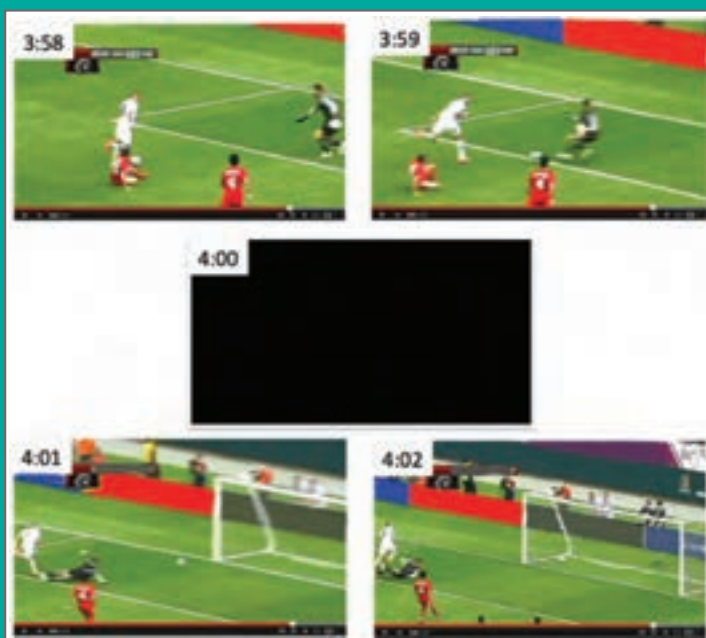


پودمان دوم

درک مفهوم حد



در هنگام پخش مسابقه فوتبال، برای لحظه‌ای تصویر صفحه نمایش تلویزیون قطع می‌شود. چگونه می‌توان حدس زد در این لحظه توپ کجاست؟



امروز دبیر دربارهٔ اصابت موشک به یکی از هواپیماهای جنگی که در ارتفاع بالا در حال پرواز بود، صحبت کرد. این سؤال برای سعید مطرح شد که ما چگونه می‌توانیم ارتفاع هواپیما را در لحظهٔ اصابت موشک به‌دست آوریم؟

حمید گفت: من شنیده‌ام که هواپیماها دارای حداقل یک جعبهٔ سیاه هستند که تمام اطلاعات پرواز در آن ضبط می‌شود. اگر جعبهٔ سیاه هواپیما پیدا شود، حتماً ارتفاع هواپیما در لحظهٔ اصابت موشک در آن ذخیره شده است.

دبیر گفت: بله، ممکن است که اطلاعات کلی پرواز در جعبهٔ سیاه ذخیره شود؛ ولی در لحظهٔ اصابت موشک، جعبهٔ سیاه هم از کار می‌افتد و نمی‌تواند ارتفاع هواپیما را دقیقاً در همان لحظه نشان دهد.

حمید گفت: ولی ارتفاع هواپیما در لحظات قبل از اصابت موشک در جعبهٔ سیاه وجود دارد. شاید به کمک آنها بتوان ارتفاع هواپیما را در همان لحظهٔ خاص به‌دست آورد.

دبیر گفت: شما چه راه‌حلی به نظر تان می‌رسد؟

سعید گفت: اگر در لحظات قبل از اصابت موشک، ارتفاع هواپیما ثابت باشد، کافی است ارتفاع هواپیما را در آن لحظه‌ها، از جعبهٔ سیاه به‌دست آوریم.

دبیر گفت: ما اطلاعی از ثابت بودن ارتفاع هواپیما نداریم و ممکن است هواپیما برای فرار از موشک در آن لحظه‌ها، ارتفاع خود را سریعاً تغییر داده باشد.

حمید گفت: فکر می‌کنم اگر در زمان‌های خیلی نزدیک به لحظهٔ اصابت موشک، ارتفاع هواپیما را به‌دست آوریم، این مقدارها می‌توانند تقریب‌های خوبی از ارتفاع هواپیما در لحظهٔ اصابت موشک باشند.

دبیر گفت: پیشنهاد خوبی است. با این روش ما می‌توانیم تقریب‌های خوبی از ارتفاع هواپیما در آن لحظه به‌دست آوریم، اما ارتفاع دقیق هواپیما را هنوز نیافته‌ایم.

حمید گفت: فرض کنیم ارتفاع هواپیما را در زمان‌های نزدیک به لحظهٔ اصابت بدانیم، آیا می‌توان تشخیص داد که این مقادیر تقریبی به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

دبیر گفت: سؤال خوبی است. برای پاسخ به آن بهتر است فعالیت صفحه بعد را انجام دهیم.



فرض کنید تابع h با قانون $h(t) = \frac{t^2 - 4t - 60}{2t - 20}$ ارتفاع هواپیمایی را در بازه زمانی $(0, 10]$ مشخص کند.

۱ ارتفاع هواپیما در لحظه $t = 8$ چقدر است؟

.....

۲ آیا در لحظه $t = 10$ می‌توان از طریق تابع h ، ارتفاع هواپیما را به دست آورد؟ چرا؟

.....

۳ آیا در زمان‌های قبل از $t = 10$ می‌توان از طریق تابع h ، ارتفاع هواپیما را به دست آورد؟

.....

۴ با کامل کردن جدول، ارتفاع هواپیما را در زمان‌های نزدیک به $t = 10$ به دست آورید.

.....

t	5	9	9/5	9/9	9/95	9/99	9/999	→	10
$h(t)$	5/5	7/5	7/75	7/95	7/975	→	?

۵ آیا می‌توانید حدس بزنید که با نزدیک شدن مقادیر t به 10 ، مقادیر $h(t)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

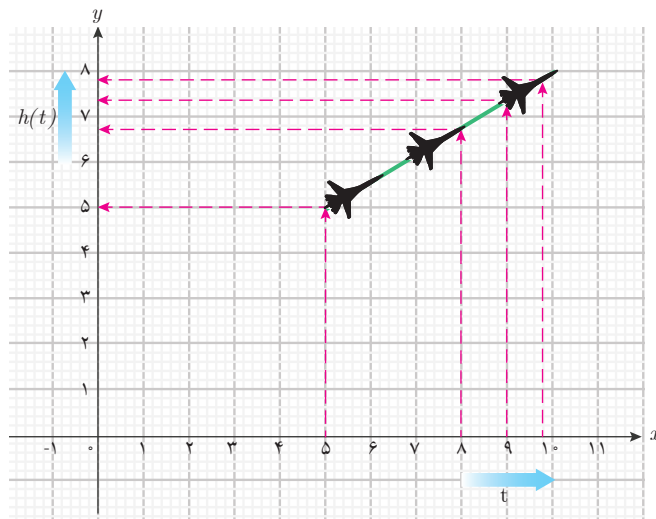
.....

۶ آیا اکنون می‌توانید بگویید ارتفاع هواپیما در لحظه $t = 10$ چقدر بوده است؟

.....

در فعالیت (۱) تابع h ، ارتفاع یک هواپیما را در بازه زمانی $(0, 10]$ نشان می‌دهد. هدف از این فعالیت، یافتن ارتفاع هواپیما در لحظه $t = 10$ بود. این ارتفاع را با L نشان می‌دهیم. از آنجا که 10 در دامنه این تابع نیست، نمی‌توانیم مستقیماً L را از طریق قانون تابع h به دست آوریم؛ اما ارتفاع هواپیما برای زمان‌های قبل از $t = 10$ را می‌توان مشخص کرد. با توجه به پیوستگی حرکت هواپیما، می‌دانیم در

زمان‌های بسیار نزدیک به $t = 10$ ، ارتفاع هواپیما نزدیک به L است؛ پس کافی است ارتفاع هواپیما را برای زمان‌های بسیار نزدیک به $t = 10$ محاسبه کنیم و تشخیص دهیم این مقادیر به چه عددی نزدیک می‌شوند. با تشکیل جدول مقادیر تابع در نزدیکی‌های $t = 10$ مشاهده می‌کنیم که با نزدیک شدن مقادیر t به 10 ، مقادیر $h(t)$ به 8 نزدیک می‌شوند. این مطلب در نمودار تابع نیز به خوبی دیده می‌شود.



