فصل سوم

ترکیبیّات (شمارش)

نگاه کلی به فصل

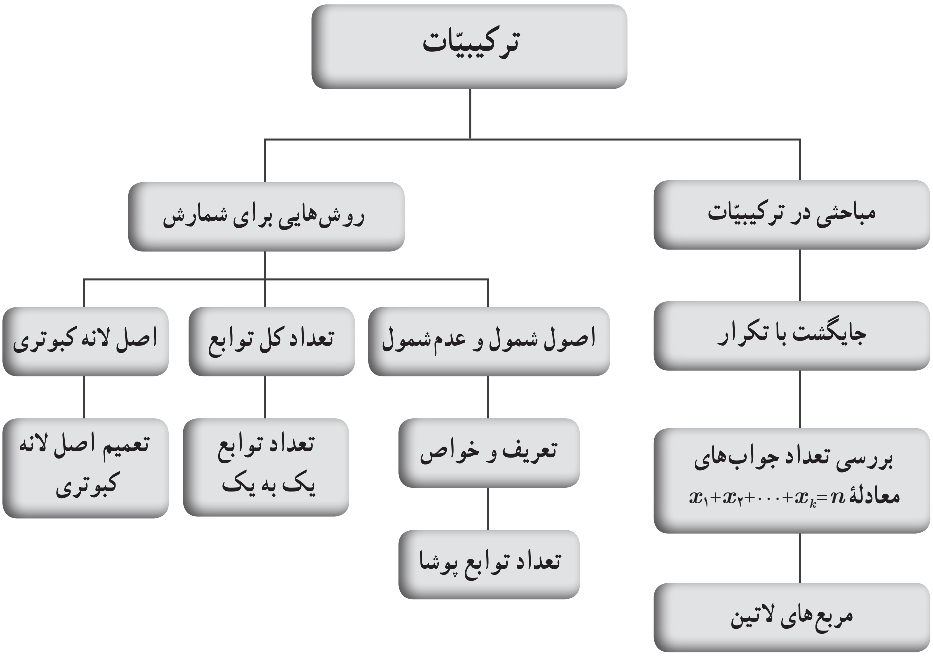
در ترکیبیّات یا علم شمارش در سطوح مقدماتی، فقط از اصل جمع و اصل ضرب برای شمارش استفاده می‌شود، حال آنکه شمارش می‌تواند توسط ابزارهای دیگر یا اصول دیگری نیز انجام شود. در این فصل، اصول دیگری برای حل مسائل شمارشی مانند اصل شمول و عدم‌شمول و اصل لانه کبوتری و تعمیم آن معرفی می‌شوند.

فصل ۳ کتاب ریاضیات گسسته به موضوع ترکیبیات پرداخته شده است. این فصل شامل دو درس است.

در درس اول، مباحثی در ترکیبیّات بیان می‌شود. ابتدا برخی از ابزارهای شمارشی که دانش‌آموزان در سال‌های قبل با آنها آشنا شدند با ارائه مثال‌هایی یادآوری می‌شود و قضیه جایگشت با تکرار همراه با سؤالاتی متنوع مطرح می‌گردد. سپس تعیین تعداد جواب‌های حسابی یا طبیعی معادله سیاله خطی مورد بررسی قرار می‌گیرد و در ادامه مربع‌های لاتین معرفی می‌شوند. مربع‌های لاتین که کاربردهای ملموسی در حل مسائل دنیای واقعی دارند، زمینهٔ مناسبی برای پرورش تفکر ریاضی و استدلال، به‌ویژه ارتقای استدلال کلاسی در دانش‌آموزان هستند.

موضوع درس دوم، در مورد روش‌هایی برای شمارش است. ابتدا اصل شمول و عدم‌شمول معرفی شده و کاربرد آن در حل برخی از مسائل و تعیین تعداد توابع پوشا مطرح می‌گردد. همچنین تعیین تعداد کل توابع و تعداد توابع یک به یک بیان شده است. سپس به معرفی اصل لانه کبوتری و تعمیم آن و کاربردشان در حل مسائل و حل مسائلی از دنیای واقعی همراه با سؤالات متنوعی پرداخته شده است.

نقشه مفهومی درس‌های ۱ و ۲ فصل سوم



دانستنی‌های معلم

امروزه ترکیبیّات یکی از شاخه‌های مهم ریاضیات است که سریعاً در حال رشد و گسترش می‌باشد. یکی از علل رشد سریع ترکیبیّات، ورود کامپیوتر در صحنه علم و جامعه است، چون اساس برنامه‌های کامپیوتری معمولاً الگوریتم‌های ترکیبیّاتی می‌باشند.

ریاضی‌دانان چینی، هندی و یونانی از قرن نخست میلادی با فرمول‌های مربوط به آرایش‌ها و ترکیب‌ها آشنایی داشتند.

