فصل دوم

گراف و مدل‌سازی

نگاه کلی به فصل

نظریهٔ گراف یکی از شاخه‌های ریاضی است که گرچه اهمیّت آن بی‌شک به‌واسطهٔ کاربردهای مهم و زیبای آن است، اما در ریاضیات محض نیز جایگاه خاصی دارد زیرا در ارتباط تنگاتنگ با برخی مفاهیم مهم ریاضی محض به‌ویژه در شاخه‌های جبرخطی و جبر است. از آنجا که نظریهٔ گراف شامل کاربردهای زیادی است که واقعی، ملموس و قابل درک توسط دانش‌آموز هستند، لذا زمینهٔ مناسبی است برای مطرح‌شدن در ریاضیات مدرسه‌ای.

این فصل شامل دو درس است که در درس اول فقط معرفی گراف و تعاریف مقدماتی انجام شده است. سعی در این بوده است که از ارائه تعاریف غیرضروری پرهیز شود. از طرفی چون دانش‌آموزان اولین بار است که با این درس مواجه می‌شوند. گاهی اوقات پرهیز از ارائهٔ تعاریف رسمی به گونه‌ای که درک آن توسط دانش‌آموز مشکل باشد مدنظر بوده است به‌گونه‌ای که برخی تعاریف با توجه دادن دانش‌آموزان به شکل و مثال مطرح شده‌اند. در فصل دوم مفهوم احاطه‌گری مطرح شده است که یکی از مفاهیمی است که قابلیت بیان مدل‌سازی را به‌خوبی دارد و همچنین زمینهٔ بسیار مناسبی به جهت مطرح کردن کاربردهای قابل درک توسط دانش‌آموزان است.

نقشهٔ مفهومی

تصویر عنوانی

بسیاری از کاربردهای نظریهٔ گراف با مدل‌سازی یک مسئلهٔ واقعی و تبدیل آن به یک مسئلهٔ ریاضی انجام می‌پذیرد. تصویر عنوانی فصل یک نوع مدل‌سازی از بخشی از نقشهٔ شهر مشهد و تبدیل آن به یک گراف را نمایش می‌دهد.

دانستنی‌هایی برای معلم

ارتباط برخی مفاهیم نظریهٔ‌گراف با بعضی مفاهیم ریاضی محض بسیار جالب و شاید در ابتدای پیدایش گراف بسیار دور از ذهن می‌نمود. به‌طور مثال گراف کیلی با توجه به ساختار یک گروه جبری ساخته می‌شود. در این صورت ارتباطات بسیار جالبی بین مفاهیم جبری و مفاهیم نظریهٔ گراف برقرار است که از هر یک برای مطالعهٔ دیگری می‌توان بهره گرفت. همچنین شاخه‌ای از نظریهٔ گراف جبری به مطالعهٔ گراف‌ها با استفاده از جبر خطی و ماتریس مجاورت یک گراف می‌پردازد.

معرفی منابع برای معلمان

۱ D.B. West (2001) Introduction to graph theory.

۲ J.A.Bondy, V.S.R.Murty. (2008). Graph theory.

۳ T.W.Haynes, S.T.Hedetniemi, P.J.Slater. (1998).Fundamentals of domination in graph.

۴ N.Biggs. Algebraic Graph Theory.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ در هر کدام از موارد (الف) و (ب)، مجموعهٔ رأس‌های گرافِ G داده شده است.
به سؤالات مطرح شده پاسخ دهید.

۱ــ مرتبه و اندازهٔ گراف را مشخص نمایید.

۲ــ نمودار گراف را رسم کنید.

۳ــ $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص نمایید.

۴ــ اگر x، رأسِ با درجهٔ $\Delta(G)$ و y، رأسِ با درجهٔ $\delta(G)$ باشد، مجموعه‌های $N_G(x)$ و $N_G(y)$ را مشخص نمایید.