همان‌طور که در نمودار دیده می‌شود، با نزدیک شدن مقادیر t به 10 ، مقادیر $h(t)$ به 8 نزدیک می‌شوند. پس می‌توانیم نتیجه بگیریم ارتفاع هواپیما در لحظه $t = 10$ برابر 8 کیلومتر یا به عبارت دیگر $L = 8$ است. توجه داشته باشید که عدد 8 را نمی‌توانستیم با محاسبه مقدار تابع h در $t = 10$ به دست آوریم. زیرا 10 در دامنه این تابع نیست، بلکه با نزدیک کردن مقادیر t به 10 و مشاهده نزدیک شدن مقادیر $h(t)$ به 8 ، این مقدار را به دست آورده‌ایم. این عمل را یافتن حدگیری و عدد 8 را حد تابع h در $t = 10$ می‌گویند.

مثال ۱

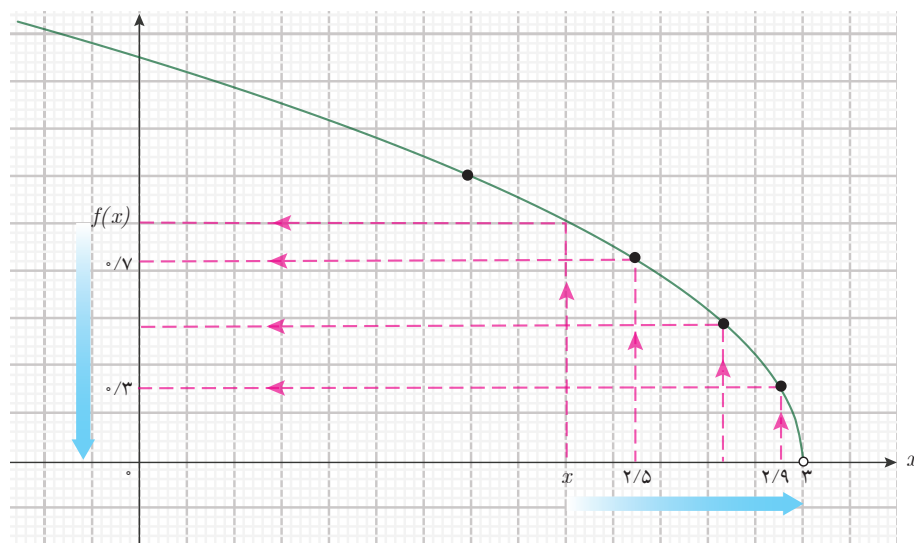
تابع f را با دامنه $(-\infty, 3)$ و قانون $f(x) = \frac{3-x}{\sqrt{3-x}}$ در نظر بگیرید. با نزدیک شدن متغیر

تابع در دامنه تابع به نقطه $x = 3$ ، مقادیر تابع به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

برای پاسخ به این سؤال، جدول مقادیر تابع را به ازای x ‌های نزدیک به 3 (در دامنه f) محاسبه می‌کنیم.

x	$2/5$	$2/9$	$2/99$	$2/999$	$2/9999$	$2/99999$	$2/999999$	$\rightarrow 3$
$f(x)$	$0/707$	$0/316$	$0/100$	$0/031$	$0/010$	$0/003$	$0/0003$	$\rightarrow ?$

این جدول نشان می‌دهد که با نزدیک شدن مقادیر x به ۳، مقادیر $f(x)$ به صفر نزدیک می‌شوند. از طریق نمودار تابع نیز می‌توان همین نتیجه را به دست آورد. نمودار f را به کمک جئوجبرا رسم می‌کنیم.



به ازای هر مقدار x ، می‌توان مقدار $f(x)$ را روی محور عرض‌ها از نمودار تابع به دست آورد. در شکل بالا، با نزدیک شدن مقادیر x (در دامنه f) روی محور طول‌ها به ۳ مقادیر $f(x)$ به صفر نزدیک می‌شوند. همان‌طور که نمودار نشان می‌دهد از طریق تغییر مقادیر تابع در جهت فلش‌ها می‌توان تشخیص داد که با نزدیک شدن x به ۳ روی محور طول‌ها، مقادیر $f(x)$ روی محور عرض‌ها به صفر نزدیک می‌شوند.

مثال ۲

تابع g را با دامنه $\mathbb{R} - \{2\}$ و قانون $g(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ در نظر بگیرید. اگر مقادیر x را

در دامنه g به ۲ نزدیک کنیم، مقادیر $g(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

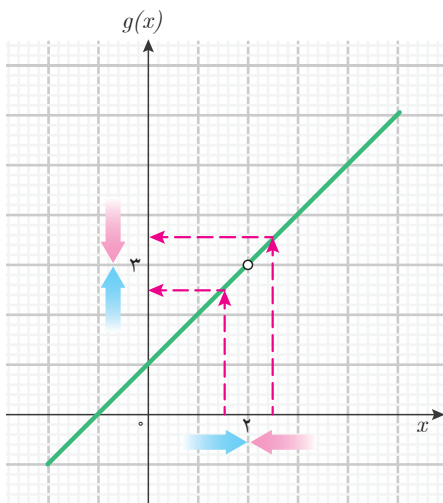
دامنه این تابع به صورت $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ است. برای محاسبه مقادیر $g(x)$ به ازای x ‌های

نزدیک ۲ در دامنه، می توان هم مقادیر بزرگ تر از ۲ و هم مقادیر کوچک تر از ۲ را برای x انتخاب کرد. بنابراین برای این تابع، جدولی به شکل زیر تشکیل می دهیم.

x	۱/۹۹	۱/۹۹۹	۱/۹۹۹۹	$\rightarrow 2 \leftarrow$	۲/۰۰۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۱
$g(x)$	۲/۹۹	۲/۹۹۹	۲/۹۹۹۹	$\rightarrow 3 \leftarrow$	۳/۰۰۰۱	۳/۰۰۱	۳/۰۱

این جدول نشان می دهد که با نزدیک شدن مقادیر x به ۲ (از دو طرف) مقادیر $g(x)$ به ۳ نزدیک می شوند. در اینجا نیز می گویند حد تابع g در نقطه $x=2$ برابر ۳ است.

در این مثال نیز می توان به کمک نمودار تابع g ، حد آن را در نقطه $x=2$ به دست آورد. نمودار این تابع به شکل مقابل است.



نمودار نشان می دهد که با نزدیک شدن x روی محور طول ها به ۲ (از دو طرف) مقادیر $g(x)$ روی محور عرض ها به ۳ نزدیک می شوند.

پس از توضیحات بالا درباره حد تابع ها، برای حمید سؤالی پیش آمد.

حمید پرسید: آیا می توان حد هر تابعی را در هر نقطه ای به دست آورد؟

دبیر گفت: برای یافتن حد یک تابع در یک نقطه، باید بتوانیم مقادیر تابع را در نزدیکی های آن نقطه حساب کنیم. اگر نتوانیم این کار را انجام دهیم، حد تابع در آن نقطه معنایی ندارد و قابل تعریف نیست.

حمید پرسید: چگونه تشخیص دهیم حد یک تابع در یک نقطه قابل تعریف نیست؟

دبیر گفت: اگر بخواهیم مقادیر تابع را در نزدیکی های یک نقطه محاسبه کنیم، لازم است دامنه تابع، شامل نقاط نزدیک به آن نقطه باشد. این به معنای آن است که باید بتوانیم از داخل دامنه تابع به آن نقطه نزدیک شویم.

سعید گفت: بنابراین، اگر درست متوجه شده باشم، حد یک تابع در هر نقطه ای قابل تعریف نیست. مثلاً

برای یک نقطه مانند a باید تشخیص دهیم که آیا از داخل دامنه تابع، می توان به a نزدیک شد یا خیر؟

حمید پرسید: برای مثال اگر دامنه یک تابع بازه $(0, +\infty)$ باشد، از داخل آن به چه نقاطی می توان نزدیک

شد و به چه نقاطی نمی توان نزدیک شد؟

گفتگو



سعید گفت: به نظر من در این بازه به هر عدد مثبت می توان از دو طرف (مقادیر کوچک تر و بزرگ تر از آن عدد) نزدیک شد، ولی در این بازه، به هیچ عدد منفی نمی توان نزدیک شد. در مورد صفر، فقط از سمت راست (مقادیر بزرگ تر از صفر) می توانیم به آن نزدیک شویم.

