



پودمان ۳

محاسبه سطح



کار با ماشین حساب و آشنایی با نرم افزار
مفاهیم پایه واحدهای اندازه گیری و تبدیل آنها
روش‌های محاسبه طول، زاویه، سطح، حجم، وزن و مقدار مصالح و زمان انجام کار

واحد یادگیری ۵

محاسبه سطح

۱-۱-۵- متر مربع (m^2)، واحد سطح



$$S = 1 m^2$$

یک مترمربع، مساحت مربعی است که طول هر ضلع آن یک متر است.

۱-۱-۵- تبدیل‌های واحد سطح (A)

جدول ۱-۵- ضرایب تبدیل یکاهای سطح

10^6 میلیمترمربع mm^2	10^4 سانسی مترمربع cm^2	10^2 دسی مترمربع dm^2	۱ مترمربع m^2	10^{-2} دکامترمربع dam^2 (آر)	10^{-4} هکتومترمربع hm^2 (هکتار)	10^{-6} کیلومترمربع km^2
---------------------------------	-----------------------------------	---------------------------------	-----------------------	--------------------------------------------	-----------------------------------------------	------------------------------------

مثال: ۱۵۰۰۰۰ سانسی متر مربع چند کیلومتر مربع است؟

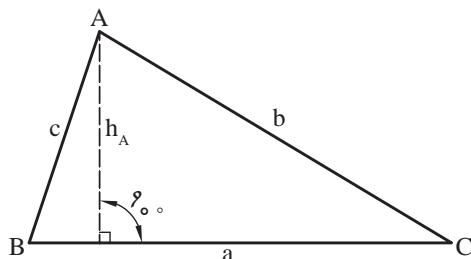
$$150000 \text{ cm}^2 \times \frac{10^{-6} \text{ km}^2}{10^4 \text{ cm}^2} = 1/5 \times 10^5 \times \frac{10^{-6}}{10^4} = 1/5 \times 10^{-5} \text{ km}^2$$

پرسش
کلاسی



۱-۲-۱-۵ محاسبه مساحت مثلث

مساحت مثلث نامشخص ABC (شکل ۱-۵) را می‌توانیم به روش‌های مختلف محاسبه کنیم.



شکل ۱-۵

مساحت مثلث با داشتن اندازهٔ قاعده و ارتفاع آن، برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_A \quad \text{یک دوم قاعده ضرب در ارتفاع}$$

مساحت مثلث با داشتن دو ضلع و زاویهٔ بین آنها، برابر است با:

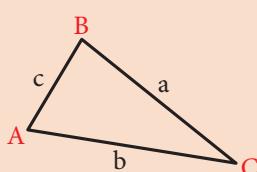
$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C \quad \text{یک دوم حاصل ضرب دو ضلع ضرب در سینوس زاویهٔ بین آنها.}$$

مساحت مثلث با داشتن سه ضلع، برابر است با:

جذر حاصل ضرب نصف محیط مثلث ضرب در نصف محیط مثلث، منهای هر یک از اضلاع آن.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} , \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

آیا می‌دانید
که ...



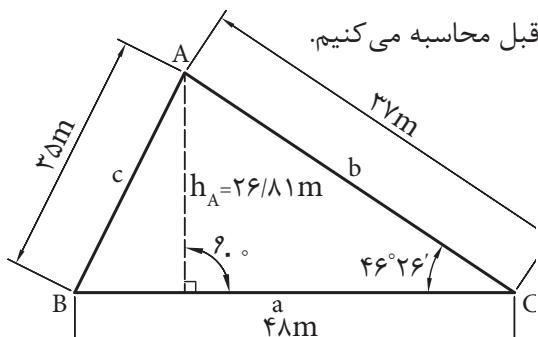
برای محاسبه مساحت در حالتی که سه ضلع آن معلوم است بوزجانی دانشمند مسلمان ایرانی در قرن چهارم هـ. ق فرمول آن را به شکل زیر بیان کرده است.

(که امروزه به فرمول هرون معروف شده است).

تذکر: این فرمول در حقیقت با تغییراتی که روی آن انجام می‌شود فرمول محاسبه مساحت به روش هرون (دانشمند یونانی) به دست می‌آید.



$$S = \sqrt{\left[\left(\frac{c+b}{2} \right)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{a}{2} \right)^2 - \left(\frac{c-b}{2} \right)^2 \right]} = S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



▲ ۲-۵

مثال: در شکل ۲-۵ مساحت ABC را به سه روش صفحه قبل محاسبه می کنیم.

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_A = \frac{1}{2} \times 48 \text{m} \times 26/81 \text{m} = 643/44 \text{m}^2$$

با استفاده از اندازه قاعده و ارتفاع:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 48 \times 37 \times \sin 46^\circ 26'$$

با استفاده از اندازه دو ضلع و زاویه بین آنها:

$$S = \frac{1}{2} \times 48 \times 37 \times \sin 46^\circ 26' = 643/44 \text{m}^2$$

با استفاده از اندازه سه ضلع:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

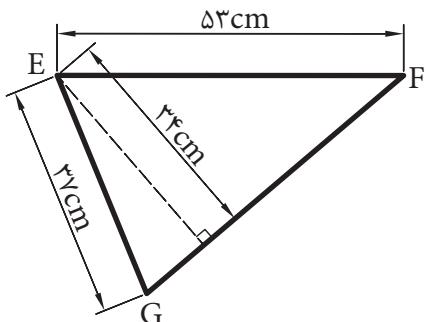
$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{48+37+35}{2} = 60$$

$$S = \sqrt{60(60-48)(60-37)(60-35)}$$

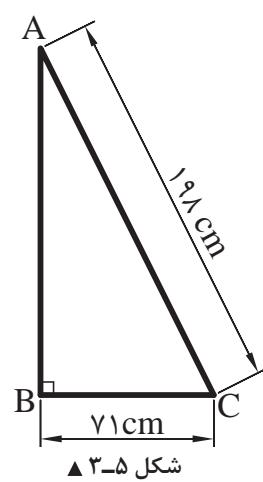
$$S = \sqrt{60(12)(23)(25)} = \sqrt{414000} = 643/44 \text{m}^2$$

نکته: اختلاف حاصل در محاسبه مساحت به دلیل گرد کردن اعداد در محاسبات به وجود آمده است.

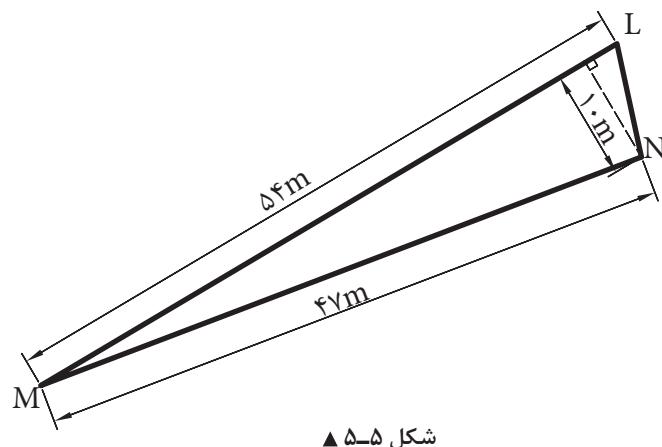
۱- مساحت مثلث های شکل های ۳-۵، ۴-۵ و ۵-۵ را بر حسب متر مربع حساب کنید.



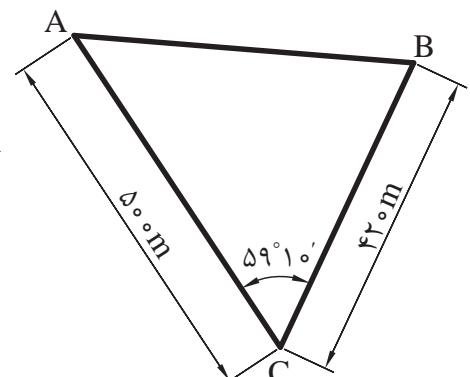
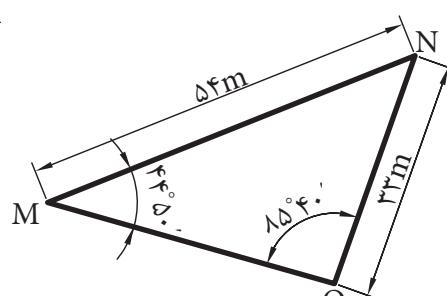
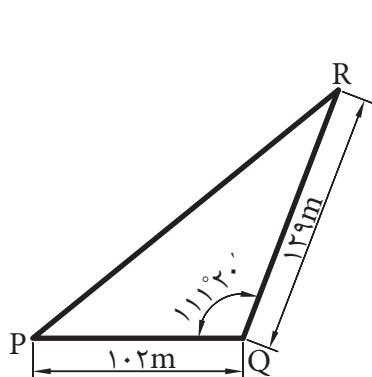
▲ ۴-۵



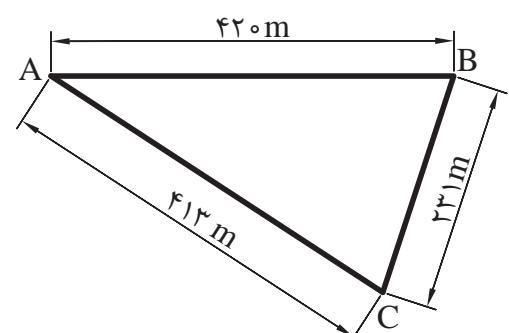
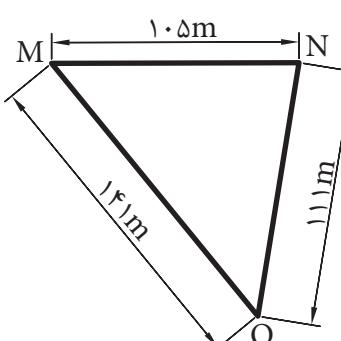
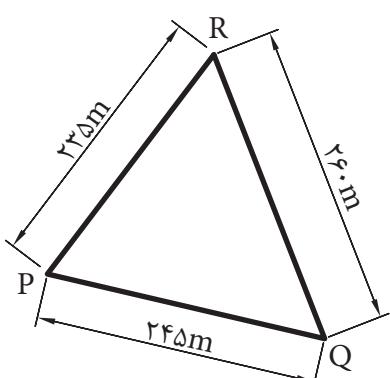
▲ ۵-۵



۲- مساحت مثلث‌های شکل‌های ۶-۵، ۷-۵ و ۸-۵ را بر حسب متر مربع محاسبه کنید.



