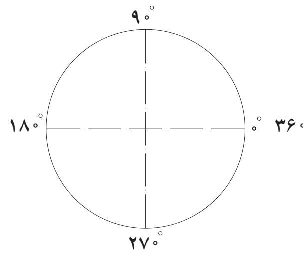
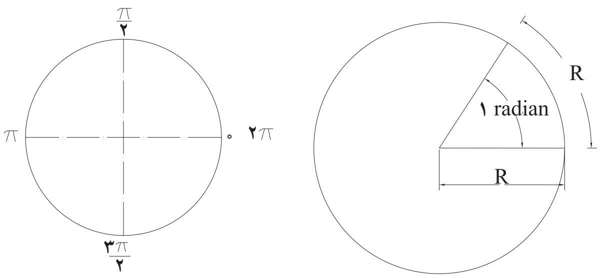
واحد یادگیری ۴
روش‌های محاسبهٔ زاویه

۴ـ۱ـ واحدهای زاویه

درجه (Degree): یک درجه(1°) ، $\frac{1}{360}$ زاویهٔ مرکزی دایرهٔ کامل است. یک درجه برابر ۶۰ دقیقه و هر دقیقه معادل ۶۰ ثانیه است.



رادیان(Radian): یک رادیان (۱radian)، $\frac{۱}{۶/۲۸}=\frac{۱}{۲\pi}$ زاویهٔ مرکزی دایرهٔ کامل است.

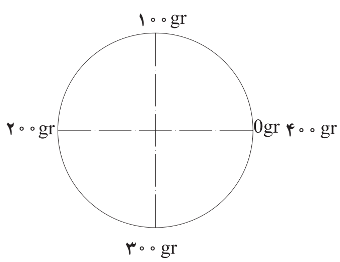


$$\theta=\frac{L}{r}$$

θ: زاویه به رادیان — L: طول قوس مقابل زاویه — r: شعاع دایره

(۱radian=۵۷,۳°)

گـــراد(Grad) : یـک گـراد(۱grad)، $\frac{۱}{۴۰۰}$ زاویـهٔ مرکزی دایرهٔ کامل اسـت.یک گـراد برابـر ۱۰۰ دقیقهٔ گرادی است.



تبدیل‌های واحد زاویه:

جدول ۴ـ۱ـ ضرایب تبدیل یکاهای زاویه

۳۶۰۰"	۶۰'	۱°	$\frac{\pi}{۱۸۰}$ radian	$\frac{۴۰۰}{۳۶۰}=\frac{۱۰}{۹}$ *grad*
ثانیه	دقیقه	درجه	رادیان	گراد
second	minute	Degree (D)	radian	grad

مثال: یک رادیان چند ثانیهٔ درجه‌ای است؟

$$۱\ \text{radian}\times\frac{۳۶۰۰''}{\frac{\pi}{۱۸۰}\text{radian}}=\frac{۳۶۰۰\times۱۸۰}{\pi}=۲۰۶۲۶۵''$$

۴ـ۱ـ۱ـ محاسبهٔ زوایای مثلث

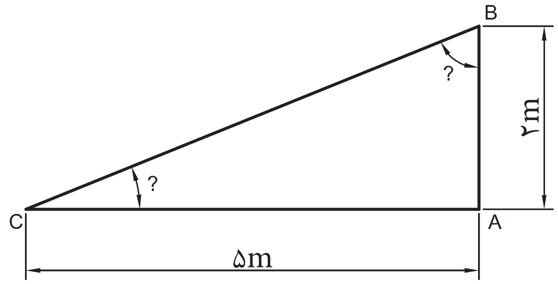
الـف. محاسـبهٔ زوایای مثلـث قائم‌الزاویـه: هـرگاه در مثلـث قائم‌الزاویـه دو ضلع معلـوم باشـد، با اسـتفاده از نسـبت‌های مثلثاتـی می‌تـوان زوایـای مثلـث را محاسـبه نمود.