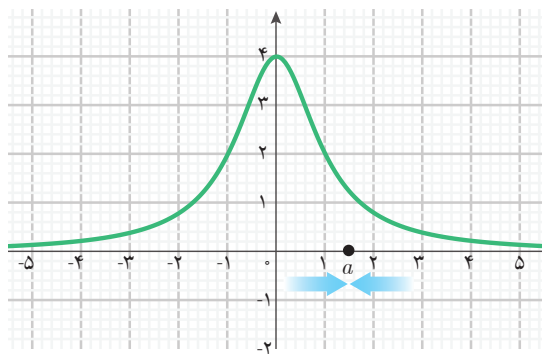
دبیر گفت: بله، نظر شما درست است. بنابراین، برای تابعی که دامنه آن بازه $(0, +\infty)$ است، حد آن در همه اعداد مثبت و صفر قابل تعریف است، ولی در اعداد منفی حد آن تابع قابل تعریف نیست.

حمید گفت: ولی من منظور از نزدیک شدن به یک نقطه را درست متوجه نشدم. چه اندازه از نزدیک شدن کافی است؟ فاصله از نقطه چقدر باید کوچک باشد؟ آیا مثلاً نزدیک شدن به اندازه $0/001$ یا $0/0001$ یا $0/00001$ یا یک عدد کوچک تر دیگر، کافی است؟

دبیر گفت: نه، منظور از نزدیک شدن، آن نیست که به اندازه عدد خاصی نزدیک شویم. منظور از نزدیک شدن آن است که به هر اندازه که بخواهیم، بتوانیم به آن نقطه نزدیک شویم. مثلاً از داخل بازه $(0, +\infty)$ به هر اندازه که بخواهیم می توانیم به ۱ نزدیک شویم.

مثال ۳

حد تابع $g(x) = \frac{4}{x^2 + 1}$ با دامنه \mathbb{R} در چه نقاطی قابل تعریف است؟



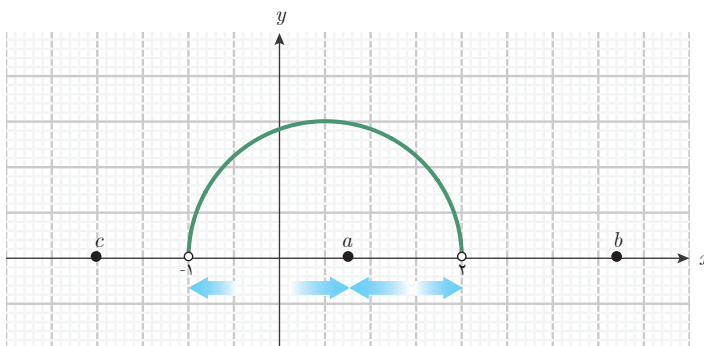
دامنه این تابع، تمام اعداد حقیقی است. پس، از دامنه این تابع به هر نقطه مانند a می توان نزدیک شد. بنابراین، حد این تابع در همه نقاط قابل تعریف است. نمودار این تابع به شکل روبه رو است و مثلاً نزدیک شدن به یک نقطه مانند a ، از نقاط دامنه تابع، نمایش داده شده است.

مثال ۴

حد تابع $f(x) = \sqrt{(x+1)(2-x)}$ با دامنه $(-1, 2)$ در چه نقاطی قابل تعریف است و در چه نقاطی قابل تعریف نیست؟

نمودار این تابع به شکل صفحه بعد است. همان طور که از روی شکل دیده می شود، از نقاط دامنه این تابع به همه نقاط بازه $(-1, 2)$ از دو طرف می توان نزدیک شد (مانند نقطه a که در شکل نشان داده

شده است). به نقطه ۲ فقط از سمت چپ می‌توان نزدیک شد و به ۱- فقط از سمت راست می‌توان نزدیک شد. بنابراین، حد این تابع در تمام نقاط بازه $[-1, 2]$ قابل تعریف است. ولی از نقاط دامنه این تابع نمی‌توان به نقاطی مانند b و c (در شکل زیر) که خارج از بازه $[-1, 2]$ هستند، نزدیک شد. بنابراین حد این تابع برای نقاط خارج از بازه $[-1, 2]$ قابل تعریف نیست.



به طور کلی در ریاضی، حد تابع‌ها به شکل زیر تعریف می‌شود:

حد تابع

فرض کنید f یک تابع و a نقطه‌ای باشد که بتوان از نقاط دامنه تابع f^{-1} (به اندازه دلخواه) به آن نزدیک شد. در این حالت می‌گوییم حد f در نقطه a قابل تعریف است. اگر حد f در نقطه a قابل تعریف باشد و با نزدیک شدن مقادیر متغیر x (از نقاط دامنه f) به a که $x \neq a$ ، مقادیر $f(x)$ به عددی مانند L نزدیک شوند، می‌گوییم حد تابع f در نقطه a برابر عدد L است.

این عمل را حدگیری از تابع f در نقطه a ، و a را نقطه حدگیری می‌نامند. در عمل حدگیری از یک تابع f ، مقادیر $f(x)$ نمی‌توانند هم‌زمان به دو عدد مختلف نزدیک شوند، بنابراین حد یک تابع در یک نقطه، در صورت وجود، یکتاست.

تعریف



۱- در این کتاب فرض بر آن است که هرگاه از حد یک تابع صحبت می‌کنیم دامنه آن به صورت یک بازه یا اجتماع چند بازه است.
 ۲- توجه داشته باشید که نزدیک شدن $f(x)$ به L نیز باید به اندازه دلخواه باشد، یعنی با نزدیک کردن x به a (به اندازه کافی) باید $f(x)$ را به L ، به هر اندازه که بخواهیم نزدیک سازیم.



برای مثال، حد تابع $f(x) = \sqrt{(x+1)(2-x)}$ با دامنه $(-1, 2)$ را در نظر بگیرید حد این تابع در نقاط بازه $[-1, 2]$ قابل تعریف است ولی برای نقاط خارج از این بازه، حد این تابع قابل تعریف نیست.

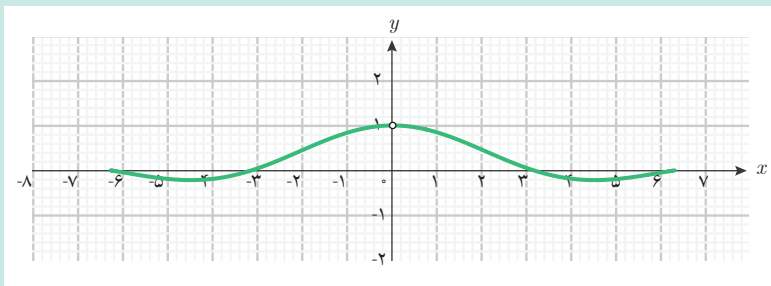
تابع $S(x) = \frac{\sin x}{x}$ با دامنه $\{0\} - (-2\pi, 2\pi)$ را در نظر بگیرید.

الف) دامنه این تابع را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید و توضیح دهید چرا نزدیک شدن به صفر از نقاط دامنه این تابع از دو طرف انجام می‌شود.

ب) جدول زیر را کامل کنید و حد این تابع را در صفر حدس بزنید.

x	$-0/1$	$-0/01$	$-0/001$	$\rightarrow 0 \leftarrow$	$0/001$	$0/01$	$0/1$
$S(x)$	$0/998$	$\rightarrow ? \leftarrow$	$0/998$

پ) نمودار این تابع به شکل زیر است. درستی حدس خود را از طریق نمودار بررسی کنید.



ت) حد این تابع در چه نقطه‌ای قابل تعریف است؟



پس از آنکه سعید فهمید در چه نقاطی می توان حد یک تابع را تعریف کرد، سؤالی برای او پیش آمد. **سعید پرسید:** در محاسبه حد یک تابع در یک نقطه، از کجا معلوم است که مقادیر تابع حتماً به عدد خاصی نزدیک می شوند؟

دیبر گفت: وقتی حد یک تابع را در یک نقطه بررسی می کنیم، لزومی ندارد حتماً مقادیر تابع به عدد خاصی نزدیک شوند. ممکن است مقادیر تابع به هیچ عدد خاصی نزدیک نشوند. در این حالت می گویند تابع در آن نقطه حد ندارد.