۵ــ آیا می‌توانید دو رأس مانند x و y بیابید به‌گونه‌ای که $N_G(x) \subseteq N_G(y)$ ؟

الف) $V(G)=\{a, b, c, d, e, f\}$ و $E(G)=\{af, ab, ae, bc, be, ed, dc\}$

ب) $V(G)=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ و $E(G)=\{ad, ae, bf, bc, dh, cg, ef, fg, gh, eh\}$

۲ گرافِ همبند و غیرتهیِ G را به‌گونه‌ای رسم کنید که a و b و c رأس‌هایی از آن باشند و داشته باشیم $N(a) \subseteq N(b) \subseteq N(c)$.

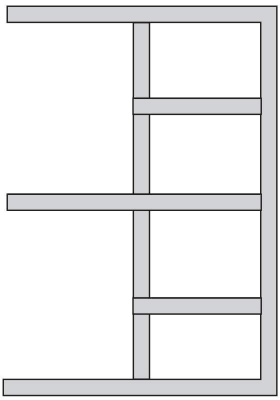
۳ گرافِ G را به‌گونه‌ای رسم کنید که a و b و c رأس‌هایی از آن باشند و داشته باشیم $N[a] \subseteq N[b] \subseteq N[c]$.

۴ ثابت کنید که اگر G یک گراف باشد و $\delta(G) \geq ۵$ ، آنگاه G شامل یک مسیر به طول بزرگ‌تر یا مساوی ۵ است.

۵ الف) اگر G یک گراف ۶ رأسی باشد و $\Delta(G) = ۳$ و $\delta(G) = ۱$، در این‌صورت $\Delta(\overline{G})$ و $\delta(\overline{G})$ را تعیین کنید.

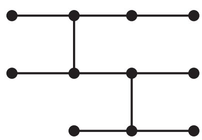
ب) اگر G یک گراف n رأسی باشد، چه رابطه‌ای بین $\Delta(G)$ و $(\overline{\quad})$ برقرار است؟

۶ شکل روبه‌رو قطعه‌ای از نقشهٔ یک شهرک است. می‌خواهیم چند دکهٔ روزنامه‌فروشی در برخی تقاطع‌های آن قرار دهیم به‌گونه‌ای که هرگاه در یک تقاطع یا در انتهای یک خیابان قرار داشته باشیم دکه‌ای به فاصلهٔ حداکثر یک تقاطع از ما وجود داشته باشد. چگونه این کار را انجام دهیم که با کمترین دکهٔ ممکن انجام شده باشد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

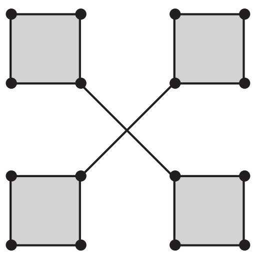


۷ در هر یک از گراف‌های زیر عدد احاطه‌گری را مشخص کنید. (با بیان دلایل کافی)

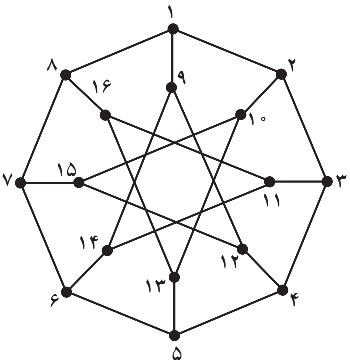
الف)



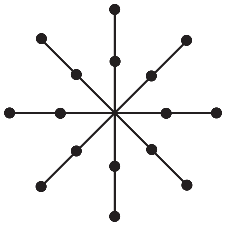
ب)



پ)



ت)



۸ در یک گروه ورزشی ۱۰ نفر عضو هستند و هر کدام دقیقاً با سه نفر از اعضای گروه دوست صمیمی هستند. می‌خواهیم به تعدادی از آنها خبری را بدهیم و از آنها بخواهیم به دوستان صمیمی خود درگروه خبر را اطلاع دهند. حداقل باید به چند نفر خبر بدهیم؟

۹ عدد احاطه‌گری گراف‌های Cn و Pn را مشخص نمایید.

۱۰ یک گراف ۳ رأسی بکشید که مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمالی با اندازهٔ متفاوت با $\gamma(G)$ داشته باشد.