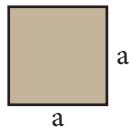
۳- مساحت مثلث‌های شکل‌های ۹-۵، ۱۰-۵ و ۱۱-۵ را بر حسب هکتار محاسبه کنید.



۳-۱-۵- محاسبه مساحت چهارضلعی‌ها

$$S = a^2$$

الف) مساحت مربع به ضلع a برابر است با:



▲ ۱۲-۵

$$S = a \cdot b$$

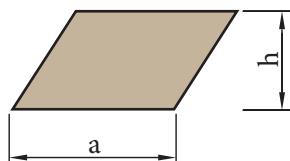
ب) مساحت مستطیل به طول a و عرض b برابر است با:



▲ ۱۳-۵

$$S = a \cdot h$$

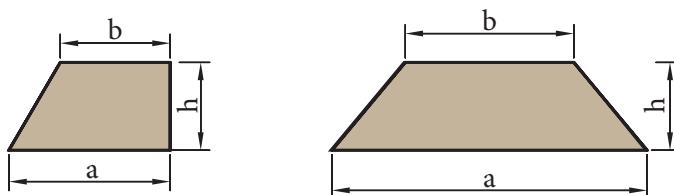
ج) مساحت متوازی‌الاضلاع به قاعده a و ارتفاع h برابر است با:



▲ ۱۴-۵

$$S = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h$$

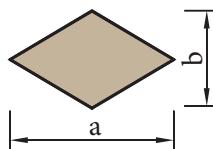
د) مساحت ذوزنقه با قاعده‌های a و b و ارتفاع h برابر است با:



▲ ۱۵-۵

$$S = \frac{1}{2}a \cdot b$$

ه) مساحت لوزی با قطرهای a و b برابر است با:



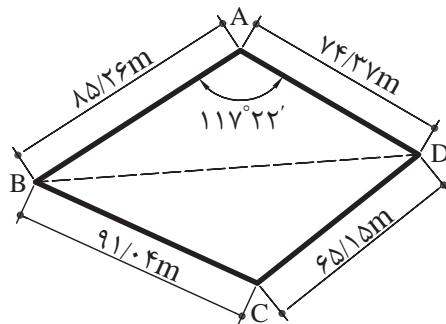
▲ ۱۶-۵

۱-۴-۵- محاسبه مساحت چهارضلعی نامشخص

برای تعیین مساحت یک چهارضلعی نامنظم باید علاوه بر اندازه‌گیری چهار ضلع آن، یک قطر یا یکی از زوایای آن را نیز اندازه‌گیری کنیم.

مثال ۱: در شکل ۱۷-۵ مساحت چهارضلعی ABCD چند متر مربع است؟

پرسش
کلاسی



▲ ۱۷-۵

حل: با رسم قطر BD چهارضلعی ABCD را به دو مثلث تبدیل می‌کنیم.

مساحت مثلث

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} (85/26m)(74/37m) \sin 117^\circ 22' = 2815/57$$

طول قطر BD

$$(BD)^2 = (85/26)^2 + (74/37)^2 - 2(85/26)(74/37) \cos 117^\circ 22'$$

$$(BD)^2 = 18629/67 \Rightarrow BD = 136/49m$$

مساحت مثلث BCD

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} , \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$p = \frac{91/04 + 65/15 + 136/49}{2} = 146/34$$

$$S_{BDC} = \sqrt{146/34(146/34 - 91/04)(146/34 - 65/15)(146/34 - 136/49)}$$

$$S_{BDC} = \sqrt{6471827/81} = 2543/98$$

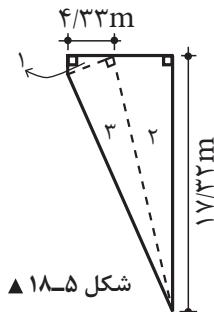
مساحت چهارضلعی ABCD

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BDC} = 2815/57 + 2543/98$$

$$S_{ABCD} = 5359/55m^2$$

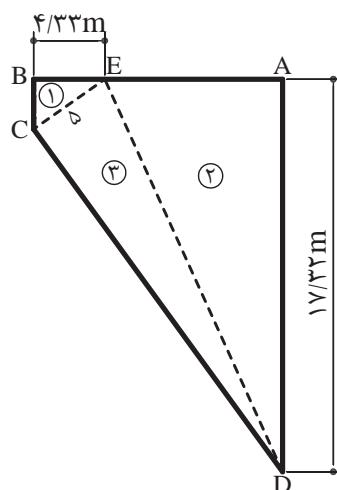


مثال ۲: قطعه زمینی به شکل ذوزنقه قائم الزاویه را به سه قطعه زمین به صورت مثلث قائم الزاویه تفکیک کرده‌ایم. در صورتی که مساحت ذوزنقه برابر $142/0$ متر مربع و مساحت مثلث (۱)، برابر $5/41$ متر مربع باشد، مساحت و طول اضلاع مثلث‌های (۲) و (۳) چقدر است؟ (بر حسب متر مربع و متر).



حل: برای حل این تمرین، ابتدا شکل آن را می‌کشیم و بعد گوشه‌ها را اسم‌گذاری می‌کنیم. طبق صورت مسئله، مساحت مثلث (۱)، $5/41$ متر مربع و اندازهٔ ضلع BE ، $4/33$ متر است. پس با توجه به قائم الزاویه بودن مثلث، ضلع دیگر آن نیز قابل محاسبه است.

شکل کلی این زمین، ذوزنقه است که اضلاع BC و AD قاعده‌های کوچک و بزرگ آن و ضلع AB هم ارتفاع ذوزنقه هستند (اندازهٔ AD در صورت مسئله داده شده و اندازهٔ BC را هم برابر $2/50$ متر به دست آورده‌ایم).



شکل ۱۹-۵

$$S_1 = \frac{BE}{2} \times BC \quad 5/41 = \frac{4/33}{2} \times BC$$

$$5/41 = 2/165 \times BC \Rightarrow BC = \frac{5/41}{2/165} = 2/4988 \approx 2/50 \text{ m}$$

چون مساحت ذوزنقه را داریم، می‌توانیم طول AB را به دست بیاوریم:

$$S_{ذوزنقه} = \frac{AD + BC}{2} \times AB$$

$$142/01 = \frac{17/32 + 2/50}{2} \times AB$$

$$142/01 = 9/91 \times AB \Rightarrow AB = \frac{142/01}{9/91} = 14/33 \text{ m}$$

ارتفاع ذوزنقه

حال اندازه ضلع AE (از مثلث ۲) را می‌توانیم حساب کنیم:

$$AE = AB - BE = 14/33 - 4/33 = 10 \text{ m}$$

$$S_r = \frac{10 \times 17/32}{2} = 86/60 \text{ m}^2$$

و مساحت مثلث (۲) می‌شود:

طول ضلع ED (ضلع سوم یا وتر مثلث ۲) را به دست می‌آوریم:

$$ED^r = AD^r + AE^r$$

$$ED^r = 17/32^r + 10^r = 299/99 + 100 = 399/99 \approx 400$$

$$ED = \sqrt{400} = 20 \text{ m}$$

وتر مثلث (۲)

با توجه به شکل، مشاهده می‌کنیم که وتر به دست آمده، در واقع یک ضلع مثلث (۳) هم می‌باشد. برای به دست آوردن ضلع EC (از مثلث ۳)، باید از مثلث (۱) کمک بگیریم؛ زیرا این ضلع در هر دو مثلث مشترک است. چون دو ضلع از مثلث (۱) را داریم، پس ضلع سوم را حساب می‌کنیم:

$$EC^r = BC^r + BE^r$$

$$EC^r = 2/50^r + 4/32^r = 6/25 + 18/75 = 25$$

$$EC = \sqrt{25} = 5 \text{ m}$$

با داشتن قاعده و ارتفاع مثلث (۳)، مساحت آن می‌شود:

$$S_r = \frac{5 \times 20}{2} = 50 \text{ m}^2$$

$$CD^r = 5^r + 20^r = 25 + 400 = 425$$

مساحت مثلث (۳)

$$CD = \sqrt{425} = 20/61 \text{ m}$$

بالاخره اندازه وتر مثلث (۳) (طول CD) می‌شود:

$$5/41 + 86/6 + 50 = 142/01$$

کنترل صحت مساحت‌ها:

عملیات انجام شده صحیح است.