پرسش کلاسی

مثال ۱: در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل ۴ـ۱ اندازهٔ زاویه‌های B و C چند درجه است؟

$$\tan \hat{C} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$$
$$\Rightarrow \hat{C} = \tan^{-۱}(۰/۴)$$
$$\Rightarrow \hat{C} = ۲۱/۸۰^\circ$$

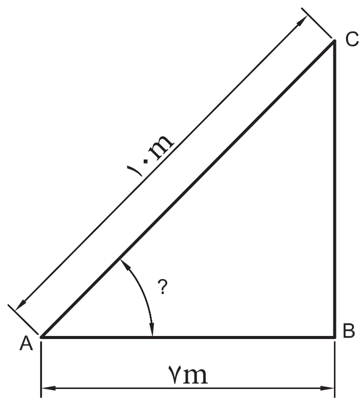
$$\tan \hat{B} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$
$$\Rightarrow \hat{B} = \tan^{-۱}(۲/۵) \Rightarrow \hat{B} = ۶۸/۲۰^\circ$$



شکل ۴ـ۱ ▲

مثال ۲: در شکل ۴ـ۲ اندازهٔ زاویهٔ A چند درجه است؟

$$\cos A = \frac{۷}{۱۰} = ۰/۷ \Rightarrow \hat{A} = ۴۵^\circ ۳۴'$$

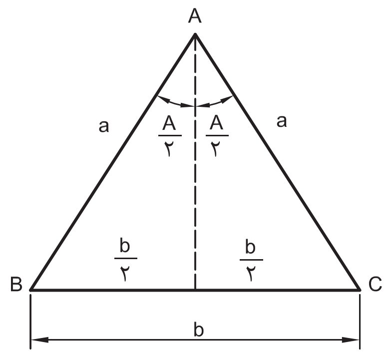


شکل ۴ـ۲ ▲

ب. محاسبهٔ زوایای مثلث متساوی‌الساقین: در مثلث متساوی‌الساقین ABC (شکل ۴ـ۳) ارتفاع نظیر رأس A، نیمساز زاویهٔ A و عمودمنصف ضلع مقابل به زاویهٔ A بر هم منطبق می‌باشند؛ بنابراین با توجه به روابط مثلثاتی داریم:

$$\sin(\frac{A}{۲}) = \frac{\frac{b}{۲}}{a} = \frac{b}{۲a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin(\frac{A}{۲}) = \frac{b}{۲a}}$$



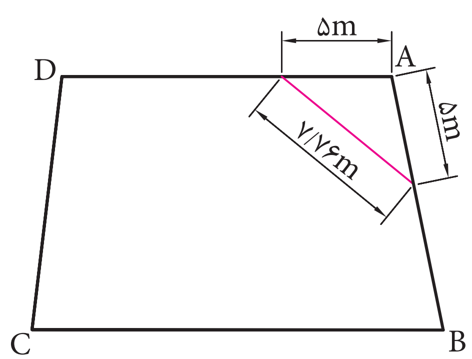
شکل ۴ـ۳ ▲

با استفاده از رابطهٔ فوق مقدار زاویهٔ ($\frac{A}{۲}$) را محاسبه نموده و سپس زاویهٔ A را محاسبه می‌نماییم. با توجه به اینکه زوایای B و C با هم برابرند، خواهیم داشت:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}+۲\hat{B}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \boxed{\hat{B}=\hat{C}=\frac{۱۸۰^\circ - A}{۲}}$$

پرسش کلاسی

مثال: برای اندازه‌گیری زاویهٔ A در گوشهٔ یک زمین، دو طول مساوی ۵ متری در روی دو ضلع آن جدا کرده و سپس ضلع سوم آن‌را اندازه‌گیری نموده‌ایم (شکل ۴ـ۴). اندازهٔ زاویهٔ A چند درجه است؟



شکل ۴ـ۴ ▲

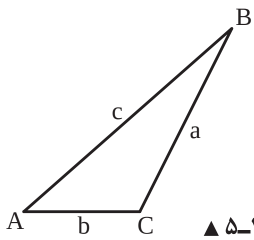
حل:

$$\sin\frac{A}{۲}=\frac{b}{۲a}=\frac{۷/۷۶}{۲\times۵}=۰/۷۷۶ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{۲}=۵۰^\circ۵۴' \Rightarrow \hat{A}=۱۰۱^\circ۴۸'$$

ج. محاسبهٔ زوایای داخلی مثلث غیرمشخص:

۱ــ رابطـهٔ کسـینوس‌ها: هـر گاه سـه ضلـع مثلثی معلوم باشـد با اسـتفاده از رابطه کسـینوس‌ها می‌تـوان زوایای مثلث را محاسـبه نمود.