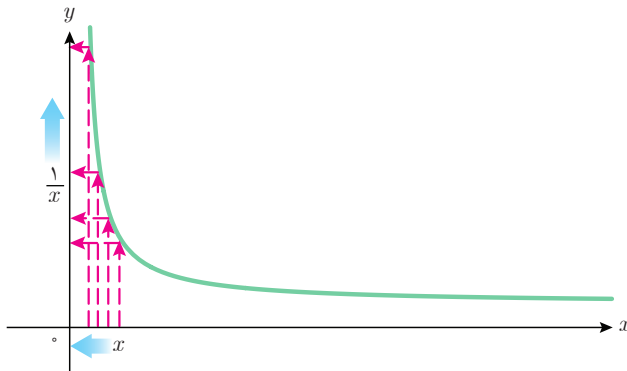
سعید گفت: پس آیا می توان گفت که اگر حد یک تابع در یک نقطه قابل تعریف باشد، ممکن است تابع در آن نقطه حد نداشته باشد؟

دیبر گفت: بله، قابل تعریف بودن حد تابع در یک نقطه به معنای وجود حد در آن نقطه نیست. برای مثال،

حد تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ با دامنه $(0, +\infty)$ را در صفر بررسی می کنیم. ابتدا جدول مقادیر تابع را در برخی نقاط نزدیک صفر تشکیل می دهیم. از آنجا که دامنه تابع فقط نقاط سمت راست صفر را در بردارد، فقط نقاط نزدیک صفر را که سمت راست صفر قرار دارند، در جدول قرار می دهیم.

x	$0 \leftarrow$	$0/0001$	$0/001$	$0/01$	$0/1$
$f(x)$	$? \leftarrow$	10000	1000	100	10

این جدول نشان می دهد که هر چه x به صفر (با مقادیر مثبت) نزدیک تر می شود، مقادیر $\frac{1}{x}$ بزرگ تر می شوند. نمودار این تابع نیز همین مطلب را نشان می دهد. آیا در این وضعیت، مقادیر $\frac{1}{x}$ به عدد خاصی نزدیک می شوند؟



سعید گفت: خیر، چون مقادیر $\frac{1}{x}$ در حال بزرگ شدن هستند و به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی شوند. بنابراین، تابع با قانون $\frac{1}{x}$ و دامنه $(0, +\infty)$ در صفر، حد ندارد.

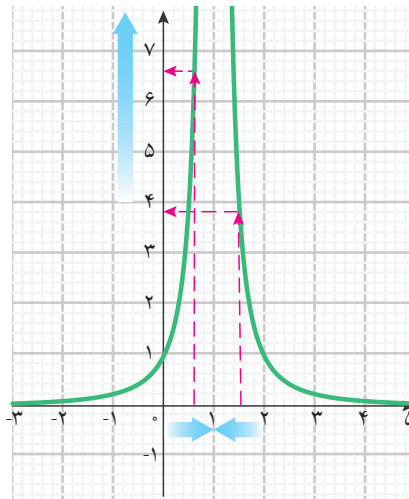
مثال ۵

آیا تابع $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{1\}$ در $x=1$ حد دارد؟

دامنه این تابع به صورت $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ است و می‌توان از دو طرف از نقاط دامنه تابع به ۱ نزدیک شد. بنابراین، جدول مقادیر این تابع را در نزدیک ۱ به شکل زیر تشکیل می‌دهیم.

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	$\rightarrow 1 \leftarrow$	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
$g(x)$	۱۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰	$\rightarrow ? \leftarrow$	۱۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰

این جدول نشان می‌دهد که با نزدیک شدن x به ۱، مقادیر $\frac{1}{(x-1)^2}$ بزرگ می‌شوند و به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند. نمودار این تابع نیز همین مطلب را نشان می‌دهد.



بنابراین، این تابع در $x=1$ حد ندارد.

در این مثال‌ها دیدیم که ممکن است حد یک تابع مانند f در یک نقطه مانند a قابل تعریف باشد، ولی با نزدیک شدن x از نقاط دامنه f به a ($x \neq a$)، مقادیر $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک نشوند. در این حالت می‌گوییم تابع f در نقطه a حد ندارد.



موارد الف و ب را برای هر یک از تابع‌های $h(x)$ ، $g(t)$ و $f(x)$ بررسی کنید.
 الف) آیا حد تابع در صفر قابل تعریف است؟
 ب) در صورت قابل تعریف بودن، وجود حد و مقدار آن را (در صورت وجود) با کامل کردن جدول و رسم نمودار به کمک جئوجبرا، بررسی کنید.

۱) تابع $h(x) = \sin x$ با دامنه $(-\pi, \pi)$

x	$-0/1$	$-0/01$	$-0/001$	$\rightarrow 0 \leftarrow$	$0/001$	$0/01$	$0/1$
$\sin(x)$	$-0/099$	$0/009$...	$\rightarrow ? \leftarrow$...	$0/009$	$0/099$

۲) تابع $g(t) = \frac{\sqrt{t^2 + t}}{t}$ با دامنه $(0, 4)$

t	$0 \leftarrow$	$0/0001$	$0/001$	$0/01$	$0/1$
$g(t)$	$? \leftarrow$...	$31/64$	$10/05$	$3/32$

۳) تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + x^6}}{x^2}$ با دامنه $(-\infty, \infty) - \{0\}$

x	$-0/1$	$-0/01$	$-0/001$	$\rightarrow 0 \leftarrow$	$0/001$	$0/01$	$0/1$
$f(x)$	$1/004$	$\rightarrow ? \leftarrow$...	$1/00004$	$1/004$

برای نمایش حد یک تابع از نماد \lim استفاده می‌شود.^۱ برای بیان حد تابع $f(x)$ ، از عبارت $\lim f(x)$ استفاده می‌کنیم. با توجه به اینکه حد یک تابع در یک نقطه (نقطه حدگیری)، تعریف و محاسبه می‌شود،

۱- \lim ابتدای کلمه limit است. این کلمه در زبان انگلیسی به معنای حد و مرز است.

نقطه حدگیری نیز باید در نماد حد، نمایش داده شود. برای مثال، اگر حدگیری در نقطه‌ای مانند a انجام شود، از نماد $x \rightarrow a$ برای بیان این مطلب استفاده می‌شود که نشانگر آن است که x (متغیر تابع) در حال نزدیک شدن به a (میل کردن به a) است. نماد $x \rightarrow a$ را در زیر نماد \lim می‌نویسند. به عبارت دیگر:

حد تابع f در نقطه a به صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ نمایش داده می‌شود.

از آنجا که نماد $x \rightarrow a$ نشانگر میل کردن x به a است، $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ به صورت «حد $f(x)$ وقتی x به a میل می‌کند» خوانده می‌شود.

مثال ۶

اگر حد تابع با قانون $x + 2$ و دامنه \mathbb{R} را در $x = 3$ با تشکیل جدول پیدا کنیم، برابر ۵ می‌شود.

x	$2/9$	$2/99$	$2/999$	$\rightarrow 3 \leftarrow$	$3/001$	$3/01$	$3/1$
$x + 2$	$4/9$	$4/99$	$4/999$	$\rightarrow 5 \leftarrow$	$5/001$	$5/01$	$5/1$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x + 2) = 5$$

عبارت بالا را به صورت زیر می‌خوانیم:

«حد تابع $x + 2$ وقتی x به ۳ میل می‌کند، برابر ۵ است.»

مثال ۷

در کار در کلاس (۱) حد تابع $\frac{\sin x}{x}$ با دامنه $\{0\} - (2\pi, 2\pi)$ را در $x = 0$ محاسبه کردید. مقدار این حد برابر ۱ بود، بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

عبارت بالا را به صورت زیر می‌خوانیم:

«حد تابع $\frac{\sin x}{x}$ وقتی x به صفر میل می‌کند، برابر ۱ است.»