۱۱ یک گراف ۳ رأسی بکشید که هیچ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمالی با اندازهٔ متمایز از $\delta(G)$ نداشته باشد.

درس اول

معرفی گراف

اهداف

۱ شناخت گراف و درک تعاریف این بخش
۲ آشنایی با برخی خواص گراف‌ها

روش تدریس

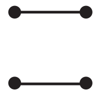
در ابتدا مسائلی تاریخی، مرتبط با گراف‌ها مطرح گردیده است. آشنایی دانش‌آموز با این مسائل ماهیت کاربردی این بخش از ریاضی را در ذهن دانش‌آموزان جا می‌اندازد. از آنجا که دانش‌آموزان در اولین مواجهۀ خود با درس گراف می‌باشند، ارائۀ تعاریف رسمی مانند تعریف گراف به‌صورت تابعی که هر یال را به دو رأس نظیر می‌کند و تعاریف رسمی دیگری از این قبیل می‌تواند از مواجهۀ راحت و آسان دانش‌آموز با این درس جلوگیری نماید. لذا سعی شده است اکثر تعاریف با استفاده از شکل و نمودار گراف و به‌صورت شهودی به دانش‌آموزان ارائه گردد.

بسیاری از خواصِ گراف زمانی که با استدلالی شهودی و ملموس ارائه گردند برای دانش‌آموزان بسیار قابل درک‌تر می‌شوند. به‌طور مثال در فعالیت دوم صفحۀ ۳۹ که منجر به اثبات قضیۀ پایین این صفحه می‌گردد سعی شده است با انجام مراحل این فعالیت دانش‌آموز حکم قضیه را به‌طور ملموس درک نماید. همچنین در فعالیت دوم صفحۀ ۴۰، در اثبات مسئله چند بار از فرض مسئله استفاده می‌شود و نوع جالبی از اثبات به دانش‌آموزان ارائه می‌شود. یکی از ویژگی‌های مهم گراف استفاده از استدلال‌های کلامی زیبا در مسائل آن است و یکی از اهداف مهم در گراف نیز تقویت استدلال کلامی دانش‌آموزان است لذا سعی کنید در پایان چنین فعالیتی دانش‌آموزان را تشویق کنید که اثبات را از ابتدا به‌صورت شفاهی بازگو نمایند.

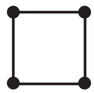
حل برخی تمرینات درس اوّل صفحه ۴۱

۸

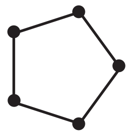
الف)



ب)

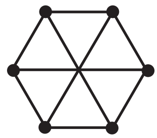


پ)



ت) اگر چنین گرافی داشته باشیم مجموع درجات آن ۱۵ می‌شود و این غیرممکن است.

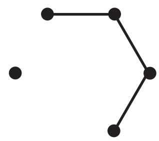
ث)



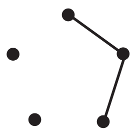
ج) مانند قسمت (ت) امکان‌پذیر نیست.

۹

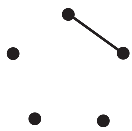
الف)



ب)

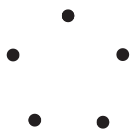


پ)



ت) امکان‌پذیر نیست.

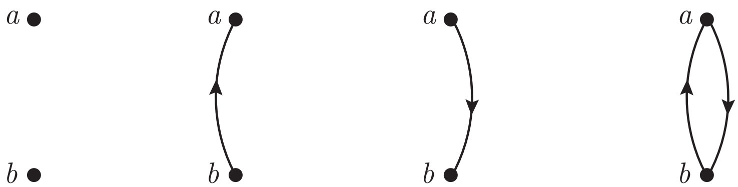
ث)



۱۰ اگر به ازای هر نفر یک رأس قرار دهیم و رئوس نظیر برای کسانی که با هم دست داده‌اند را به هم وصل کنیم، با توجه به فرض مسئله و در صورتی که نفر هفتم با ۵ نفر دست داده باشد گرافی با مجموع درجات فرد خواهیم داشت که این غیرممکن است.