در مثلث ABC شکل ۴ــ۵ داریم:



شکل ۴ــ۵ ▲

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A$$
$$b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ac\cos B$$
$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos C$$

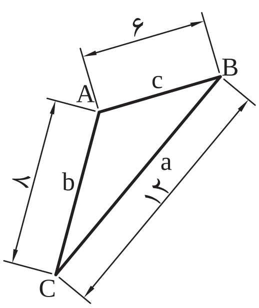
بـا اسـتفاده از روابـط بـالا که بـه رابطهٔ کسـینوس‌ها معـروف اسـت، می‌توانیم زوایـای مثلـث را به‌صـورت روبه‌رو بنویسـیم:

$$\cos A = \frac{b^۲ + c^۲ - a^۲}{۲bc}$$
$$\cos B = \frac{a^۲ + c^۲ - b^۲}{۲ac}$$
$$\cos C = \frac{a^۲ + b^۲ - c^۲}{۲ab}$$

پرسش کلاسی

مثال ۱: زوایای مثلث ABC (شکل ۴ــ۶) چند درجه است؟

حل:



شکل ۴ــ۶ ▲

$$\cos A = \frac{b^۲ + c^۲ - a^۲}{۲bc} = \frac{۸^۲ + ۶^۲ - ۱۲^۲}{۲\times۸\times۶} = \frac{۶۴ + ۳۶ - ۱۴۴}{۲\times۸\times۶}$$
$$\cos A = -۰/۴۵۸۳ \Rightarrow \hat{A} \simeq ۱۱۷^\circ ۱۷'$$

برای زاویهٔ B داریم:

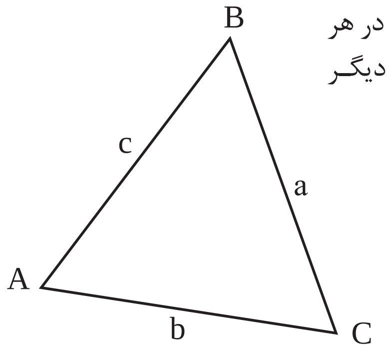
$$\cos B = \frac{a^۲ + c^۲ - b^۲}{۲ac} = \frac{۱۲^۲ + ۶^۲ - ۸^۲}{۲\times۱۲\times۶} = \frac{۱۴۴ + ۳۶ - ۶۴}{۲\times۱۲\times۶} = ۰/۸۰۵۶ \Rightarrow \hat{B} = ۳۶^\circ ۲۰'$$

برای زاویهٔ C داریم:

$$\cos C = \frac{a^۲ + b^۲ - c^۲}{۲ab} = \frac{۱۲^۲ + ۸^۲ - ۶^۲}{۲\times۱۲\times۸} = \frac{۱۴۴ + ۶۴ - ۳۶}{۲\times۱۲\times۸} = ۰/۸۹۵۸ \Rightarrow \hat{C} \simeq ۲۶^\circ ۲۳'$$

بـرای اطمینـان از درسـتی محاسـبات، زوایـای به‌دسـت آمـده را بـا هم جمـع می‌کنیم کـه باید جمع آنها ۱۸۰° شود.

۲ـ رابطه سینوس‌ها: هرگاه دو ضلع و زاویه مقابل به یکی از آنها در هر مثلث معلوم باشد با استفاده از رابطه سینوس‌ها می‌توان زوایای دیگر مثلث را محاسبه کرد.



شکل ۴ـ۷ ▲

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۱۷^\circ۱۷'+۳۶^\circ۲۰'+۲۶^\circ۲۳'=۱۸۰^\circ$$

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}}$$

پرسش کلاسی

مثال۲: در مثلث ABC شکل ۴ـ۷ اگر a=۱۵m و b=۱۰m و A=۶۰° باشد، زوایای B و C را به‌دست آورید.

حل:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{۱۵}{\sin ۶۰}=\frac{۱۰}{\sin B}\Rightarrow \sin B=\frac{۱۰\times\sin ۶۰}{۱۵}$$

$$\Rightarrow \sin B=۰/۵۷۷\Rightarrow B=\sin^{-۱}(۰/۵۷۷)$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{B}=۳۵/۲۶^\circ}$$

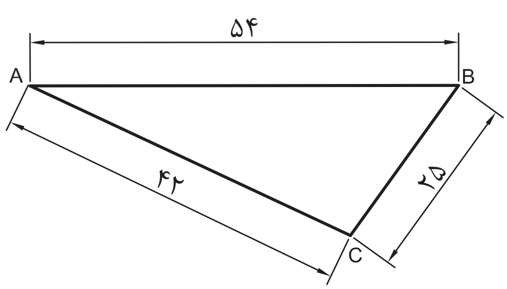
برای محاسبه زاویه C کافی‌است مجموع زوایای A و B را از ۱۸۰° کم نماییم.