مثال ۸

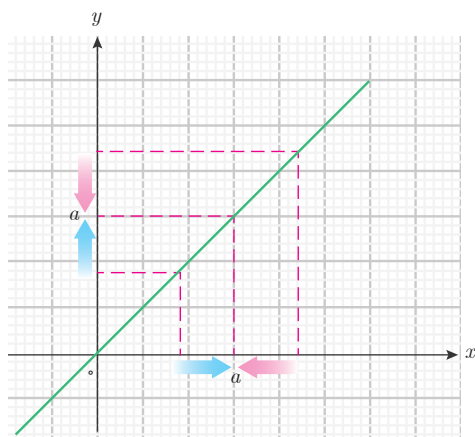
در مثال (۲) دیدیم حد تابع $g(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{2\}$ در نقطه $x = 2$ برابر ۳ است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = 3$$

عبارت بالا را به صورت زیر می‌خوانیم:

«حد تابع $\frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ وقتی x به ۲ میل می‌کند، برابر ۳ است.»

مثال ۹



تابع $f(x) = x$ با دامنه \mathbb{R} را در نظر بگیرید. مقدار تابع در هر نقطه مانند x ، همان x است. بنابراین، با نزدیک شدن x به هر نقطه‌ای مانند a ، مقادیر $f(x)$ (که همان x است) نیز به a نزدیک می‌شوند. برای مثال در نقطه ۳ جدول این تابع در نزدیکی این نقطه به شکل زیر است.

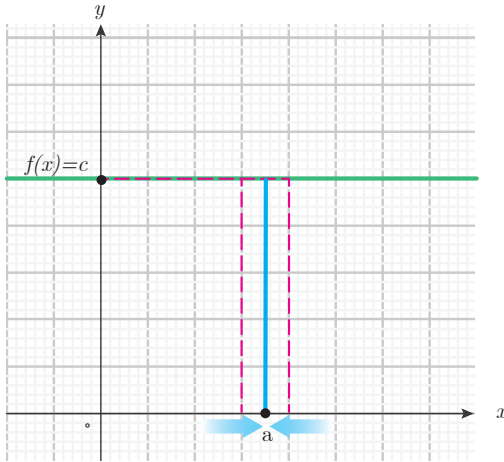
x	$2/9$	$2/99$	$\rightarrow 3 \leftarrow$	$3/01$	$3/1$
$f(x) = x$	$2/9$	$2/99$	$\rightarrow 3 \leftarrow$	$3/01$	$3/1$

$$\lim_{x \rightarrow 3} = 3 \text{ بنابراین}$$

به طور کلی حد این تابع در همهٔ نقاط وجود دارد و می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

مثال ۱۰



تابع ثابت $f(x) = c$ را با دامنه \mathbb{R} در نظر بگیرید. نمودار این تابع نشان می‌دهد که با نزدیک شدن x به هر نقطه‌ای مانند a (شکل روبه‌رو)، مقادیر $f(x)$ همان مقدار ثابت c است.

x	x	$\rightarrow a \leftarrow$	x
$f(x) = c$	c	$\rightarrow c \leftarrow$	c

در این وضعیت حد این تابع همان c است؛ یعنی حد تابع ثابت در هر نقطه‌ای وجود دارد و برابر همان مقدار ثابت است. بنابراین،

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

با استفاده از نماد حد، حد تابع‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.
الف) حد تابع $3x - 1$ با دامنه \mathbb{R} در $x = 2$ برابر ۵ است.

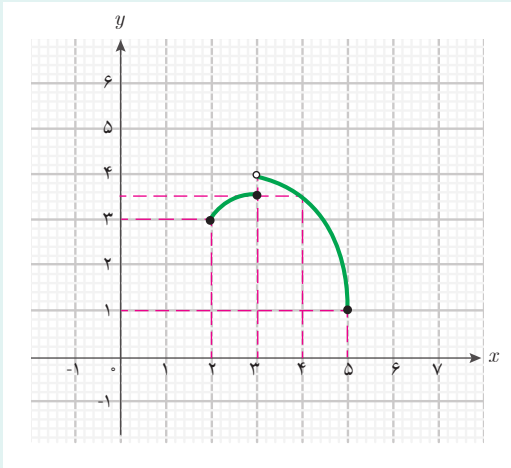
ب) حد تابع $g(x) = \frac{x}{x+1}$ با دامنه $(-\infty, -1)$ در $x = -3$ برابر $\frac{3}{2}$ است.

پ) حد تابع $\sqrt{x^2 - 1}$ با دامنه $(1, +\infty)$ در $x = 1$ برابر صفر است.

ت) حد تابع ثابت با مقدار ۸ در $x = -1$ برابر ۸ است.

کار در کلاسی ۳





۱ شکل روبه‌رو، نمودار تابع h را نشان می‌دهد. الف) در کدام یک از نقاط ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ حد این تابع قابل تعریف است؟ چرا؟ ب) در کدام یک از نقاط ۳، ۴، ۵ حد این تابع موجود است؟ حد این تابع در این نقاط را در صورت وجود بیابید و با نماد حد بنویسید.

۲ حدهای زیر را به زبان فارسی بیان کنید. دامنه این تابع‌ها را بازه $(0, +\infty)$ در نظر بگیرید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{1}{x} = 4$

پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$

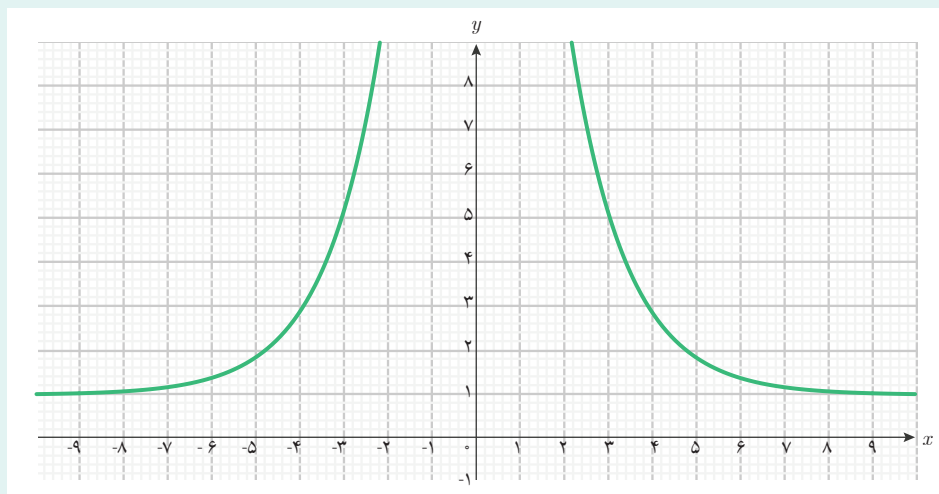
۳ تابع $f(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ را در نظر بگیرید. حد این تابع در چه نقاطی قابل تعریف است؟

۴ تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-2}$ را با دامنه $(2, +\infty)$ در نظر بگیرید. حد این تابع در چه نقاطی قابل تعریف است؟ به کمک تشکیل جدول این تابع در نزدیک ۲، وجود حد این تابع در $x=2$ را بررسی کنید.

۵ تابعی خطی با دامنه \mathbb{R} در نظر بگیرید و حد آن را در ۱ بررسی کنید. آیا حد این تابع در هر نقطه دیگری هم وجود دارد؟

۶ تابع $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$ با دامنه $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ را در نظر بگیرید.

الف) حد این تابع در چه نقاطی قابل تعریف است؟
 ب) نمودار این تابع به شکل زیر است. حدس بزنید حد این تابع در چه نقاطی وجود دارد و در چه نقاطی وجود ندارد؟



۷ تابع $g(x) = 1 + \sqrt{x}$ با دامنه $[0, +\infty)$ را در نظر بگیرید.
 الف) با تشکیل جدول این تابع در نزدیکی‌های ۴ حد این تابع را در ۴ بیابید و با نماد حد بنویسید.

ب) حد این تابع در چه نقاطی قابل تعریف نیست؟
 پ) با رسم نمودار این تابع به کمک جنوجبرا مشخص کنید، حد این تابع در چه نقاطی وجود دارد و در چه نقاطی وجود ندارد.