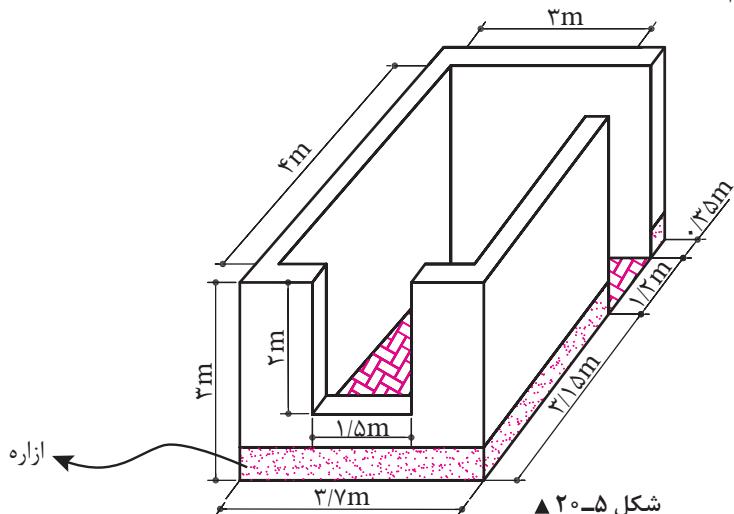


مثال ۳: ابعاد یک اتاق مطابق شکل ۲۰-۵ است:

الف - اگر بخواهیم کف اتاق را با موزاییک فرش کنیم، چند متر مربع موزاییک لازم است؟

ب - در صورتی که بخواهیم دیوارهای اتاق را کاغذدیواری کنیم، چند متر مربع کاغذدیواری لازم است؟

پ - در صورتی که برای ازارة (سنگ پای دیوار) دیوارهای خارجی این ساختمان از سنگ تیشه‌ای استفاده شود، چند متر سنگ تیشه‌ای لازم است؟



حل: ابعاد مندرج روی شکل عبارت اند از:

۳ متر عرض داخلی اتاق، ۳ متر ارتفاع آن، $3/7 \times 3 = 2/80$ متر طول داخلی اتاق، $1/20 \times 3 = 1/50$ متر اندازه پنجره و $1/20$ متر عرض در (ارتفاع در برابر ۳ متر است).

الف - کف اتاق به شکل مستطیل است، پس مساحت آن که همان مساحت موزاییک کاری است برابر می‌شود با:

$$S = 3 \times 4 = 12 \text{ m}^2$$

ب - برای حل این قسمت، سطوح دیوارهای اتاق (سطح جانبی مکعب) را محاسبه و سطوح پنجره و در را از آن کم می‌کنیم.

برای محاسبه سطوح دیوارها می‌توان هر سطح را جداگانه حساب کرد و آنها را با هم جمع نمود. روش ساده‌تر آن است که محیط مستطیل را به دست آوریم و در ارتفاع ضرب کنیم. بنابراین:

$$3 + 4 + 3 + 4 = 14 \text{ m}$$

$$14 \times 3 = 42 \text{ m}^2$$

$$1/50 \times 2 = 3 \text{ m}^2$$

$$1/20 \times 3 = 3/60 \text{ m}^2$$

$$3 + 3/60 = 6/60 \text{ m}^2$$

$$42 - 6/60 = 35/40 \text{ m}^2$$

سطح پنجره

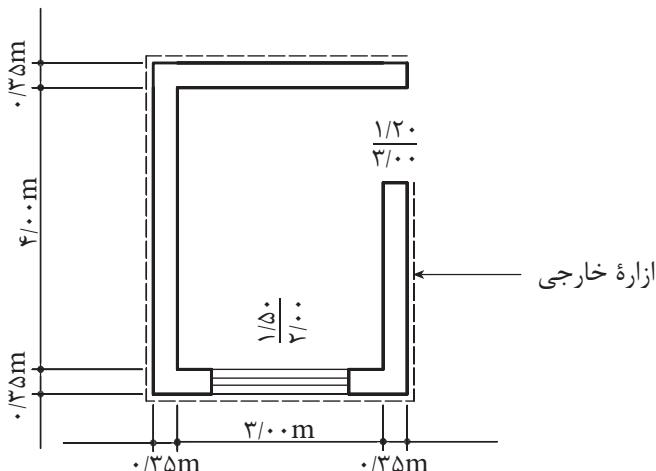
سطح در

سطح در و پنجره

سطح خالص دیوار یا سطح کاغذدیواری

(باید توجه داشت که کناره‌های داخلی در و پنجره هم کاغذدیواری می‌شوند، ولی ما در حل این تمرین، آن قسمت‌ها را منظور نکردیم).

پ - طول سنگ تیشه‌ای که در شکل ۲۱-۵، با خطچین نشان داده شده، برابر است با محیط خارجی اتاق، منهای در ورودی.



▲ ۲۱-۵

$$4+0/35+0/35=4/70\text{m}$$

$$3+0/35+0/35=3/70\text{m}$$

$$4/70+3/70+4/70+3/70=16/80\text{m}$$

$$16/80-1/20=15/60\text{m}$$

اندازه طول خارجی اتاق

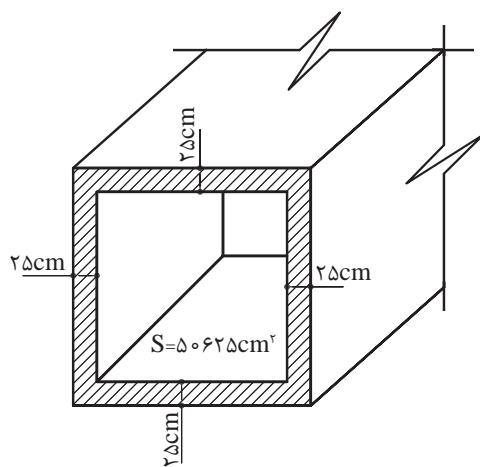
اندازه عرض خارجی اتاق

طول محیط خارجی اتاق

طول سنگ رگی

۱- شکل ۲۲-۵ یک آبروی بتُنی را با مقطع مربع نشان می‌دهد. ابعاد داخلی و خارجی آن را بر حسب متر محاسبه کنید (S مساحت مقطع داخلی آبرو می‌باشد).

تمرین



▲ ۲۲-۵

۲- تعداد ۹۰ عدد موزاییک 30×30 سانتی متر برای فرش کردن سالنی مورد نیاز است.

الف - در صورتی که سالن به شکل مربع باشد، ابعاد آن چند متر است؟

ب - در صورتی که سالن به شکل مستطیل و طول آن $1/44$ برابر عرض آن باشد، ابعاد سالن چند متر است؟

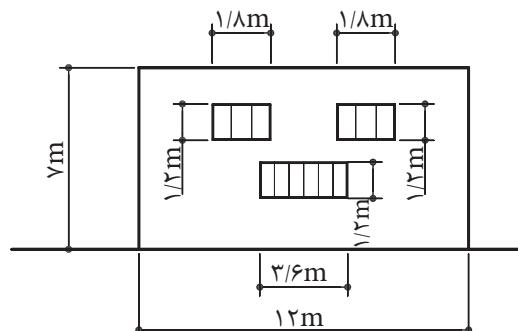
۳- شکل ۲۳-۵ پی بتنی و قالب آن را نشان می دهد. در صورتی که طول و عرض و ارتفاع قالب برابر ۴ متر، ۲ متر و ۶۰ سانتی متر باشد، سطح این قالب چند متر مربع است؟

۴- شکل ۲۳-۵ پی بتنی و قالب آن را نشان می دهد. در صورتی که طول و عرض و ارتفاع قالب برابر ۴ متر، ۲ متر و ۶۰ سانتی متر باشد، سطح این قالب چند متر مربع است؟



▲ ۲۳-۵

۵- شکل ۲۴-۵ نمای یک ساختمان را نشان می دهد. در صورتی که بخواهیم نما را سیمان کاری کنیم، چند متر مربع سیمان کاری خواهیم داشت؟ (ابعاد به متر است).



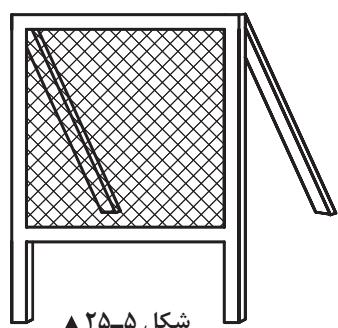
▲ ۲۴-۵

۶- سطح قابل استفاده سرند مربعی شکل (مطابق شکل

(۲۵-۵) باید $116/48$ دسی متر مربع باشد:

الف - ابعاد سرند را برحسب سانتی متر حساب کنید.

ب - اگر بخواهیم ۶ عدد از این سرندها بسازیم، چند متر مربع توری لازم است؛ با درنظر گرفتن اینکه برای میخ کردن توری، از هر طرف ۴ سانتی متر اضافه در نظر گرفته شود.



▲ ۲۵-۵

۷- کف انباری به شکل مستطیل با طول $8/20\text{ m}$ و عرض $4/70\text{ m}$ باید آجرفرش شود.

الف - مساحت انبار را بحسب متر مربع حساب کنید.

ب - در صورتی که برای هر متر مربع 48 عدد آجر لازم باشد، تعداد آجر مورد نیاز چقدر است؟

۸- مطابق شکل ۲۶-۵ اگر ارتفاع اتاقی 3 متر و ارتفاع پنجره $1/07$ متر، ارتفاع در 2 متر و ضخامت دیوارها

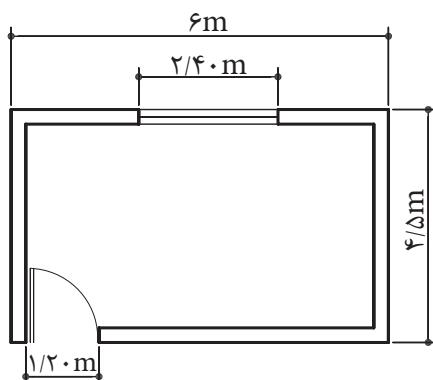
22 سانتی متر باشد، تعیین کنید:

الف - مساحت موزاییک فرش کف را بحسب متر مربع.