(۶× ۲) + (۱ × ۵) = ۱۷

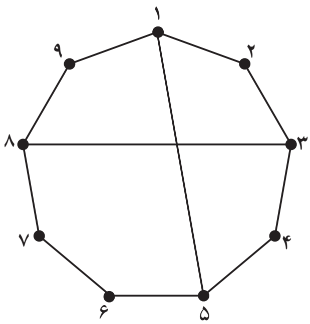
۱۱ الف) می‌توان به ازای هر نفر یک رأس قرار داد و اگر فرضاً a با b دوست باشد، رأس a را با یک یال جهت‌دار (از a به b) به رأس b وصل کرده لذا کافی است تعداد تمام گراف‌های جهت‌دار با ۵ رأس را مشخص کرد. برای این کار ۵ رأس را درنظر می‌گیریم و تمام حالت‌هایی را که تعدادی یال جهت‌دار بین برخی، همه یا هیچ جفت از رئوس آن قرار داشته باشد مشخص می‌کنیم. اما ده ($\binom{5}{2} = 10$) جفت رأس را می‌توان درنظر گرفت که برای هر جفت از آنها یکی از حالات زیر می‌تواند اتفاق بیفتد :



لذا $4^{\binom{5}{2}} = 4^{10}$ حالت امکان‌پذیر است.

ب) در این حالت کافی است تعداد گراف‌های ۵ رأسی (نه جهت‌دار) را مشخص کنیم که از آنجا که برای هر جفت رأس دو حالت وجود دارد، در این حالت تعداد حالات برابر بیست $2^{\binom{5}{2}} = 2^{10}$ است.

۱۲ الف)



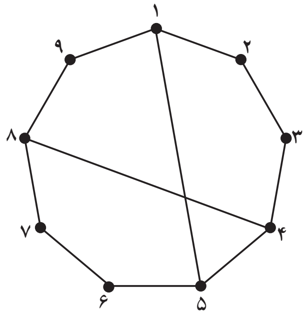
۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱ ← دور به طول ۹

۱۲۳۴۵۱ ← دور به طول ۵

۱۵۶۷۸۹۱ ← دور به‌طول ۶

۱۲۳۸۷۶۵۱ ← دور به طول ۷

ب)



۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱ ← دور به طول ۹

۱۲۳۴۵۱ ← دور به طول ۵

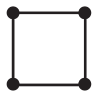
۱۵۶۷۸۹۱ ← دور به‌طول ۶

۱۲۳۴۸۷۶۵۱ ← دور به طول ۸

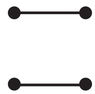
۱۳ الف) بله. با اثباتی کاملاً مشابه با فعالیت دوم صفحهٔ ۴۰ می‌توان ثابت کرد.

ب) خیر. به‌عنوان یک مثال نقض در گراف P_2 داریم $\delta(P_2)=1$ و این گراف به وضوح مسیری به‌طول ۲ ندارد.

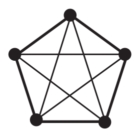
۱۴ الف)



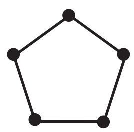
ب)



۱۵ الف)



ب)



درس دوم

مدل‌سازی با گراف

اهداف

۱ درک مفهوم احاطه‌گری در یک گراف و تعاریف ارائه شده در این درس
۲ مدل‌سازی برخی مسائل با استفاده از گراف‌ها
۳ آشنایی با خواص مجموعه‌های احاطه‌گر
۴ تعیین عدد احاطه‌گری برخی از گراف‌ها
۵ استفاده از مفهوم احاطه‌گری در حل مسائل کاربردی
۶ استفاده از استدلال کلامی در حل برخی مسائل احاطه‌گری

روش تدریس

ارائۀ مفهوم احاطه‌گری با استفاده از طرح یک مسئله که توسط گراف مدل‌سازی می‌شود می‌تواند وجه کاربردی این مفهوم را بیشترنمایان سازد. پس از ارائه مفهوم مجموعۀ احاطه‌گر و عدد احاطه‌گری به‌جاست چند مثال ساده مطرح گردد و فرصت تفکر دانش‌آموزان به مفاهیم ارائه شده داده شود. در مثال صفحۀ ۴۵ بهتر است سعی شود چگونگی مدل‌سازی مسئله با گرافِ موردنظر بیشتر توضیح داده شده و علت اینکه چرا فقط رئوسِ متناظر با شهرهایی که فاصلۀ کمتر یا مساوی ۵۰ دارند به‌هم وصل می‌شوند توضیح داده شود.