۸ آیا حد تابع $h(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{2 - x}$ با دامنه $(-\infty, 2)$ در ۲ قابل تعریف است؟ با تشکیل

جدول و رسم نمودار این تابع، حد آن را در ۲، در صورت وجود، بیابید و با نماد حد بنویسید.

۲- محاسبه حد تابع‌ها

با یادگیری مفهوم حد، سعید به دنبال جواب این سؤال بود که حد را چگونه می‌توان محاسبه کرد؟
سعید گفت: برای یافتن حد یک تابع، ما مقادیر تابع را در نزدیک نقطه حدگیری به کمک قانون تابع، محاسبه می‌کردیم و با استفاده از این مقادیر، حد تابع را حدس می‌زدیم. از کجا معلوم، حدس ما درست باشد؟ آیا روش‌های دیگری برای یافتن حد تابع‌ها داریم؟

دبیر گفت: سؤال خوبی است. ما نمی‌توانیم فقط به حدس خود اطمینان کنیم. روش‌هایی برای محاسبه حد تابع‌ها وجود دارند که به کمک آنها، حد بسیاری از تابع‌ها را می‌توان محاسبه کرد. برای مثال، اگر تابعی از جمع یا ضرب تابع‌های ساده‌تر ساخته شده باشد، می‌توانیم از حد همان تابع‌های ساده‌تر برای محاسبه حد آن تابع استفاده کنیم.

فعالیت زیر یکی از این روش‌های محاسبه حد را با یک مثال نشان می‌دهد.

فعالیت ۲



دو تابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{x}{4}$ را با دامنه یکسان $(0, 4)$ در نظر بگیرید. مجموع این دو تابع را به صورت $h(x) = \frac{x}{4} + \sqrt{x}$ نشان می‌دهیم که دامنه آن همان بازه $(0, 4)$ است.
 ۱ جدول زیر را برای یافتن حد سه تابع f و g و h در نقطه ۴ کامل کنید.

x	۳	۳/۵	۳/۹	۳/۹۹	۳/۹۹۹	→ ۴
$f(x)$	۱/۷۳۲	۱/۸۷۰	۱/۹۷۴	→ ?
$g(x)$	۰/۷۵۰	۰/۸۷۵	۰/۹۷۵	→ ?
$h(x)$	۲/۴۸۲	۲/۷۴۵	۲/۹۴۹	→ ?

۲ حد هر تابع را در نقطه ۴ جداگانه به دست آورید. چه رابطه‌ای بین حد این سه تابع در نقطه ۴ می‌یابید؟

۳ جدول زیر را برای یافتن حد این سه تابع در نقطه ۱ کامل کنید.

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	→ ۱ ←	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
$f(x)$	۰/۹۴۸	۰/۹۹۴	...	→ ? ←	۱/۰۰۰	۱/۰۰۴	۱/۰۴۸
$g(x)$	۰/۲۲۵	۰/۲۴۷	۰/۲۴۹	→ ? ←	...	۰/۲۵۲	۰/۲۷۵
$h(x)$	۱/۱۷۳	۱/۲۴۱	...	→ ? ←	...	۱/۲۵۶	۱/۳۲۳

۴ حد هر تابع در نقطه ۱ را جداگانه به دست آورید. چه رابطه‌ای بین حد این سه تابع در نقطه ۱ می‌یابید؟

۵ در حالت کلی بین حد دو تابع و حد مجموع آن دو تابع (در یک نقطه مشخص) چه رابطه‌ای را حدس می‌زنید؟

در این فعالیت، دو تابع مشخص f و g با دامنه یکسان ارائه شده‌اند. با جمع قانون‌های f و g تابع دیگری با همان دامنه مشترک این دو تابع به دست می‌آید (تابع h). در حالت کلی با جمع هر دو تابع دلخواه که دامنه یکسانی دارند، می‌توانیم تابعی با همان دامنه مشترک آنها به دست آوریم. این عمل را جمع کردن تابع‌ها می‌نامند. در این فعالیت حد مجموع این دو تابع در یک نقطه مشخص بررسی شد. دیدیم که با نزدیک شدن x به ۱، مقادیر $f(x)$ به ۱ و مقادیر $g(x)$ به $\frac{1}{4}$ نزدیک می‌شوند، بنابراین مقادیر $f(x) + g(x)$ به $1 + \frac{1}{4}$ نزدیک می‌شوند. این بررسی نشان می‌دهد که حد مجموع این دو تابع در یک نقطه برابر با مجموع حدهای این دو تابع در همان نقطه است.

به طور کلی اگر حد دو تابع f و g (با دامنه یکسان) در نقطه a به ترتیب L_1 و L_2 باشند، به عبارت دیگر با نزدیک شدن x به a ، مقادیر $f(x)$ به L_1 و مقادیر $g(x)$ به L_2 نزدیک شوند، مقادیر $f(x) + g(x)$ به $L_1 + L_2$ نزدیک می‌شوند. پس، می‌توانیم نتیجه بگیریم مجموع دو تابع f و g نیز در نقطه a حد دارد و حد آن $L_1 + L_2$ است.

تابع‌های با دامنه یکسان را می‌توان در هم ضرب کرد و تابع دیگری با همان دامنه مشترک به دست آورد. این عمل را ضرب تابع‌ها می‌نامند. برای ضرب دو تابع f و g نیز نتیجه مشابهی به دست می‌آید: اگر با نزدیک شدن x به نقطه a ، مقادیر $f(x)$ به L_1 و مقادیر $g(x)$ به L_2 نزدیک شوند، مقادیر $f(x) \cdot g(x)$ به $L_1 \cdot L_2$ نزدیک می‌شوند. پس می‌توانیم نتیجه بگیریم حاصل ضرب دو تابع f و g نیز در نقطه a حد دارد و حد آن $L_1 \cdot L_2$ است.

با استفاده از نماد حد تابع، می‌توانیم حد مجموع و حاصل ضرب دو تابع را به شکل زیر بنویسیم.

حد مجموع و حاصل ضرب دو تابع

اگر دو تابع f و g (با دامنهٔ یکسان) در $x = a$ حد داشته باشند، آنگاه مجموع و حاصل ضرب‌های این دو تابع نیز در a حد دارند و

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

وضعیت تفاضل تابع‌ها نیز مشابه جمع تابع‌هاست و حد تفاضل دو تابع (با دامنهٔ یکسان) در یک نقطه، برابر است با تفاضل حد آن دو تابع در آن نقطه، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

برای جمع سه تابع (یا بیشتر) نیز حد مجموع آنها در یک نقطه، برابر مجموع حد آن تابع‌ها در آن نقطه است. همچنین، برای ضرب سه تابع (یا بیشتر) نیز حد حاصل ضرب آنها، در یک نقطه، برابر حاصل ضرب حد آن تابع‌ها در آن نقطه است.

مثال ۱۱

حد تابع $f(x) = x^2$ با دامنهٔ \mathbb{R} را در $x = -2$ به دست آورید.

این تابع به صورت ضرب تابع $g(x) = x$ با دامنهٔ \mathbb{R} در خودش است و داریم $\lim_{x \rightarrow -2} x = -2$ ، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow -2} x^2 = \lim_{x \rightarrow -2} (x \cdot x) = \left(\lim_{x \rightarrow -2} x \right) \left(\lim_{x \rightarrow -2} x \right) = (-2)(-2) = 4$$

مثال ۱۲

حد تابع $f(x) = x^2$ با دامنه \mathbb{R} را در نقطه دلخواه a به دست آورید.

طبق مثال (۹)، داریم $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ و می توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = \lim_{x \rightarrow a} (x \cdot x) = (\lim_{x \rightarrow a} x)(\lim_{x \rightarrow a} x) = a \cdot a = a^2$$

مثال ۱۳

حد تابع $k(x) = 6x$ با دامنه \mathbb{R} را در $x=2$ به دست آورید.

تابع $k(x)$ به صورت ضرب تابع $g(x) = x$ در تابع ثابت $f(x) = 6$ با دامنه \mathbb{R} است. پس می توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} 6x = (\lim_{x \rightarrow 2} 6)(\lim_{x \rightarrow 2} x) = 6 \times 2 = 12$$

مثال ۱۴

حد تابع $f(x) = x^2 + x - 5$ با دامنه \mathbb{R} را در $x=2$ به دست آورید.