ب - سطح سفیدکاری دیوارها و سقف را بحسب متر مربع.

پ - سطح رنگآمیزی دیوارها را به متر مربع.

توجه: در و پنجره در سطح داخلی دیوارها (همرو) نصب شده‌اند.



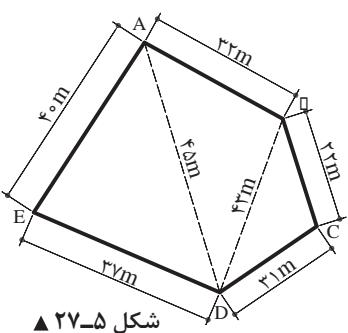
▲ ۲۶-۵

۱-۵- محاسبه مساحت چندضلعی

مساحت چندضلعی غیرمنتظم را از تبدیل آن به چند مثلث یا چهارضلعی‌های مشخصی به دست می‌آوریم.

مثال: یک زمین به شکل پنجضلعی غیرمنتظم ABCDE (شکل ۲۷-۵) داریم. طول اضلاع و طول دو قطر آن اندازه‌گیری شده است. مساحت این چندضلعی چند متر مربع است؟

حل: مساحت این پنجضلعی برابر است با:



▲ ۲۷-۵

پرسش
کلاسی



$$S_{ABCD} = S_{ADE} + S_{ADB} + S_{BDC}$$

$$S_{ADE} = \sqrt{p(p-40)(p-37)(p-45)} , \quad p = \frac{37+40+45}{2} = 61$$

$$S_{ADE} = \sqrt{61(61-40)(61-37)(61-45)} = \sqrt{491904}$$

$$S_{ADE} = 701 / 36 \text{ m}^2$$

$$S_{ADB} = \sqrt{p(p-45)(p-43)(p-32)} , \quad p = \frac{45+43+32}{2} = 60$$

$$S_{ADB} = \sqrt{60(60-45)(60-43)(60-32)} = \sqrt{428400}$$

$$S_{ADB} = 654 / 52 \text{ m}^2$$

$$S_{BDC} = \sqrt{p(p-43)(p-31)(p-22)} , \quad p = \frac{43+31+22}{2} = 48$$

$$S_{BDC} = \sqrt{48(48-43)(48-31)(48-22)} = \sqrt{106080}$$

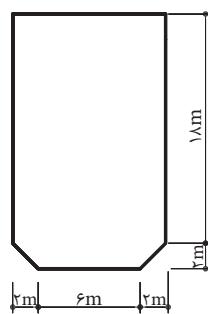
$$S_{BDC} = 325 / 70 \text{ m}^2$$

$$S_{ABCDE} = 701 / 36 \text{ m}^2 + 654 / 52 \text{ m}^2 + 325 / 70 \text{ m}^2 = 1681 / 58 \text{ m}^2$$

مساحت پنج ضلعی

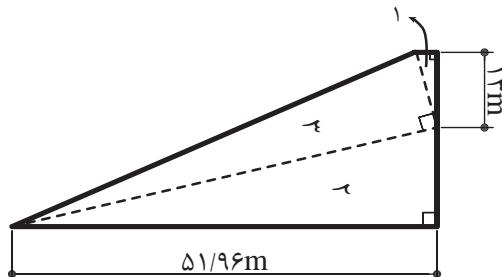
۱- شکل ۲۸-۵ پلان بام یک ساختمان مسکونی را نشان می‌دهد. سطح زیربنای آن چند متر مربع است؟

تمرین



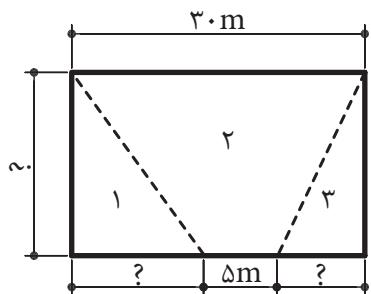
▲ ۲۸-۵

۲- قطعه زمینی به شکل ذوزنقه قائم‌الزاویه را به سه قطعه زمین به صورت مثلث قائم‌الزاویه تفکیک کرده‌ایم. در صورتی که مساحت ذوزنقه برابر $1278/39$ متر مربع و مساحت مثلث (۱) برابر $48/75$ متر مربع باشد، مساحت و طول اضلاع مثلث‌های (۲) و (۳) را بر حسب متر مربع و متر محاسبه کنید. (شکل ۲۹-۵).



شکل ۲۹-۵

۳- زمینی مطابق شکل ۳۰-۵ باید بین ۳ نفر تقسیم شود. اگر مساحت قطعه (۲) برابر 350 متر مربع و مساحت قطعه (۱)، $1/5$ برابر مساحت قطعه (۳) باشد، اندازه‌های مجھول روی شکل را بر حسب متر به دست آورید.

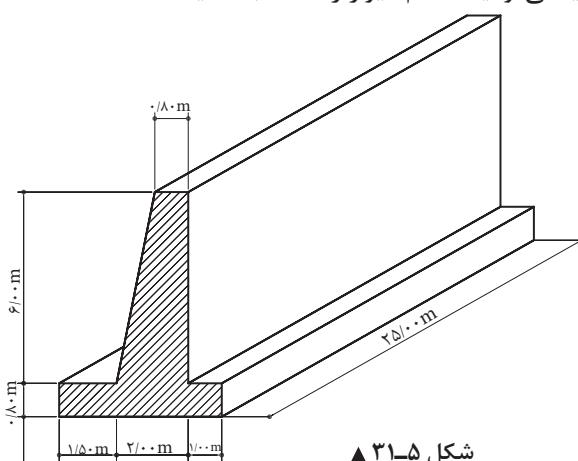


شکل ۳۰-۵

۴- طول دیوار حایل نشان‌داده شده در شکل ۳۱-۵ برابر با 25 متر است.

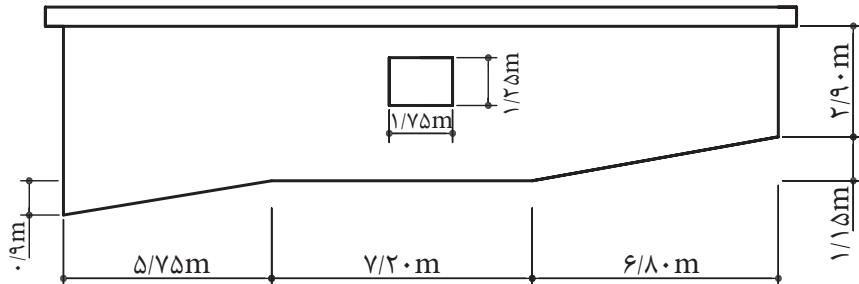
الف - سطح مقطع دیوار را بر حسب متر مربع محاسبه کنید.

ب - نظر به اینکه تاکنون حجم‌شناسی را نگذرانده‌اید؛ آیا می‌توانید حجم دیوار را محاسبه کنید؟



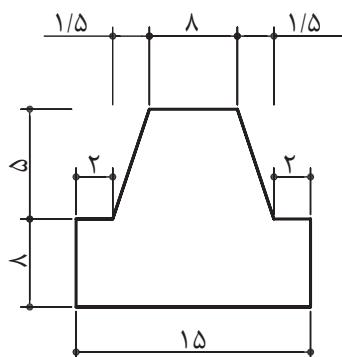
شکل ۳۱-۵

۵- شکل ۳۲-۵ دیوار ساختمانی را نشان می‌دهد که باید اندود شود. مساحت اندودکاری دیوار را بر حسب متر مربع تعیین کنید.



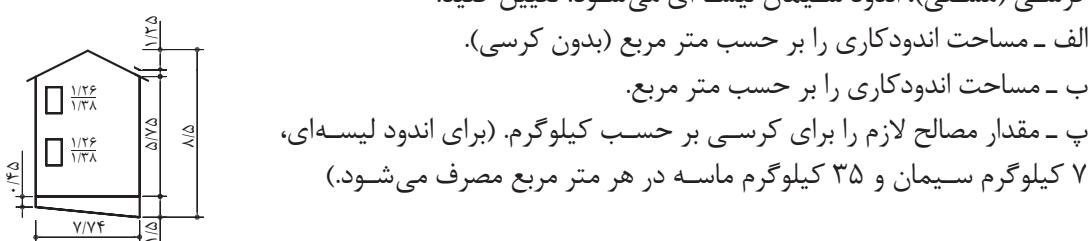
▲ ۳۲-۵

۶- شکل ۳۳-۵ سقف بالکن یک رستوران را نشان می‌دهد که باید اندود شود:
الف - سطح اندودکاری را به متر مربع تعیین کنید.
ب - در صورتی که هر متر مربع اندود، ۱۵ کیلوگرم گچ لازم داشته باشد، مقدار گچ مورد نیاز چند کیلوگرم است؟



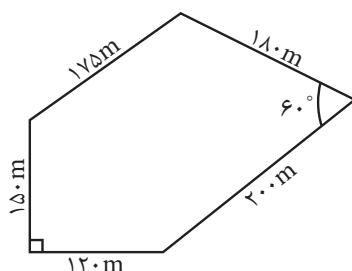
▲ ۳۳-۵

۷- قرار است نمای ساختمانی مطابق شکل ۳۴-۵ دوباره اندود شود. قسمت کرسی (مسنی)، اندود سیمان لیسه‌ای می‌شود. تعیین کنید:



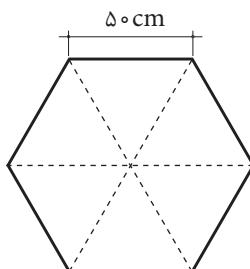
▲ ۳۴-۵

۸- مساحت زمینی مطابق شکل ۳۵-۵ را بر حسب هکتار به دست آورید.