کار ترکیبیّات مطالعه مجموعه‌های متناهی از اشیا و ساختارهای روی آنها، نظیر جایگشت‌ها، ترکیب‌ها و . . . است. در مطالعه این‌گونه مجموعه‌ها و ساختارهای روی آنها، سه مسئله عمده مورد بررسی قرار می‌گیرد :

الف) مسئله وجودی : گاهی اوقات وجود شیء با ویژگی‌های خاص به راحتی معلوم نمی‌شود. اگر وجود این شیء همیشه امکان ندارد، طبیعی است سؤال کنیم تحت چه شرایطی شیء مورد نظر وجود خواهد داشت.

ب) مسئله شمارش : یکی از قسمت‌های مهم و جالب ترکیبیّات، روش‌های شمارش در آن است، که بعضاً روش ترکیبیّاتی یا شمارش بدون شمردن نامیده می‌شود. شمارش بدون شمردن به سه طریق ممکن است صورت گیرد. فرض کنید می‌خواهیم تعداد اعضای مجموعه متناهی A را تعیین کنیم :

۱ــ ارائه الگویی از مسئله و تعبیر دوگانه و معادل آن

۲ــ برقرار نمودن تناظری یک به یک میان مجموعه A و مجموعه‌ای مانند B که تعداد اعضای آن را می‌دانیم.

۳ــ افراز مجموعه A به چند مجموعه جدا از هم مانند A_1، A_2، . . . و A_k به‌طوری که شمارش اعضای این مجموعه‌ها ساده یا تعداد اعضای آنها از قبل معلوم باشد، و جمع کردن تعداد اعضای آنها.

ج) مسئله بهینه‌سازی : در این قسمت با ارائه بهترین الگوریتم‌ها برای ساخت یک ترتیب، که وجود آن ثابت شده است، با حداقل عملیات و با وضوح کامل روبه‌رو هستیم. اکثر الگوریتم‌های موجود در ترکیبیّات حتی با کامپیوتر هم زمان زیادی را می‌گیرند تا به نتیجه برسند و برای بعضی از مسائل کاربردی هنوز الگوریتم کارا وجود ندارد.

درس اول

مباحثی در ترکیبیّات

اهداف

۱ یادآوری ابزارهای شمارش اصل جمع و اصل ضرب و روش‌های شمارش تبدیل و ترکیب
۲ آشنایی با قضیه جایگشت با تکرار
۳ به‌کارگیری قضیه جایگشت با تکرار در حل برخی از مسائل شمارشی
۴ توانایی در طرح مسائلی که با اصل ضرب و به روش دسته‌بندی حل می‌شوند.
۵ تعیین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ سیاله خطی $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$
۶ تعیین تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ سیاله خطی $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$
۷ معادل سازی برخی مسائل از دنیای واقعی به فرم معادله سیاله خطی و تعیین تعداد جواب‌های آنها
۸ آشنایی با مفهوم مربع‌های لاتین و درک خواص مقدماتی آنها
۹ استفاده از مربع‌های لاتین در حل مسائل کاربردی

روش تدریس

در شروع درس، ابزارهای شمارش اصل جمع و اصل ضرب و روش‌های شمارش مانند تبدیل r شیء از n شیء و ترکیب r شیء از n شیء و به‌کارگیری از آنها در حل برخی از مسائل شمارشی با ارائه مثال‌هایی یادآوری می‌شود. منظور از این یادآوری این است که به اهداف ما برای رسیدن به مفاهیم و مباحث جدید شمارشی کمک کند. با نتیجه‌گیری از مسئله مطرح شده در صفحه ۵۸، جایگشت با تکرار به‌صورت قضیه بیان می‌شود و مثال‌هایی برای درک بهتر این مفهوم برای دانش‌آموزان مطرح شده است.

در صفحه ۵۹، فعالیتی بیان شده است که با استفاده از مفهوم ترکیب و قضیه جایگشت با تکرار، به حل آن می‌پردازد و مسئله مطرح شده را در حالت کلی بررسی می‌کند، سپس با نتیجه‌ای که از قسمت قبل

می‌گیرد، تعداد جایگشت‌ها را در حالت کلی تعمیم می‌دهد. در قسمت ۴ این فعالیت، چون برای انتخاب n گل از k نوع گل، تکرار مجاز است، بنابراین جابه‌جایی ستاره‌ها با هم (انتخاب هر نوع گل) یعنی $n!$ و جابه‌جایی خط‌های عمودی با هم یعنی $(k-۱)!$، دسته گل جدیدی تولید نمی‌کند، لذا تعداد کل جایگشت‌ها را بر تعداد حالت‌های تکراری که ستاره‌ها و خط‌های عمودی جابه‌جا می‌شوند تقسیم می‌کنیم که مساوی است با :

$$\frac{(n+k-۱)!}{n!\times(k-۱)!}=\binom{n+k-۱}{n}=\binom{n+k-۱}{k-۱}$$

سپس برای درک بهتر و یادگیری دانش‌آموزان، مثال‌هایی مطرح شده است.