این تابع به صورت مجموع سه تابع $g(x) = x^2$ و $h(x) = x$ و تابع ثابت $k(x) = -5$ است. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 5) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} (-5) = 2^2 + 2 - 5 = 1$$

مثال ۱۵

حد تابع $h(x) = x^3$ با دامنه \mathbb{R} را در نقطه دلخواه a به دست آورید.

اگر تابع $g(x) = x$ با دامنه \mathbb{R} را سه بار در خودش ضرب کنیم، تابع h به دست می آید. پس می توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^3 = \lim_{x \rightarrow a} (x \cdot x \cdot x) = (\lim_{x \rightarrow a} x)(\lim_{x \rightarrow a} x)(\lim_{x \rightarrow a} x) = a \cdot a \cdot a = a^3$$

کاردرکلاس ۴



(الف) حد تابع $f(x) = x^3 - 5x^2$ با دامنه \mathbb{R} را در $x=-1$ به دست آورید.

(ب) حد تابع $f(x) = x^3 - 5x^2$ با دامنه \mathbb{R} را در یک نقطه دلخواه a به دست آورید.



سعید گفت: در تمام مثال‌هایی که تاکنون از تابع‌های چندجمله‌ای دیدیم، حد آنها در هر نقطه، همان مقدار تابع در آن نقطه بود. آیا این مطلب برای همهٔ تابع‌های چندجمله‌ای درست است؟
دبیر گفت: به نکتهٔ خوبی توجه کردی. فعالیت زیر می‌تواند جوابی برای سؤال شما فراهم کند.



۱ با به دست آوردن حد تابع‌های داده‌شده، جدول زیر را کامل کنید. دامنهٔ این تابع‌ها \mathbb{R} می‌باشند.

$f(x)$	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^n
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	a	a^2	a^3				

۲ توضیح دهید چرا برای تابع چندجمله‌ای $f(x) = bx^n$ با دامنهٔ \mathbb{R} برای یک نقطهٔ دلخواه a داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} bx^n = ba^n$$

۳ حد تابع چندجمله‌ای $P(x) = 4x^5 - 3x^3 + 7x - 4$ با دامنهٔ \mathbb{R} را در نقطهٔ دلخواه a به دست آورید.

در این فعالیت، ابتدا حد تابع‌هایی به صورت x^n را در نقاط دلخواه به کمک حد حاصل ضرب تابع‌ها به دست آوردیم. سپس، حد تابع‌هایی به صورت bx^n را در نقاط دلخواه به دست آوردیم. سپس، برای یک چندجمله‌ای خاص، به کمک حد مجموع تابع‌ها، مشاهده کردیم که حد آن تابع چندجمله‌ای در هر نقطه‌ای برابر با مقدار آن تابع در آن نقطه است. این مطلب برای هر تابع چندجمله‌ای دلخواهی برقرار است.

برای هر تابع چندجمله‌ای مانند $P(x)$ با دامنهٔ \mathbb{R} برای یک نقطهٔ دلخواه a داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$$



سعید پرسید: دیدیم که تابع‌ها را می‌توانیم با هم جمع یا در هم ضرب کنیم و تابع جدیدی به دست آوریم.

آیا تابع‌ها را می‌توانیم بر هم تقسیم کنیم؟

دیبر گفت: بله، تقسیم تابع‌ها نیز همانند ضرب تابع‌هاست. ولی باید دقت کنیم که مقادیر تابعی که در مخرج

قرار می‌گیرد، صفر نباشند. اگر f و g دو تابع با دامنهٔ یکسان D باشند و به ازای هر x در دامنهٔ D داشته

باشیم: $g(x) \neq 0$ ، آنگاه می‌توانیم تابعی با قانون $\frac{f(x)}{g(x)}$ و دامنهٔ D بسازیم که آن را تابع تقسیم f بر g

می‌نامند. این گونه تابع‌ها را **تابع کسری** می‌نامیم و f را تابع صورت کسر و g را تابع مخرج کسر می‌نامند.

سعید پرسید: آیا برای محاسبهٔ حد تقسیم دو تابع نیز روشی داریم؟

دیبر گفت: در موارد خاصی می‌توانیم حد تقسیم دو تابع را هم به دست آوریم.

فرض کنید حد دو تابع f و g (با دامنهٔ یکسان) در نقطهٔ a به ترتیب L_1 و L_2 باشند و $L_2 \neq 0$. با نزدیک

شدن مقادیر x به a ، مقادیر $f(x)$ به L_1 و مقادیر $g(x)$ به L_2 نزدیک می‌شوند. بنابراین، مقادیر $\frac{f(x)}{g(x)}$

به $\frac{L_1}{L_2}$ نزدیک می‌شوند و می‌توانیم نتیجه بگیریم تابع تقسیم f بر g در نقطهٔ a حد دارد و حد آن $\frac{L_1}{L_2}$ است.

حد حاصل تقسیم دو تابع

فرض کنید دو تابع f و g (با دامنهٔ یکسان) در یک نقطه مانند a حد داشته باشند و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ، آنگاه تابع تقسیم f بر g نیز در نقطهٔ a حد دارد و

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

مثال ۱۶

تابع $h(x) = \frac{3x}{x^2+1}$ با دامنهٔ \mathbb{R} را در نظر بگیرید.

(الف) حد این تابع را در نقطهٔ $x = -1$ به دست آورید.

(ب) حد این تابع را در نقطهٔ دلخواه a به دست آورید.

تابع h به صورت تقسیم تابع $3x$ بر تابع x^2+1 در دامنهٔ \mathbb{R} است. حد تابع مخرج در $x = -1$ برابر ۲ است که عددی ناصفر است. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x}{x^2+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} 3x}{\lim_{x \rightarrow -1} (x^2+1)} = \frac{-3}{(-1)^2+1} = -\frac{3}{2}$$

اما در نقطه دلخواه a حد تابع مخرج این کسر برابر a^2+1 است که عددی ناصفر است. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3}{x^2+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} x^3}{\lim_{x \rightarrow a} x^2+1} = \frac{a^3}{a^2+1}$$

مثال ۱۷

تابع $g(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1}$ را با دامنه $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ در نظر بگیرید.

(الف) حد این تابع را در $x = 3$ به دست آورید.

(ب) حد این تابع را در نقطه دلخواه a از دامنه آن به دست آورید.

تابع g به صورت تقسیم تابع x^3+1 بر تابع x^2-1 در دامنه داده شده است. در نقطه ۳، حد تابع مخرج برابر ۸ است ($8 \neq 0$). بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3+1}{x^2-1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^3+1}{\lim_{x \rightarrow 3} x^2-1} = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}$$

اما در نقطه دلخواه a ، حد تابع مخرج این کسر برابر a^2-1 است. چون a در دامنه تابع است نمی تواند ۱ یا -1 باشد و داریم $a \neq \pm 1$. پس، $a^2-1 \neq 0$. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3+1}{x^2-1} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} x^3+1}{\lim_{x \rightarrow a} x^2-1} = \frac{a^3+1}{a^2-1}$$

سعید پرسید: اگرچه در تقسیم دو تابع، مقادیر تابع مخرج کسر، هیچگاه صفر نمی شود، ولی حد آن در یک نقطه ممکن است صفر شود. در این حالت، آیا می توانیم در مورد حد آن تابع کسری در آن نقطه، چیزی بگوییم؟

گفتگو



دبیر گفت: در این حالت، بررسی وجود حد و محاسبه حد کمی مشکل تر است. باید ببینیم حد تابع صورت کسر در آن نقطه (در صورت وجود) چگونه است. دو حالت ممکن است پیش آید: یا حد صورت کسر صفر است یا حد صورت کسر ناصفر است.

حمید گفت: در حالتی که حد صورت کسر عددی ناصفر باشد، آیا می‌توانیم بگوییم چون عدد ناصفر تقسیم بر صفر، بی‌نهایت است پس تابع کسری در آن نقطه حد ندارد؟

دبیر گفت: خیر، این طوری نباید بگوییم. نباید از تقسیم عدد بر صفر صحبت کنیم، چون این عمل تعریف نشده است. همچنین، بی‌نهایت عدد نیست تا بخواهد با چیزی برابر شود. ولی وقتی حد صورت یک تابع کسری در نقطه‌ای عددی ناصفر و حد تابع مخرج، صفر باشد، می‌توان نتیجه گرفت که تابع کسری در آن نقطه خاص، حد ندارد. زیرا با نزدیک شدن متغیر به آن نقطه، مقادیر تابع به هیچ عدد خاصی نزدیک نخواهند شد.