شکل ۳۵-۵

۹- مقطع یک ستون بتن آرمه مطابق شکل ۳۶-۵ به صورت یک شش ضلعی منتظم به طول هر ضلع ۵۰ سانتی متر است. سطح مقطع ستون را بر حسب سانتی متر مربع و متر مربع به دست آورید.



شکل ۳۶-۵

روش محاسبه عدد π توسط غیاث الدین جمشید کاشانی:

محاسبات به کمک دو کثیرالاضلاع منتظم محاطی و محیطی که عده اضلاع هر یک از آنها ضلعی است $3 \times 2^{18} = 805306368$ و از تقسیم محیط این کثیرالاضلاع بر قطر دایره آن عدد پی را محاسبه کرده است و کاشانی مقدار تقریبی را در دستگاه شستگانی مساوی $2\pi = 6,16,59,28,1,34,51,46,14,5$

و سپس آن را به کسرهای اعشاری که اختراع نوینی بوده تبدیل کرد:

$$2\pi = 6/2831853071795865$$

$$\pi = 3/141592653589793$$

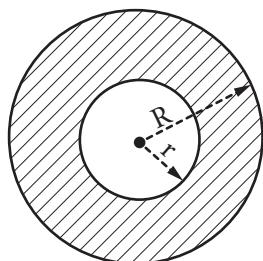
۵-۱-۶-محاسبه مساحت دایره

$$S = \pi r^2$$

مساحت دایره به شعاع r برابر است با:

۵-۱-۷-محاسبه مساحت حلقه

$$S = \pi(R^2 - r^2)$$



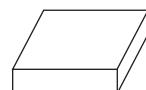
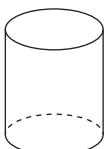
▲ ۳۷-۵

مساحت حلقه بین دو دایره به شعاع‌های R و r برابر است با:

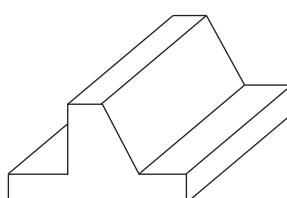
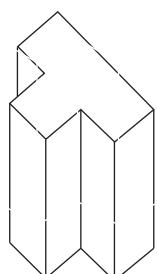
یادآوری: حلقه دایره عبارت است از سطح محصور بین دو دایره هم‌مرکز با شعاع‌های مختلف (شکل ۳۷-۵).

۵-۱-۸-محاسبه سطح جانبی و سطح کل احجام هندسی و احجام مرکب

احجام منشوری: احجامی هستند که سطح مقطع آنها در ارتفاع (یا طول) ثابت باشد؛ مانند احجام زیر:



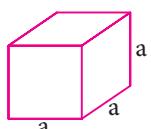
مقطع در طول و ارتفاع ثابت است



مقطع در طول ثابت است

مقطع در ارتفاع ثابت است

▲ ۳۸-۵

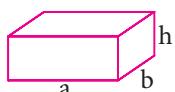


▲ ۳۹-۵

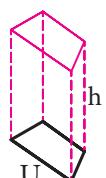
سطح جانبی احجام منشوری = محیط قاعده \times ارتفاع

سطح جانبی مکعب به ضلع a برابر است با: $4a^2$

سطح جانبی یک مکعب مستطیل به ابعاد قاعده a و b و ارتفاع h برابر است با:



▲ ۴۰-۵



▲ ۴۱-۵

سطح جانبی منشور با محیط قاعده U و ارتفاع h برابر است با: MH

سطح کل اجسام برابر است با: سطح جانبی + سطح قاعده‌ها

۱- در شکل ۴۲-۵ قسمت‌های هاشورخورده زمین دو و میدانی یک استادیوم نشان‌داده شده است. در

صورتی که بخواهیم در قسمت‌های میانی این زمین چمن بکاریم:

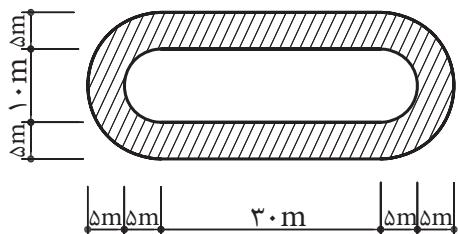
الف - مساحت کل زمین را به متر مربع حساب کنید.

ب - مساحت قسمت چمن کاری چند متر مربع است؟

پ - چند درصد کل زمین چمن کاری می‌شود؟

ت - در صورتی که بخواهیم پیرامون قسمت چمن کاری را در جدول نصب کنیم، چند متر جدول لازم داریم؟

تمرین

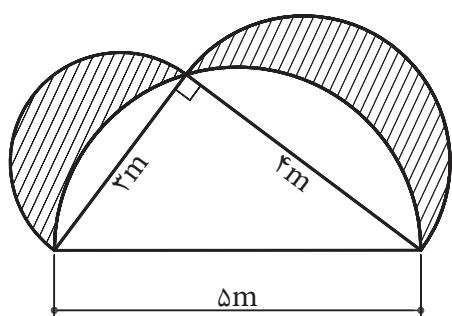


▲ ۴۲-۵

۲- در شکل ۴۳-۵ مساحت قسمت هاشورخورده را که آب‌نمای قسمتی از یک محوطه‌سازی را نشان می‌دهد،

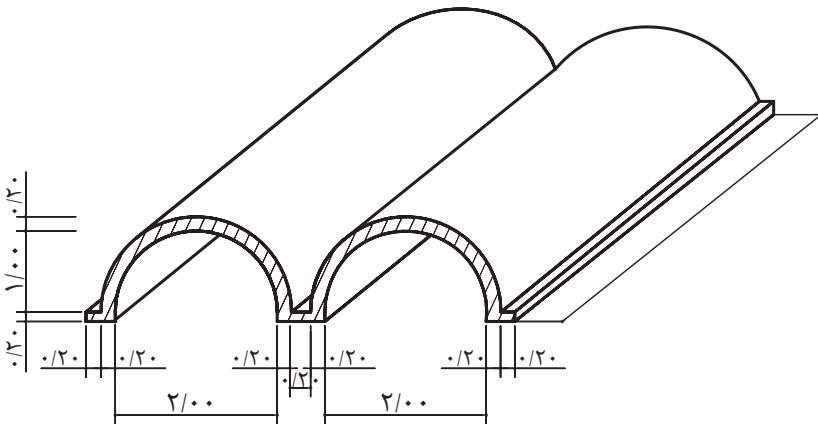
به دست آورید (نیم‌دایره‌ها هر کدام به قطر

یکی از اضلاع مثلث هستند).



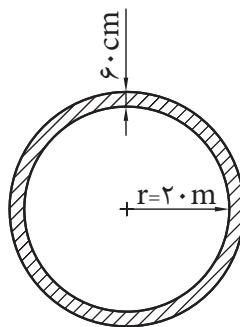
▲ ۴۳-۵

۳- شکل ۴۴-۵ یک سقف پوسته‌ای بتن‌آرمه را نشان می‌دهد. سطح مقطع بتن قسمت هاشور خورده را بحسب متر مربع به دست آورید.



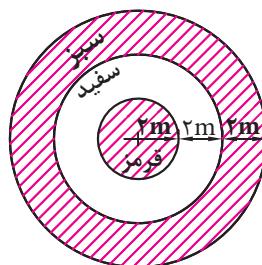
▲ ۴۴-۵

۴- استخری دایره‌ای شکل به شعاع ۲۰ متر (شکل ۴۵-۵) موجود است. می‌خواهیم لبه استخر را به عرض ۶۰ سانتی‌متر سنگ‌فرش کنیم؛ مساحت سنگ مورد نیاز چند متر مربع است؟

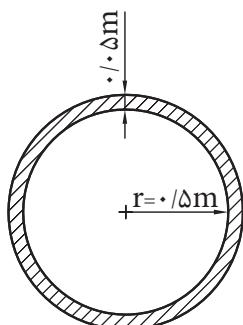


▲ ۴۵-۵

۵- قرار است یک سایه‌بان دایره‌ای شکل به صورت پرچم ایران رنگ‌آمیزی شود (شکل ۴۶-۵)؛ سطح هر کدام از رنگ‌ها را بحسب متر مربع به دست آورید.



▲ ۴۶-۵



▲ ۴۷-۵

۶- شکل ۴۷-۵ مقطع یک لوله بتنی را نشان می دهد.

الف - سطح مقطع داخل لوله چند سانتی متر مربع است؟

ب - سطح مقطع بتن مصرفی چند سانتی متر مربع است؟

پ - نسبت سطح مقطع بتن مصرفی به سطح مقطع داخل لوله چند درصد است؟

۷- مطلوب است محاسبه موزاییک لازم برای فرش فضای آموزشی خودتان.



