه می‌شود. بنابراین، این فرد در پایان سال اول $۸+۸\times ۰/۱$ یعنی $۸(۱+۰/۱)$ میلیون تومان پس‌انداز خواهد داشت.

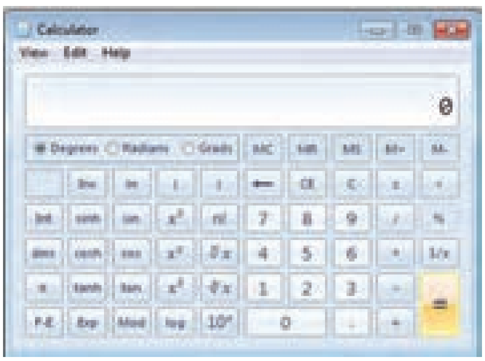
از آنجا که موجودی او در پایان سال اول $۸(۱+۰/۱)$ میلیون تومان است، در پایان سال دوم $۸(۱+۰/۱)\times ۰/۱$ تومان سود به این فرد تعلق می‌گیرد. بنابراین، پس‌انداز این فرد در پایان سال دوم به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$۸(۱+۰/۱)+۸(۱+۰/۱)\times ۰/۱=۸(۱+۰/۱)(۱+۰/۱)=۸(۱+۰/۱)^{۲}$$

اگر با همین شیوه، پس‌انداز این فرد را در پایان سال سوم محاسبه کنیم، مقدار آن $۸(۱+۰/۱)^{۳}$ میلیون تومان خواهد بود. اگر این وضعیت تا سال nاُم ادامه داشته باشد، مقدار پس‌انداز در پایان سال nاُم برابر $۸(۱+۰/۱)^{n}$ خواهد شد.

کار با ماشین حساب

با استفاده از ماشین حساب مقدار پس‌انداز فردی را که ۸ میلیون تومان در این بانک سپرده‌گذاری کرده است، در پایان سال سوم برحسب میلیون تومان محاسبه کنید:



8 → * → (→ 1 → + → . → 1 →) → x^y → 3 → =

خواندنی

عدد نپر(Napier)

عدد نپر، عددی خاص در ریاضی است که نقش مهمی در تابع‌های نمایی ایفا می‌کند. اولین بار نپر این عدد را معرفی کرد ولی اویلر(Euler) بیشترین کارها را با آن انجام داد. برنولی (Bernoulli) نیز به هنگام کار در زمینهٔ سود مرکب به این عدد پی برد.

برنولی فرض کرد اگر ۱ میلیون تومان سرمایه را در بانکی پس‌انداز کنید که در پایان سال ۱۰۰ درصد سود پرداخت کند، در این صورت پس‌انداز شما پس از ۱ سال ۲= (۱+۱) میلیون تومان خواهد بود. اگر بانک تصمیم بگیرد درصد سود را نصف کند و به جای آن هر شش ماه یک بار سود پرداخت کند، در این حالت، مقدار پس‌انداز در آخر سال برابر $(۱+\frac{۱}{۲})^۲$ میلیون تومان (یعنی ۲/۲۵ میلیون تومان) خواهد بود. اگر بانک با نرخ $\frac{۱۰۰}{۳}$ درصد سود را محاسبه کند و به جای آن هر $\frac{۱}{۳}$ سال (چهار ماه) سود پرداخت کند، در این حالت، مقدار پس‌انداز در آخر سال برابر $(۱+\frac{۱}{۳})^۳$ میلیون تومان (تقریباً ۲/۳۷۰) خواهد بود. به همین ترتیب اگر ادامه دهیم و بانک با نرخ $\frac{۱۰۰}{n}$ درصد سود را محاسبه کند و به جای آن هر $\frac{۱}{n}$ سال سود پرداخت کند، در این حالت، مقدار پس‌انداز در آخر سال برابر $(۱+\frac{۱}{n})^n$ میلیون تومان خواهد شد. با ادامه این روند، سود محاسبه شده در پایان سال در حال افزایش است، ولی از مقدار خاصی بیشتر نخواهد شد. این مقدار خاص همان عدد نپر است. این عدد را با e نشان می‌دهند. $e \approx ۲/۷۱۸۲$.