دقت کنید که یکی از اهداف مهم این درس ارتقای قدرت استدلال کلامی دانش‌آموزان است. لذا معلم باید در تعیین سؤال‌ها و طبقه‌بندی آنها از نظر میزان سختی درک استدلال آنها دقت نماید و گام به گام این نوع استدلال را، توسط مطرح‌کردن سؤالات مناسب و ارائۀ راهنمایی مناسب، در دانش‌آموزان ارتقا دهد. قابل توجه است که تعیین مجموعۀ احاطه‌گر مینیمم در برخی گراف‌ها می‌تواند بسیار مشکل باشد و در طرح سؤالات همواره به چگونگی ارائۀ استدلال توسط دانش‌آموزان باید دقت نمود.

حل تمرین‌های درس دوم صفحه ۵۲

۱

الف) اگر این گراف را (گراف شکل ۴ صفحهٔ ۴۶) G بنامیم، ادعا می‌کنیم $\gamma(G) = ۳$ برای این کار باید دو موضوع را نشان دهیم.

۱ـ۱) یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۳ عضوی وجود دارد.

۱ـ۲) هیچ مجموعهٔ احاطه‌گر ۲ عضوی وجود ندارد یا به‌عبارتی هر مجموعهٔ احاطه‌گر دلخواهی حداقل ۳ عضو دارد.

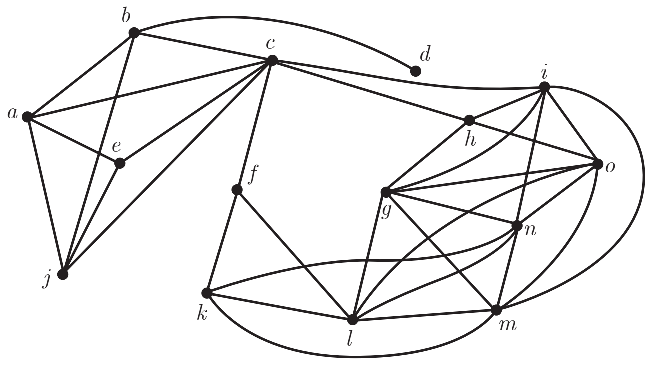
حل : ۱ـ۱) به سادگی دیده می‌شود که مجموعهٔ $\{i , d , g\}$ برای گراف G یک مجموعهٔ احاطه‌گر است لذا داریم $\gamma(G) \leq ۳$.

حل : ۱ـ۲) فرض کنیم $D \subseteq \gamma(G)$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر دلخواه برای G باشد. نشان می‌دهیم D حداقل سه عضو دارد. برای احاطه‌شدن رأسِ j حداقل یکی از رئوس i و j و k باید درمجموعهٔ S قرار داشته باشند. هر کدام از رئوس مذکور که در S باشند حداکثر ۴ رأسِ i و j و k و a را احاطه می‌کنند و سایر رئوس گراف احاطه نشده باقی می‌مانند و از طرفی چون هیچ رأسی به تمام رئوسِ باقی‌ماندهٔ گراف (سایر رئوس به‌جز i و j و k و a) وصل نیست پس هیچ رأسی به تنهایی نمی‌تواند سایر رئوس گراف را احاطه کند. بنابراین حداقل دو رأسِ دیگر نیز باید در S وجود داشته باشد. پس $|S| \geq ۳$، یعنی هیچ مجموعه‌ای با اندازهٔ کوچک‌تر از ۳ نمی‌تواند برای این گراف احاطه‌گر باشد پس $\gamma(G) \geq ۳$. حال با توجه به (I) و (II) داریم $\gamma(G) = ۳$.