پوڈمان ۴

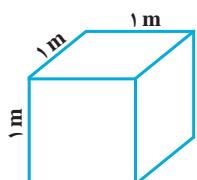
محاسبہ حجم و وزن



واحد یادگیری ۶

روش‌های محاسبه حجم

۱-۱- مترمکعب (m^3), واحد حجم



یک مترمکعب، حجم مکعبی است که طول هر بعد آن یک متر می‌باشد.

$$V = 1 \text{ m}^3$$

۱-۱- تبدیل‌های واحد حجم (V)

جدول ۱-۱- ضرایب تبدیل یکاهای حجم

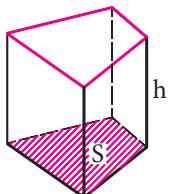
10^9 میلیمترمکعب mm^3	10^6 سانتی‌مترمکعب cm^3 cc (سی‌سی) یا میلی‌لیتر (ml)	10^3 دسی‌مترمکعب dm^3 (Lیتر)	۱ مترمکعب m^3	10^{-3} دکامترمکعب dam^3	10^{-6} هکتومترمکعب hm^3	10^{-9} کیلومترمکعب km^3
----------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------	------------------------------	-------------------------------------------	-------------------------------------------	-------------------------------------------



مثال: ۱۰۰۰۰۰ لیتر چند متر مکعب است؟

$$100000 \text{ dm}^3 \times \frac{1 \text{ m}^3}{10^3 \text{ dm}^3} = 10^5 \times \frac{1}{10^3} = 10^2 \text{ m}^3 = 100 \text{ m}^3$$

پیدا کردن رابطه بین اعداد در جدول صفحه قبل می‌تواند در به خاطر سپردن آنها کمک زیادی نماید.



▲ ۱-۶

۲-۱-۶ محاسبه حجم احجام منشوری

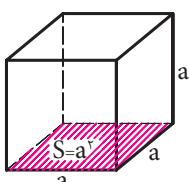
حجم احجام منشوری برابر است با مساحت قاعده \times ارتفاع

حجم منشور با مساحت قاعده S و ارتفاع h برابر است با Sh



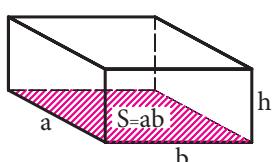
▲ ۲-۶

حجم استوانه با شعاع قاعده r و ارتفاع h برابر است با $\pi r^2 h$



▲ ۳-۶

حجم مکعب به ضلع a برابر است با a^3

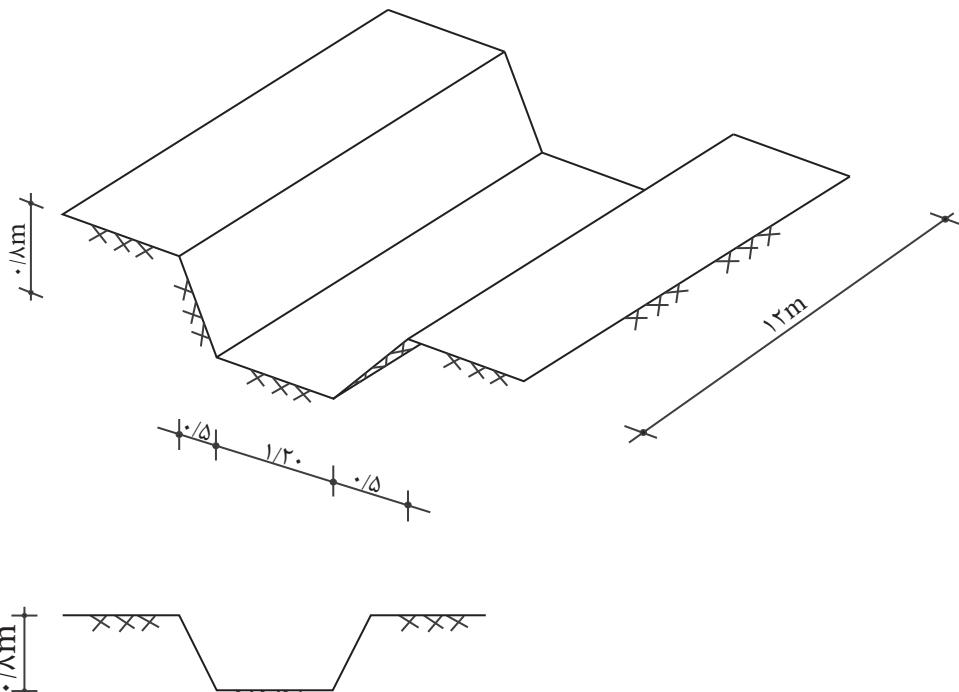


▲ ۴-۶

حجم مکعب مستطیل به اضلاع قاعده a و b و ارتفاع h برابر است با $a \cdot b \cdot h$



مثال ۱: شکل زیر یک کanal را نشان می‌دهد. حجم خاکبرداری این کanal را بر حسب متر مکعب محاسبه کنید.



مقطع کanal

▲ ۵-۶

$$S = \frac{a + b}{2} \times h = \frac{1/20 + 2/20}{2} \times 0/8$$

$$S = 1/36 \text{ m}^2$$

$$V = S \times L = 1/36 \times 12 = 16/32 \text{ m}^3$$

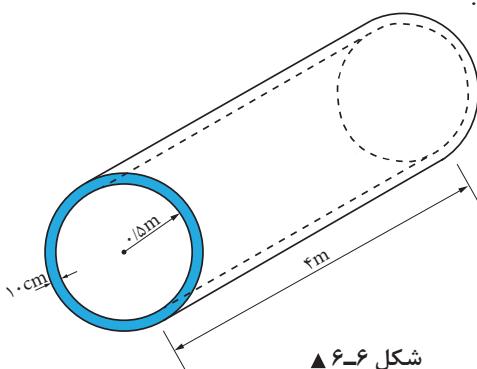


مثال ۲: شکل رو به رو یک لوله بتُنی را نشان می‌دهد. مطلوب است:

الف) فضایی که این لوله اشغال می‌کند

ب) حجم داخل لوله

ج) حجم بتُن لازم برای ساخت لوله



▲ ۶-۶

حل:

(الف) برای محاسبه فضایی که لوله اشغال می‌کند باید حجم کل لوله را محاسبه کنیم:

$$r = ۰/۵ \text{ m}$$

$$R = ۰/۵ + ۰/۱ = ۰/۶ \text{ m}$$

$$V_{\text{کل}} = S_{\text{کل}} \cdot L = \pi R^2 \times L = \frac{\pi}{4} \times ۰/۶^2 \times ۴ \Rightarrow V = ۴/۵۲ \text{ m}^3$$

(ب) حجم داخل لوله

$$V_{\text{داخل}} = S_{\text{داخل}} \cdot L = \pi r^2 \times L = \frac{\pi}{4} \times ۰/۵^2 \times ۴ \Rightarrow V = ۳/۱۴ \text{ m}^3$$

(ج) برای محاسبه حجم بتن باید سطح مقطع جداره لوله را در طول آن ضرب نماییم. داریم:

$$V = S \cdot L = \pi(R^2 - r^2) \times L = \frac{\pi}{4} \times (۰/۶^2 - ۰/۵^2) \times ۴$$

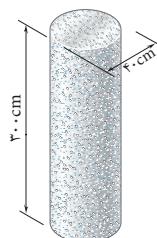
$$\Rightarrow V = ۱/۳۸ \text{ m}^3$$

نکته: برای محاسبه حجم بتن می‌توان حجم داخل لوله را از حجم کل نیز کم کرد. یعنی:

$$V_{\text{بتن}} = V_{\text{کل}} - V_{\text{داخل}} = ۴/۵۲ - ۳/۱۴ = ۱/۳۸ \text{ m}^3$$

مثال ۳: حجم شکل ۷-۶ که یک ستون بتنی را نشان می‌دهد، چند متر مکعب است؟

پرسش
کلاسی



▲ ۷-۶

$$r = \frac{d}{2} = \frac{۴۰}{2} = ۲۰ \text{ cm}$$

$$\text{مساحت مقطع} S = \pi r^2 = \frac{\pi}{4} \times ۲۰^2 = ۱۲۵۶ \text{ cm}^2$$

$$V = S \times h = ۱۲۵۶ \times ۳۰۰ = ۳۷۶۸۰۰ \text{ cm}^3$$

$$V = ۳۷۶۸۰۰ \text{ cm}^3 \times \frac{۱ \text{ m}^3}{۱۰۰ \text{ cm}^3} = ۰/۳۸ \text{ m}^3$$



۱- یک جعبه چوبی مکعب شکل به ابعاد داخلی $5m \times 0/5m \times 0/5m$ و ضخامت دیواره 2 سانتی متر موجود است.

الف - حجم داخل جعبه چند سانتی متر مکعب و چند متر مکعب است؟

ب - اگر بخواهیم داخل جعبه را رنگ بزنیم، سطح رنگ کاری چند متر مربع است؟

۲- یک استخر آب مطابق شکل ۸-۶ به صورت مکعب مستطیل ساخته شده است. کف آن از بتن به ضخامت 20 cm و دیواره آن از بتن به ضخامت 20 سانتی متر که داخل آن عایق کاری گردیده و یک دیوار 10 سانتی متری محافظه عایق هم کشیده شده است. سطح داخلی دیواره نیز با ماسه سیمان لیسه ای اندود شده است. موارد زیر را محاسبه کنید:

الف - حجم بتن کف (m^3)

ب - حجم آجر کاری (m^3)

پ - سطح عایق کاری کف و دیواره ها (m^2)

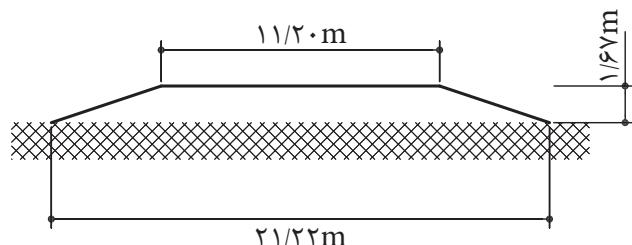
ت - سطح اندود دیواره ها (m^2)

ث - ظرفیت آب استخر (m^3)

ج - حجم بتن دیوار (m^3)

۳- برای یک کارگاه ساختمانی، احتیاج به یک منبع آب با ظرفیت 270000 لیتر داریم. اگر منبع به شکل مکعب ساخته شود، طول هر ضلع آن چند متر است؟

۴- قسمتی از یک جاده به طول 73 متر، مطابق شکل خاک ریزی می شود. محاسبه نمایید که باید چند متر مکعب خاک ریزی شود.