سعید پرسید: درحالتی که حد تابع صورت و تابع مخرج یک تابع کسری در یک نقطه صفر شوند، دربارهٔ حد آن تابع چه می‌توانیم بگوییم؟

دبیر گفت: در این حالت، وجود یا نبود حد، بستگی به تابع‌های صورت و مخرج آن تابع کسری دارد. ممکن است تابع کسری حد داشته باشد یا نداشته باشد. به همین دلیل این حالت را **مبهم** نامیده‌اند. در این حالت، برای تشخیص وجود یا نبود حد، هر تابع کسری را باید جداگانه بررسی کرد.

مثال ۱۸

حد تابع $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ با دامنهٔ $(0, 1)$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

حد تابع صورت و تابع مخرج این کسر در $x = 1$ ، صفر است و با یک حالت مبهم روبه‌رو هستیم. در این مثال، می‌توانیم تابع‌های صورت و مخرج را به صورت ضرب یک چندجمله‌ای در $x - 1$ بنویسیم و با ساده‌سازی به شکل زیر حد را محاسبه کنیم.

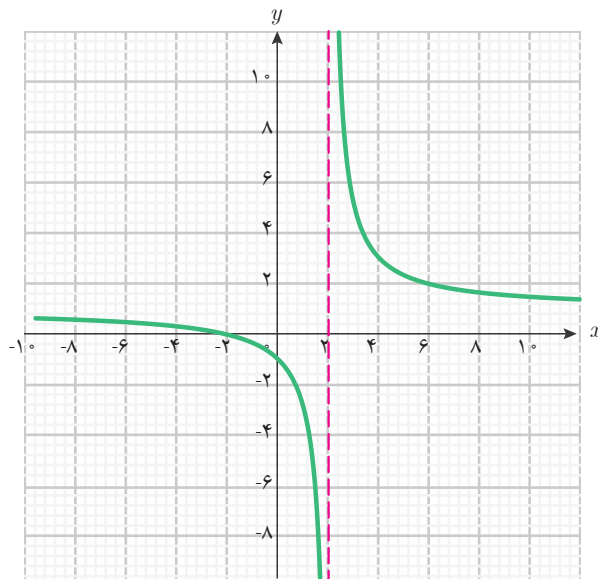
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x - 2}{\lim_{x \rightarrow 1} x + 1} = \frac{-1}{2}$$

توجه داشته باشید که در محاسبات بالا، مقادیر $x - 1$ همواره ناصفراند (زیرا x هیچ‌گاه برابر ۱ نخواهد شد) پس این عامل را می‌توان از صورت و مخرج ساده کرد. در حالت کلی، وقتی تابع‌های صورت و مخرج چندجمله‌ای باشند و حد هر دو تابع در نقطه‌ای مانند a صفر شوند، می‌توان آنها را به صورت ضرب عواملی در $x - a$ نوشت و عامل $x - a$ را از صورت و مخرج ساده کرد.

مثال ۱۹

حد تابع $\frac{x^2 - 4}{(x - 2)^2}$ را با دامنه $(0, 2)$ در $x = 2$ بررسی کنید.

در این مثال نیز حد تابع صورت و تابع مخرج این کسر در $x = 2$ صفر است و با یک حالت مبهم روبه‌رو هستیم. صورت و مخرج را به شکل ضرب عامل‌هایی در $x - 2$ می‌نویسیم و پس از ساده‌سازی آن، به کسر $\frac{x + 2}{x - 2}$ می‌رسیم. پس از این ساده‌سازی، به یک تابع کسری می‌رسیم که حد تابع صورت در نقطه $x = 2$ عددی ناصفر است ولی حد تابع مخرج کسر در این نقطه صفر است. بنابراین تابع کسری داده شده، در نقطه $x = 2$ حد ندارد. نتیجه به دست آمده را به کمک شکل بهتر می‌توانید بررسی کنید.



مثال ۲۰

حد تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{0\}$ را در صفر به دست آورید.

تابع f ، یک تابع کسری است که حد تابع صورت و تابع مخرج آن در نقطه صفر، برابر صفر است. پس با یک حالت مبهم روبه‌رو هستیم. در اینجا تابع صورت، چندجمله‌ای نیست و نمی‌توانیم از روش

ساده‌سازی استفاده کنیم. اما روش محاسبه مستقیم مقادیر تابع در نزدیکی‌های نقطه حدگیری، همواره قابل انجام است. حد این تابع را با این روش، در «کار در کلاس (۱)» به دست آورده‌ایم و دیدیم که این تابع در نقطه صفر حد دارد و حد آن ۱ است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

اگر برای محاسبه حد یک تابع، نتوانیم از روش‌هایی مانند ساده‌سازی و روش‌های دیگر استفاده کنیم، همواره می‌توان از روش محاسبه مستقیم مقادیر تابع در نزدیکی‌های نقطه حدگیری استفاده کنیم و با تشکیل جدول مقادیر تابع در نزدیکی‌های نقطه حدگیری، وجود حد، مقدار حد یا نبود حد را حدس بزنیم.

کار در کلاس ۵



وجود حد تابع‌های زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید. در صورت وجود حد، آن را بیابید و با نماد حد بنویسید.

الف) تابع $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{3\}$ در $x = 3$.

ب) تابع $\frac{(x+1)\sin x}{x(x+2)}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$ در $x = 0$ (راهنمایی: این تابع را به صورت ضرب دو تابع مناسب بنویسید).

پ) تابع $\frac{x^2 + x - 4}{x^2 - 16}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{-4, 4\}$ در $x = -4$.



۱ حد تابع‌های زیر را در نقطه داده شده، در صورت وجود، بیابید.

الف) تابع $g(x) = x^3 - 2x$ با دامنه \mathbb{R} در نقطه دلخواه a .

ب) تابع $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ با دامنه $(1, 5)$ در نقطه $x = 3$ و در نقطه $x = 1$.

پ) تابع $h(x) = \frac{x - x^3}{x + 1}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{-1\}$ در نقطه دلخواه a .

۲ حد تابع $h(x) = \frac{x^2 + x - 2}{4 - x^2}$ با دامنه $(-\infty, -2)$ در -2 را در صورت وجود بیابید.

۳ حد تابع $h(x) = \frac{x^2 - x - 4}{4 + x^2}$ با دامنه \mathbb{R} را در نقطه دلخواه a بیابید.

۴ تابع $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 4}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ در چه نقاطی حد ندارد؟

۵ تابع $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - x}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ را در نظر بگیرید. وجود حد این تابع را در نقاط صفر و ۱ بررسی کنید.

۶ تابع $g(x) = \frac{(x + x^3)\sin x}{x^2(1-x)}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا این تابع در صفر حد دارد؟ حد آن را در صورت وجود بیابید.

ب) آیا این تابع در ۱ حد دارد؟ حد آن را در صورت وجود بیابید.

استانداردهای ارزشیابی پودمان ۲

نمره	شاخص تحقق	سطوح انتظارات	استاندارد عملکرد (کیفیت)	تکالیف عملکردی (واحدهای یادگیری)	عنوان پودمان
۳	□ حل مسائل حل نشده در کلاس و کتاب درسی مرتبط با حد تابعها	بالاتر از حد انتظار	حل مسائل مرتبط با حد تابعها	انجام محاسبات مربوط به حد تابعها	پودمان دوم: درک مفهوم حد
۲	□ حل مسائل مشابه مسائل حل شده در کلاس و مشابه کتاب درسی مرتبط با حد تابعها	در حد انتظار			
۱	□ تشخیص وجود حد و یافتن مقدار آن از روی نمودار و جدول □ محاسبه حد مجموع، حاصل ضرب و تقسیم تابعها	پایین تر از حد انتظار			
	نمره مستمر از ۵:				
	نمره واحد یادگیری از ۳:				
	نمره واحد یادگیری از ۲۰:				