ب) اینکه مجبور باشیم یکی از ایستگاه‌ها را در b قرار دهیم بدان معنی است که مجموعهٔ احاطه‌گری با کمترین تعداد ممکن انتخاب کنیم به‌گونه‌ای که رأس b در آن باشد. مجموعهٔ مذکور به‌صورت $\{i , b , g\}$ است و لذا در این حالت هم با ۳ ایستگاه مسئله حل می‌شود.

۲ اگر به ازای هر روستا یک رأس قرار دهیم و دو رأس را به هم وصل کنیم اگر و تنها اگر روستاهای متناظر با آنها فاصله‌شان کمتر یا مساوی ۱۰ باشد گراف مقابل حاصل خواهد شد. حال کافی است مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم این گراف را به‌دست آوریم.

اگر S یک مجموعهٔ احاطه‌گر باشد، برای احاطهٔ رأس d یکی از d و b را باید



G

شامل شود و در هر حال رئوس i، f، g، h، k، l، m، n و o باز هم احاطه نشده باقی می‌مانند. چون هیچ رأسی وجود ندارد که به تنهایی همهٔ این ۹ رأس را احاطه کند لذا S باید حداقل ۲ رأس دیگر و در کل حداقل ۳ رأس داشته باشد پس $|S| \geq ۳$ یعنی $\gamma(G) \geq ۳$.

از طرفی $\{b, l, i\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۳ عضوی است. پس $\gamma(G) \leq ۳$. یعنی $\gamma(G) = ۳$ و کافی است ۳ بیمارستان در روستاهای b، l و i احداث شود تا شرایط مسئله تأمین شود.

۳ الف) $\{e, c\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای آن است، لذا $\gamma(G) \leq ۲$. از طرفی چون رأسی با درجهٔ ۷ وجود ندارد پس هیچ رأس به تنهایی همهٔ رئوس را احاطه نمی‌کند. بنابراین $\gamma(G) \geq ۱$ و لذا $\gamma(G) = ۲$.

ب) $\{e, j\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است و با استدلالی مشابه (الف) ثابت می‌شود که $\gamma(G) = ۲$.

پ) فرض کنیم S یک مجموعهٔ احاطه‌گر باشد. برای اینکه رأس a احاطه شده باشد باید یکی از رئوس a، b، e و f در S باشند. به‌طور مشابه یکی از رئوس c، d، g و h و نیز یکی از رئوس i، j، k و l باید در S باشند پس S حداقل ۳ عضو دارد و لذا $\gamma(G) \geq ۳$.

از طرفی $\{t, g, i\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است پس $\gamma(G) \leq ۳$ و لذا $\gamma(G) = ۳$.

ت) اگر S یک مجموعهٔ احاطه‌گر باشد، باید شامل یکی از اعضای $N(V)$ به‌ازای هر $V \in V(G)$ باشد. لذا برای احاطه‌کردن هر کدام از رئوس بالایی مثلث‌ها باید حداقل یکی از رئوس آن مثلث را شامل شود پس S حداقل ۵ عضو دارد، یعنی $\gamma(G) \geq ۵$.

از طرفی $\{f, i, k, l, n\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای گراف مذکور است و لذا $\gamma(G) \leq ۵$. بنابراین داریم $\gamma(G) = ۵$.

ث) فرض کنیم S یک مجموعهٔ احاطه‌گر باشد. چون این گراف شامل ۴ دور C_5 است و از طرفی از هر کدام از C_5ها حداقل ۲ رأس باید در S باشد (زیرا درغیراین‌صورت همهٔ رئوسِ آن C_5 احاطه نمی‌شوند)، لذا حداقل ۸ رأس باید در S باشد، پس $\gamma(G) \geq ۸$. از طرفی کافی است از هر کدام از C_5ها دو رأسِ غیرمجاور را انتخاب کنیم. مجموعهٔ ۸ عضوی حاصل یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای G است. بنابراین $\gamma(G) \leq ۸$ و لذا $\gamma(G) = ۸$.