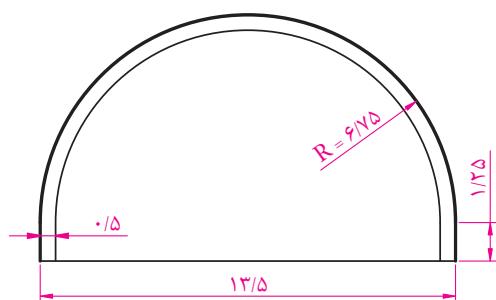


▲ ۸-۶

۵- تونلی به طول 840 متر با مشخصات طبق شکل ۹-۶ مفروض است. مطلوب است:

الف - محاسبه حجم حفاری انجام شده به متر مکعب.

ب - محاسبه حجم بتن ریزی انجام شده به متر مکعب.



▲ ۹-۶



▲ شکل ۱۰-۶

۶- قرار است یک انبار به ابعاد داخلی $10 \times 6 \times 5$ متر را با دیوارهای 35 سانتی‌متری بسازیم. در صورتی که در و پنجره‌این انبار سطحی معادل 20% سطح دیوارها داشته باشند:

الف - حجم آجرکاری را به متر مکعب محاسبه کنید.

ب - سطح اندود داخلی و خارجی را به متر مربع محاسبه کنید.

۷- در یک ساختمان بتونی، از ستون‌های با مقطع دایره استفاده شده است. در صورتی که از 10 عدد ستون دایره به قطر 50cm و 16 عدد ستون دایره به قطر 60cm استفاده شود و ارتفاع همه ستون‌ها برابر $3/20$ متر باشد:

الف - حجم بتن مصرفی در ستون‌ها را بر حسب متر مکعب محاسبه کنید.

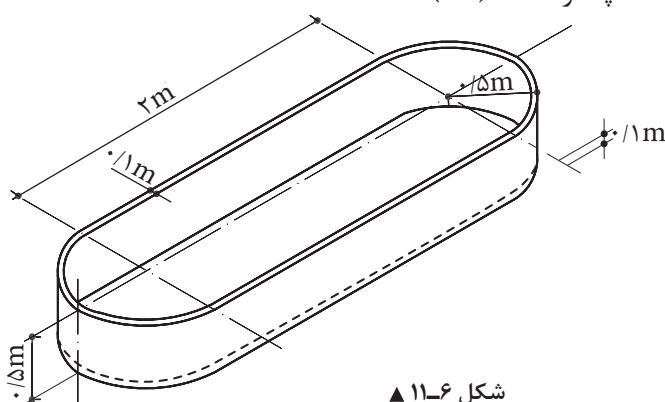
ب - در صورت رنگ‌آمیزی ستون‌ها، سطح رنگ‌آمیزی چند متر مربع است؟

۸- در یک پارک، تعداد 22 عدد آبنما مطابق شکل زیر وجود دارد. در صورتی که این آبنماها از بتن ساخته شده باشند و ضخامت دیوار و کف آنها 10 سانتی‌متر باشد:

الف - حجم بتن مصرفی را حساب کنید. (m^3)

ب - گنجایش آب این آبنماها در مجموع چقدر است? (m^3)

پ - سطح رنگ‌آمیزی داخل و خارج این آبنماها چقدر است? (m^2)

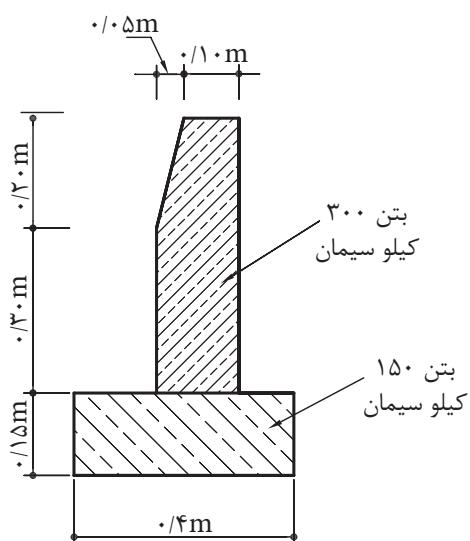


▲ شکل ۱۱-۶

۹- شکل زیر مقطع یک جدول ساده بتنی کنار خیابان به طول ۵۰۰ متر را نشان می‌دهد:

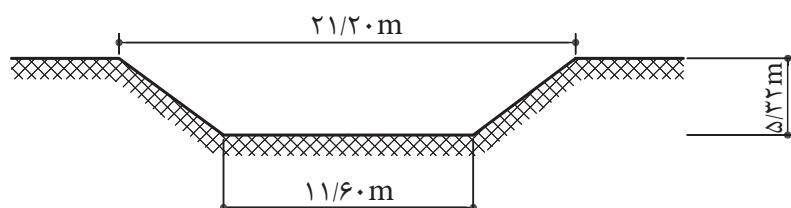
الف - حجم بتن ۳۰۰ کیلو سیمان بر حسب متر مکعب چقدر است؟

ب - حجم بتن ۱۵۰ کیلو سیمان را بر حسب متر مکعب تعیین کنید.



▲ ۱۲-۶

۱۰- قسمتی از یک کانال مطابق شکل زیر گودبرداری می‌شود. طول این قسمت ۹۱ متر است. محاسبه کنید که چند متر مکعب گودبرداری می‌شود؟



▲ ۱۳-۶

واحد یادگیری ۷

محاسبه وزن

۱-۷ - کیلوگرم (kg)، واحد جرم

یک کیلوگرم جرم استوانه‌ای از آلیاژ پلاتین - ایریدیم است که در اداره استاندارد بین‌المللی در نزدیکی شهر پاریس نگهداری می‌شود.

۲-۷ - نیوتن (N)، واحد نیرو

یک نیوتن مقدار نیرویی است که به جرم یک کیلوگرم، شتاب یک متر بر مجدور ثانیه را بدهد.

۳-۷ - تبدیل‌های واحد جرم (M)

جدول ۱-۷- ضرایب تبدیل یکاهای جرم

10^3 گرم gr	۱ کیلوگرم kg	10^{-3} تن ton
---------------------	--------------------	------------------------

مثال: $2/5$ تن چند گرم است؟

$$0/25 \text{ ton} \times \frac{10^3 \text{ gr}}{10^{-3} \text{ ton}} = 2/5 \times 10^{-1} \times 10^6 = 2/5 \times 10^5 \text{ gr}$$

پرسش
کلاسی



۲-۲-۷- چگالی و واحدهای اندازه‌گیری آن

۱- چگالی یک ماده، جرم واحد حجم آن ماده است. چگالی را با حرف یونانی ρ (با تلفظ «ر») نمایش می‌دهند.

$$\text{چگالی} = \frac{\text{حجم}}{\text{جرم}} \quad \text{یا} \quad \rho = \frac{m}{V}$$

۲- واحد اصلی اندازه‌گیری چگالی در سیستم SI کیلوگرم بر متر مکعب $\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$ است.

۳- واحدهای دیگر چگالی گرم بر سانتی‌متر مکعب $\left(\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}\right)$ و تن بر متر مکعب $\left(\frac{\text{ton}}{\text{m}^3}\right)$ است.

مثال ۱: یک کیلوگرم بر متر مکعب چند گرم بر سانتی‌متر مکعب است؟

پرسش
کلاسی



نکته



توجه: برای تبدیل واحد کمیت‌هایی که به صورت کسری می‌باشند مانند چگالی، همان قاعدهٔ فصل دوم کتاب را اعمال می‌نماییم؛ با این تفاوت که تبدیل واحدهایی که در مخرج قرار دارند را به صورت معکوس در ضرب تبدیل واحد صورت ضرب می‌کنیم.

$$1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1 \text{ kg} \times \frac{1000 \text{ gr}}{1 \text{ kg}} \times \frac{1 \text{ m}^3}{100 \text{ cm}^3} = 10^{-3} \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$$

مثال ۲: یک تن بر متر مکعب چند کیلوگرم بر متر مکعب است؟

$$1 \text{ t} \times \frac{1 \text{ kg}}{10^{-3} \text{ t}} \times \frac{1}{\text{m}^3} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

۲-۳- وزن و واحد اندازه‌گیری آن

نیروی جاذبه‌ای را که از طرف زمین بر جرم یک جسم وارد می‌شود، «وزن» آن جسم می‌گویند. یک نیوتون مقدار نیرویی است که اگر به جرم یک کیلوگرم وارد شود، شتابی برابر با یک متر بر مجدوثر ثانیه به آن می‌دهد.

واحد اندازه‌گیری وزن «نیوتون (N)» است. برای محاسبهٔ وزن یک جسم بر حسب نیوتون کافی است که جرم آن را برابر حسب kg در عدد $9/81$ ضرب کنید.

پرسش
کلاسی



مثال ۱: جرم یک جسم یک کیلوگرم است. وزن آن چقدر است؟

$$\text{وزن} = 9/81 \text{ N} \Rightarrow 1 \times 9/81 = 9/81 \text{ N}$$

حل:

$$1\text{kgf} = 9.81\text{N}$$

به N ۹/۸۱، یک کیلوگرم نیرو هم می‌گویند و آن را با علامت kgf نشان می‌دهند.

نکته

کیلوگرم، واحد جرم است.
کیلوگرم نیرو، واحد وزن است.