کار در کلاس ۵

۱ دو جدول زیر نقاطی از صفحهٔ مختصات را مشخص می‌کنند. تعیین کنید نقاط نمایش داده شده در کدام جدول می‌توانند نقاطی از نمودار یک تابع نمایی باشند. دلیل خود را بیان کنید و در هر کدام قانون تابعی را بنویسید که نقاط جدول می‌توانند روی نمودار آن قرار گیرند.

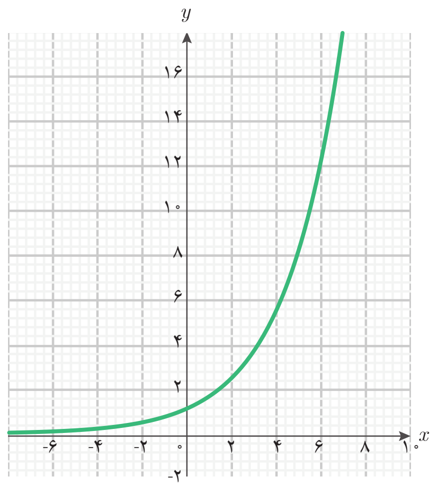
الف)

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	۱	۴	۱۶	۶۴	۲۵۶

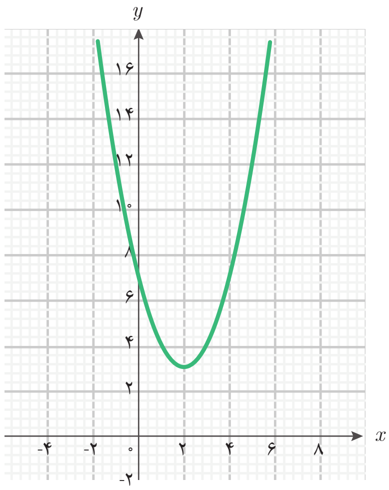
ب)

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	۱	۵	۹	۱۳	۱۷

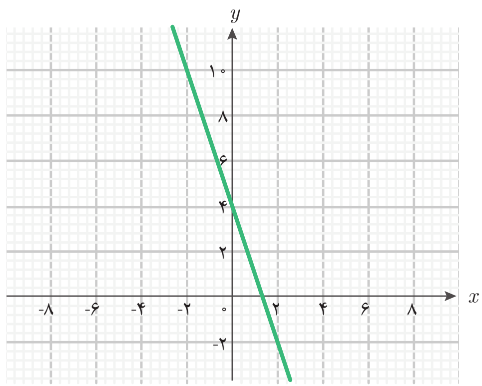
۲ در هر کدام از نمودارهای زیر نوع تابع (تابع نمایی، تابع خطی، تابع درجه دوم) را مشخص کنید.
اگر تابع نمایی باشد، آیا پایه بین صفر و یک است یا بزرگ‌تر از یک؟



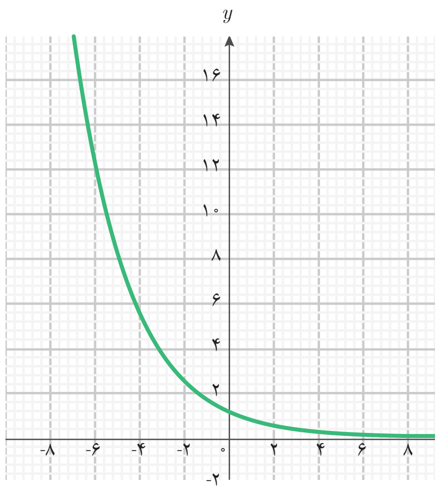
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

خواندنی

استهلاک

یکی از پدیده‌های مهم اقتصادی، کاهش ارزش یک دارایی ثابت بر اثر عواملی نظیر گذر زمان، فرسایش و کار کردن است. این پدیده را **استهلاک** می‌نامند. برای مثال یک دستگاه چاپ با قیمت ۵۰ میلیون تومان ممکن است هر سال ۳۵ درصد (نرخ استهلاک) از ارزش آن به دلیل فرسودگی کاهش یابد. فرض کنید ۵ سال این کاهش با همین نرخ ادامه یابد.