$$\hat{C}=۱۸۰^\circ-(\hat{A}+\hat{B})\Rightarrow \hat{C}=۱۸۰^\circ-(۶۰+۳۵/۲۶)$$

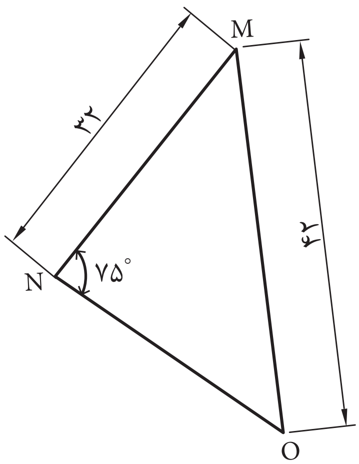
$$\Rightarrow \boxed{\hat{C}=۸۴/۷۴^\circ}$$

تمرین

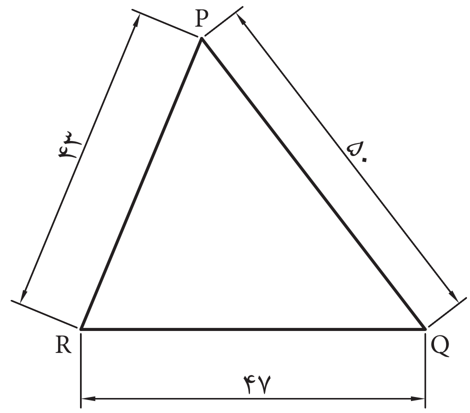
زوایای مثلث‌های شکل‌های ۴ـ۸، ۴ـ۹ و ۴ـ۱۰ را محاسبه کنید.



شکل ۴ـ۸▲



شکل ۴ـ۱۰ ▲



شکل ۴ـ۹ ▲

د. محاسبه زوایای داخلی یک چندضلعی منتظم

به یک n ضلعی که اضلاع آن با هم برابر باشند، n ضلعی منتظم گفته می‌شود.

مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی برابر است با: $(n-۲)۱۸۰^\circ$

پرسش کلاسی

مثال: مجموع زوایای داخلی یک ۵ ضلعی برابر است با: $(۵-۲)\times ۱۸۰^\circ = ۵۴۰^\circ$

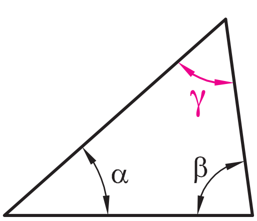
اندازهٔ هر زاویهٔ یک n ضلعی منتظم عبارت‌است از: $\frac{n-۲}{n}\times ۱۸۰^\circ$

پرسش کلاسی

مثال: اندازهٔ هر زاویهٔ یک ۸ ضلعی منتظم عبارت‌است از: $\frac{۸-۲}{۸}\times ۱۸۰^\circ = ۱۳۵^\circ$

تمرین

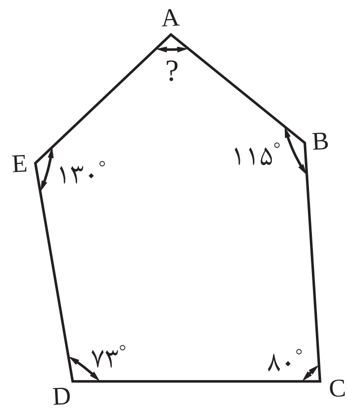
۱ـ در مثلث شکل ۴ـ۱۱ مقدار زاویهٔ γ را به‌دست آورید.
(α=۲۴°۱۸′ و β=۴۷°)



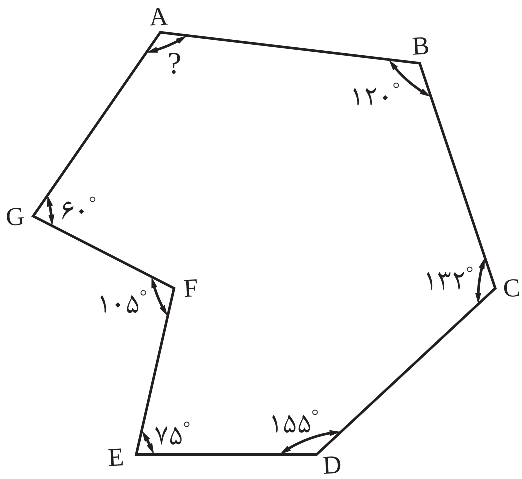
شکل ۴ـ۱۱ ▲

تمرین

۲ــ در شکل‌های ۴ــ۱۲ و ۴ــ۱۳ مقدار زاویهٔ A را محاسبه نمایید.



شکل ۴ــ۱۲ ▲



شکل ۴ــ۱۳ ▲