بنابراین می‌توانیم بگوییم:



مثال ۲: وزن یک متر میل‌گرد به قطر ۱۸ (۱۸Φ) برابر ۲۰۰۰ gf می‌باشد. وزن یک شاخه ۱۲ متری از این میل‌گرد چند کیلوگرم نیرو و وزن ۱۰ شاخه از آن چند تن نیرو است؟

حل:

پرسش
کلاسی



$$12 \times 2000 = 24000 \text{ gr} = 24000 \times 10^{-3} = 24\text{kgf}$$

وزن یک شاخه بر حسب کیلوگرم نیرو

$$24 \times 10^{-3} = 0.024\text{tonf}$$

وزن یک شاخه بر حسب تن نیرو

$$0.024 \times 10 = 0.24\text{tonf}$$

وزن ده شاخه بر حسب تن نیرو

۴-۲-۷- محاسبات جرم، چگالی و حجم

برای محاسبات مربوط به جرم، چگالی و حجم از رابطه $\rho = \frac{m}{V}$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۱: حجم بتون مصرفی در یک ستون ۲/۵ متر مکعب است. اگر چگالی آن $2400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ باشد، وزن این ستون چند نیوتون است؟

حل:

پرسش
کلاسی



$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow 2400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \frac{m}{2/5\text{m}^3}$$

$$m = 2400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 2/5\text{m}^3 = 6000\text{kg}$$

$$W = m \cdot g = 6000 \text{kg} \times 9.81 \text{N/kg} = 58860\text{N}$$

مثال ۲: جرم یک قطعه چوب بلوط 873kg است. اگر جرم حجمی آن $900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ باشد، حجم آن چند متر مکعب است؟

حل:

پرسش
کلاسی



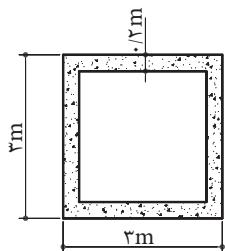
$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{873\text{kg}}{900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 0.967\text{m}^3$$

حجم قطعه چوب

۱- جرم یک جسم، بدون توجه به مکان آن، در همه نقاط زمین، ثابت است. به عبارت دیگر، جرم مستقل از مکان است اما وزن یک جسم، در نقاط مختلف جهان، با شتاب نقل متفاوت، یکسان نیست پس وزن یک جسم تابع محل قرارگیری آن است. با توجه به این توضیحات، در کاربردهای روزمره، مشاهده می‌شود که کلمات جرم و وزن اشتباهاً به جای یکدیگر به کار می‌روند. مثلاً روی اغلب کالاهای تجاری، «وزن» آن نوشته می‌شود در حالی که باید «جرم» آن عنوان شود زیرا این «جرم» است که در همه نقاط جهان که این کالا حمل می‌شود، ثابت می‌ماند و «وزن» آن متغیر است و نتیجتاً واحد وزن «کیلوگرم نیرو» و واحد جرم، «کیلوگرم» است. به طور کلی می‌توان گفت: وزن و جرم یک جسم، با هم مناسب است.



۱- شکل ۱-۷ مقطع یک آبروی بتنی را نشان می‌دهد که طول آن ۱۱ متر است. در قسمتی از یک راه، تعداد ۱۹ عدد از این آبروها مورد نیاز است.

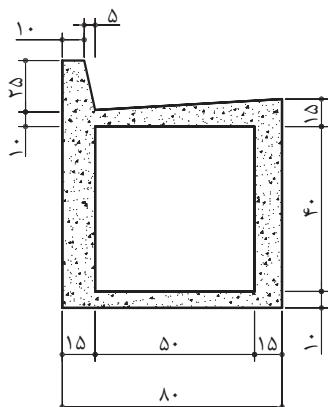


الف - حجم بتن مصرفی چند متر مکعب است؟

ب - مقدار سیمان مورد نیاز چند کیلوگرم است؟ (بتن از نوع ۳۵۰ کیلوگرم سیمان می‌باشد).

پ - وزن یک عدد از این آبروها چند تن نیرو است؟ (در صورتی که چگالی بتن ۲۴۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب باشد).

▲ ۱-۷



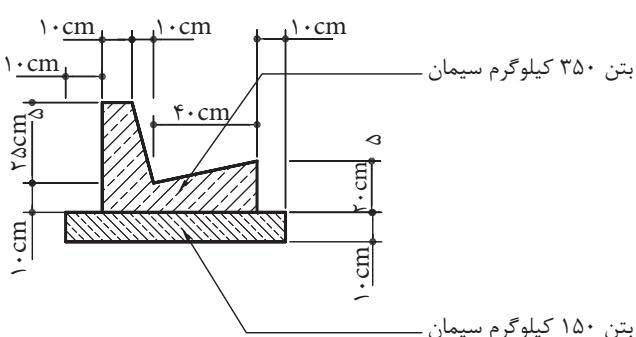
۲- شکل ۲-۷ مقطع یک آبروی سرپوشیده بتنی کنار خیابان است. طول خیابان ۱۳۵۰ متر است:

الف - مقدار بتن مصرفی را برحسب متر مکعب محاسبه کنید.

ب - مقدار سیمان لازم چند کیلوگرم است؟ (عيار سیمان مصرفی ۳۵۰ کیلوگرم بر مترمکعب بتن می‌باشد).

▲ ۲-۷

۳- شکل ۳-۷ مقطع آبروی بتنی کنار یک خیابان را که طول آن ۱۲۰۰ متر است نشان می‌دهد:



الف - مقدار بتن با عیار ۳۵۰ کیلوگرم سیمان را برحسب متر مکعب حساب کنید.

ب - مقدار بتن با عیار ۱۵۰ کیلوگرم سیمان بر حسب متر مکعب چقدر است؟

پ - مقدار سیمان لازم را برحسب کیلوگرم تعیین کنید.

▲ ۳-۷

۴- برای اجرای یک پروژه عمرانی باید تعدادی لوله بتنی به طول $\frac{7}{5}$ متر، قطر داخلی ۴ متر و ضخامت دیواره ۲۵ سانتی‌متر، با تریلی از کارخانه تولید لوله به محل پروژه حمل شود. در صورتی که چگالی هر متر مکعب لوله ۲۸۰۰ کیلوگرم و جرم تریلی ۳۰ تن باشد و در مسیر تریلی پلی با ظرفیت برابری حداقل ۹۵ تن (با در نظر گرفتن وضعیت تقسیم بار بر روی محورها) وجود داشته باشد، آیا تریلی مجاز است این محموله را از روی پل عبور دهد؟

۵- به یک کارگاه ساختمانی ۲۴۰ تن سیمان وارد شده است. در صورتی که در ساختمان الف $\frac{3}{8}$ آن و در ساختمان ب $\frac{2}{8}$ آن مورد نیاز باشد و بقیه را بخواهیم انبار کنیم، باید چند کیلوگرم سیمان در هر ساختمان تخلیه شود و چند کیلوگرم به انبار حمل گردد؟ در ضمن مقدار سیمان انبار شده چند کیسه خواهد بود؟ (جرم هر کیسه سیمان ۵۰ کیلوگرم است).

۶- برای ساختن بتن در احداث پی یک ساختمان ۳ متر مکعب آب مورد نیاز است.

الف - مقدار آب مورد نیاز چند لیتر است؟

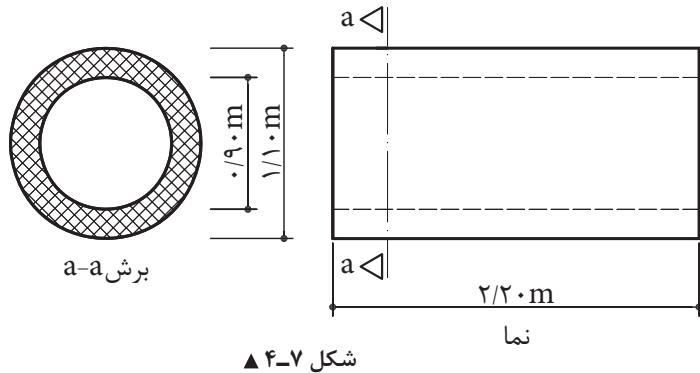
ب - مقدار آب مورد نیاز چند متر مکعب است؟

پ - در صورتی که برای نگهداری این مقدار آب بخواهیم از بشکه‌های ۲۰۰ لیتری استفاده کنیم، چند عدد بشکه مورد نیاز است؟

۷- برای یک کار اختصاصی، لوله بتنی طبق شکل زیر ساخته می‌شود. موارد زیر را محاسبه کنید:

الف - جرم یک لوله در صورتی که جرم یک متر مکعب بتن ۲۲۰۰ کیلوگرم باشد.

ب - در صورتی که ظرفیت حمل بار یک کامیون پنج تن باشد، چه تعداد از این لوله را می‌تواند حمل کند؟



▲ ۴-۷

۸- گنجایش یک تانک ذخیره آب ۱۸ متر مکعب است. گنجایش تانک چند لیتر است؟

۹- برای هر متر مکعب دیوارچینی، ۶۲۰ عدد آجر فشاری لازم است. در صورتی که جرم هر آجر فشاری ۱/۷۵ کیلوگرم باشد، محاسبه کنید هر متر مکعب دیوارچینی چند کیلوگرم و چند تن آجر لازم دارد؟

۱۰- در صورتی که برای ملات هر متر مکعب دیوارچینی، ۸۵ کیلوگرم سیمان مصرف شود و حجم دیوارچینی

۱۰ متر مکعب باشد، چند پاکت سیمان لازم است؟ (هر پاکت سیمان ۵۰ کیلوگرم است). چند تن سیمان لازم است؟