در پایان سال اول قیمت این دستگاه $۵۰\times\frac{۳۵}{۱۰۰}$ میلیون تومان کاهش می‌یابد. بنابراین ارزش این دستگاه در پایان سال اول $۵۰-۵۰\times\frac{۳۵}{۱۰۰}=۵۰(۱-\frac{۳۵}{۱۰۰})$، میلیون تومان خواهد بود.

به همین ترتیب، ارزش این دستگاه در پایان سال دوم و سوم برحسب میلیون تومان به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

پایان سال دوم: $$۵۰(۱-\frac{۳۵}{۱۰۰})(۱-\frac{۳۵}{۱۰۰})=۵۰(۱-\frac{۳۵}{۱۰۰})^{۲}$$

پایان سال سوم: $$۵۰(۱-\frac{۳۵}{۱۰۰})^{۲}(۱-\frac{۳۵}{۱۰۰})=۵۰(۱-\frac{۳۵}{۱۰۰})^{۳}$$

تابع $g(n)=۵۰(۱-\frac{۳۵}{۱۰۰})^{n}$ با دامنهٔ $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$، ارزش این دستگاه را در پایان سال nاُم برحسب میلیون تومان نشان می‌دهد. در این مثال، g یک تابع نمایی است و چون پایهٔ این تابع نمایی، کوچک‌تر از ۱ است، با افزایش مقدار متغیر، مقدار تابع کاهش می‌یابد. ارزش این دستگاه در پایان سال پنجم به‌صورت زیر خواهد بود:

$$g(۵)=۵۰(۱-\frac{۳۵}{۱۰۰})^{۵}=۵۰(\frac{۶۵}{۱۰۰})^{۵}=۵۰(\frac{۱۳}{۲۰})^{۵}\approx ۵/۸$$

مسائل

۱ اگر $f(x)=(\frac{۱}{۴})^x$ و $g(x)=۵^x$، مقادیر زیر را به‌دست آورید و در صورت امکان ساده کنید.

الف) $f(۰)$ ب) $g(-۱)$ پ) $f(\frac{۱}{۲})$ ت) $f(-۱)$ ث) $g(\frac{۱}{۳})$

۲ در جدول‌های زیر مقادیری از چهار تابع مشخص شده‌اند. کدام جدول می‌تواند مربوط به یک تابع نمایی باشد؟ در این حالت، قانون آن تابع نمایی را مشخص کنید.

الف)

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۴

ب)

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	۱	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۲۷}$	$\frac{۱}{۸۱}$

پ)

x	-۱	۰	۱	۲	۳
y	۲	۱	۰/۵	۰/۲۵	۰/۶۲۵

ت)

x	-۳	-۲	-۱	۰	۱
y	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲

۳ جدول زیر را طبق نمونه کامل کنید (دامنهٔ همهٔ تابع‌ها $\mathbb{R}$ است).

ردیف	قانون تابع	تغییرات y به ازای ۱ واحد افزایش x	محل تقاطع با محور yها
۱	$y=۶^x$	۶ برابر	$\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$
۲	$y=(۰/۹)^x$	...	...
۳	$y=\frac{۱}{۳}\times ۲^x$	....	...
۴	$y=۳(\frac{۱}{۵})^x$	...	...