۴ اگر داشته باشیم $\gamma(G) = ۱$، این بدین معناست که رأسی در G هست که به همهٔ رئوسِ دیگر گراف G وصل است یا به‌عبارتی G شامل یک ستاره است. در این حالت داریم $\Delta(G) = n - ۱$. اگر گراف G به‌جز این ستاره یال دیگری نداشته باشد، دارای $n - ۱$ یال است که کمترین تعداد ممکن است و در حالتی که تمام رئوس گراف G به هم وصل باشند، G گراف کامل است. در این حالت تعداد یال‌های G برابر $\frac{n(n-۱)}{۲}$ است که بیشترین تعداد ممکن است.

۵ باتوجه به کران $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G)$ و با توجه به اینکه P_n و C_n هر کدام دارای n رأس‌اند و $\Delta(P_n) = \Delta(C_n) = ۲$ لذا داریم :

$$\left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil \leq \gamma(C_n) \quad \text{و} \quad \left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil \leq \gamma(P_n)$$

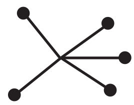
حال در P_n اگر مجموعهٔ S را به این صورت انتخاب کنیم که دومین رأسِ P_n را در آن قرار داده و سپس رئوسِ دیگر را دو تا در میان در S قرار دهیم، S یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای P_n با اندازهٔ $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ خواهد بود و لذا $\gamma(P_n) \leq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$. بنابراین $\gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ و برای C_n نیز کافی است به‌طریقی مشابه رئوس را دوتا در میان در S قرار دهیم و نتیجه‌ای مشابه آنچه برای P_n گفته شد بگیریم.

۶ با توجه به کران $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G)$ و چون در گراف k- منتظم داریم $\Delta = k$ پس $\left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil \leq \gamma(G)$

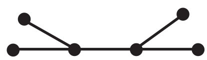
۷ داریم $n = ۱۲$ و $\Delta = ۲$ پس $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۱۲}{۲+۱} \right\rceil = ۴$. پس کمترین مقدار برای $\gamma(G)$ برابر ۴ است و چنین گرافی می‌تواند $P_{۱۲}$ یا $C_{۱۲}$ باشد.

۸

الف)



ب)



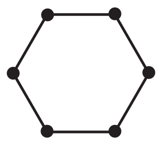
پ) اگر $k \leq \frac{n}{۲}$ باشد کافی است یک مسیر k رأسی درنظر بگیریم و به هر رأس آن یک رأس جدید وصل کنیم سپس دوباره به برخی رئوسِ مسیر k رأسی، رأس‌هایی وصل کنیم تا تعداد رئوس n تا شود.

اگر $k > \frac{n}{۲}$ در این صورت گراف موردنظر نمی‌تواند همبند باشد. می‌توان ۴ تا رأس تنها درنظر گرفت و به برخی از آنها آنقدر رأس جدید وصل کرد که تعداد رئوس n تا شود.

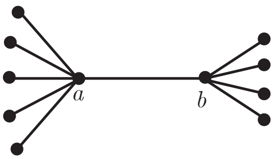
۹

الف) $P_۶$

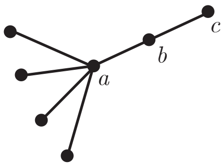
ب) $C_۶$



۱۰

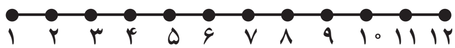


الف) کافی است گرافی مانند شکل مقابل رسم شود به‌گونه‌ای که مجموع رئوس متصل به دو رأس a و b برابر $n-۲$ تا شوند.



ب) یک گراف به شکل مقابل رسم می‌کنیم به‌طوری‌که تعداد رئوس متصل به رأس a برابر $n-۲$ تا باشد. در این‌صورت $\{a\,,\,b\}$ و $\{a\,,\,c\}$ دو γ- مجموعهٔ متمایز از آن هستند.

۱۱



الف) {۲ , ۵ , ۸ , ۱۱} یک γ- مجموعهٔ آن است.

ب) {۱ , ۳ , ۵ , ۷ , ۹ , ۱۱} یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی آن است.