۴ با افزایش مقادیر x، مقادیر کدام تابع افزایش و مقادیر کدام تابع کاهش می‌یابند؟ (دامنهٔ همهٔ این تابع‌ها را $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید)

الف) $f(x)=۲^x$ ب) $g(x)=۲۰۰(\frac{۱}{۳})^x$ پ) $h(x)=\frac{۱}{۳}(\frac{۳}{۲})^x$

۵ نرخ سود سالانهٔ اعلام‌شده توسط یکی از بانک‌ها تا ۵ سال، ۱۲ درصد است. آقای بهرامی ابتدای سال ۱۳۹۶ در این بانک ۵ میلیون تومان پس‌انداز کرده است.

الف) قانون تابعی را بنویسید که از طریق آن بتوان موجودی آقای بهرامی را در پایان سال nاُم محاسبه کرد.

ب) موجودی حساب پس‌انداز آقای بهرامی را در پایان سال پنجم به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید و مقدار تقریبی آن را برحسب تومان بنویسید.

۶ تابع $f(x)=۳\times۲^x$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید.

الف) جدول مقادیر این تابع را در نقاط به طول ۲- و ۱- و ۰ و ۱ و ۲ تشکیل دهید.

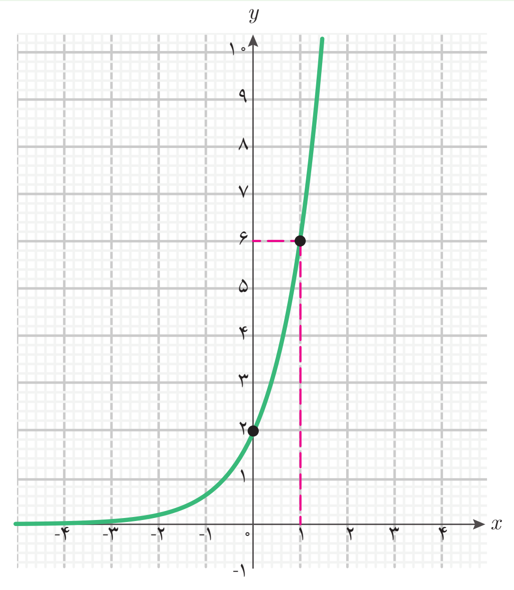
ب) نمودار این تابع، محور yها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

پ) با یک واحد افزایش مقدار متغیر، مقدار تابع چه تغییری می‌کند؟

۷ تابع نمایی $f(x)=ab^x$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. نمودار این تابع به شکل روبه‌رو است.

الف) قانون این تابع را بنویسید.

ب) مقادیر $f(۲)$ و $f(-۱)$ را به‌دست آورید.



استانداردهای ارزشیابی پودمان اول

عنوان پودمان	تکالیف عملکردی (واحدهای یادگیری)	استاندارد عملکردی (کیفیت)	سطوح انتظارات	شاخص تحقق	نمره
پودمان اول: کاربرد برخی تابع‌ها در زندگی روزمره	مدل‌سازی و حل مسائل به کمک تابع چندضابطه‌ای	مدل‌سازی و حل مسائل مرتبط با تابع‌های چندضابطه‌ای، مثلثاتی و نمایی	بالاتر از حد انتظار	□ مدل‌سازی و حل مسائل واقعی (مسائل حل نشده در کلاس و کتاب درسی) مرتبط با تابع‌های چندضابطه‌ای، مثلثاتی و نهایی	۳
	مدل‌سازی و حل مسائل به کمک تابع مثلثاتی		حد انتظار	□ مدل‌سازی و حل مسائل مشابه مسائل حل شده در کلاس و کتاب درسی مرتبط با تابع‌های چندضابطه‌ای، مثلثاتی و نمایی	۲
	مدل‌سازی و حل مسائل به کمک تابع نمایی		پایین‌تر از حد انتظار	□ درک و کاربرد تابع‌های چند ضابطه‌ای، مثلثاتی و نمایی	۱
نمره مستمر از ۵:					
نمره واحد یادگیری از ۳:					
نمره واحد یادگیری از ۲۰:					