هدف از فعالیت صفحه ۶۰، معادل‌سازی مسئله «تعداد انتخاب‌های دلخواه ۷ شاخه گل از بین ۳ نوع گل»، به فرم معادله سیاله خطی $x_۱+x_۲+x_۳=۷$ است، تا تعداد جواب‌های این معادله که همان تعداد انتخاب‌های اشاره شده در مسئله می‌باشد را به‌دست آورد، که برابر است با :

$$\binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۷+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۹}{۲}=۳۶$$

با نتیجه‌گیری از این فعالیت، فرمول $\binom{n+k-۱}{k-۱}$ را برای تعیین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی (حسابی) معادله $x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$ معرفی می‌کند.

حل کار در کلاس صفحه ۶۱ کتاب

۱ ابتدا از هر نوع گل، ۱ شاخه برداشته، لذا تعداد انتخاب‌های دلخواه $۷-۳=۴$ می‌شود. اگر منظور از y_i همان x_i باشد که یک شاخه از آن برداشته شده، پس معادله $x_۱+x_۲+x_۳=۷$ به معادله $y_۱+y_۲+y_۳=۴$ تبدیل می‌شود، با این تفاوت که شرط‌های معادله $x_۱+x_۲+x_۳=۷$، $x_i\geq ۱$ $(i=۱,۲,۳)$ است و شرط‌های معادله $y_۱+y_۲+y_۳=۴$، $y_i\geq ۰$ $(i=۱,۲,۳)$ می‌باشد. بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $y_۱+y_۲+y_۳=۴$ برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه ۴ شاخه گل از بین ۳ نوع گل، یعنی :

$$\binom{۴+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۶}{۲}=۱۵$$

نتیجه : برای تعیین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$، درصورتی که $x_i\geq a_i$، که در آن $۱\leq i\leq k$ و همچنین a_i یک عدد طبیعی مشخص است تغییر متغیر می‌دهیم :

$$y_i=x_i-a_i\geq ۰ \Rightarrow x_i=y_i+a_i$$

سپس تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ای که برحسب y_i تنظیم شده به‌دست می‌آید.

۲ ابتدا از هر نوع گل ۱ شاخه برداشته، لذا تعداد انتخاب‌های دلخواه به $(n-k)$ تقلیل می‌یابد و معادله به‌صورت $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ به $y_1+y_2+\cdots+y_k=n-k$ تبدیل می‌شود. یعنی تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $y_1+y_2+\cdots+y_k=n-k$ برابر است. بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $y_1+y_2+\cdots+y_k=n-k$ به‌صورت زیر خواهد بود :

$$\binom{(n-k)+k-1}{k-1}=\binom{n-1}{k-1}$$

یعنی تعداد جواب‌های صحیح و مثبت (طبیعی) معادله $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$.

۳

$$x_1>1\Rightarrow x_1\geq 2\Rightarrow x_1-2\geq 0\xrightarrow{y_1=x_1-2}y_1\geq 0,\ x_1=y_1+2$$

$$x_3>3\Rightarrow x_3\geq 4\Rightarrow x_3-4\geq 0\xrightarrow{y_3=x_3-4}y_3\geq 0,\ x_3=y_3+4$$

$$\Rightarrow y_1+2+x_2+y_3+4+x_4+x_5=14\Rightarrow y_1+x_2+y_3+x_4+x_5=8$$

$$\Rightarrow\binom{8+5-1}{5-1}=\binom{12}{4}=495$$

۴ با توجه به شرط مسئله $(x_i\geq 1\ ,\ 1\leq i\leq 5)$ و فرمول سؤال ۲ این کار در کلاس داریم :

$$\binom{11-1}{5-1}=\binom{10}{4}=210$$

۵

$$x_3=4$$

$$x_5>2\Rightarrow x_5-2>0\xrightarrow{y_5=x_5-2}y_5>0,\ x_5=y_5+2$$

$$x_1+x_2+4+x_4+y_5+2+x_6=12$$

$\Rightarrow x_1+x_2+x_4+y_5+x_6=6\Rightarrow$ با توجه به فرمول سؤال ۲: $\binom{6-1}{5-1}=\binom{5}{4}=5$

ارائهٔ تعریف مربع لاتین می‌تواند به‌طور مستقیم صورت بگیرد و نیز می‌توان مانند آنچه در صفحهٔ ۶۲ صورت گرفته است با طرح یک سؤال دانش‌آموزان را به سمت این مفهوم سوق داد. مطمئن شوید دانش‌آموزان مفهوم مربع لاتین را فهمیده‌اند و خواصی از آن را که در کتاب مطرح شده است مانند «تعویض جای دو سطر (یا دو ستون) مربع لاتین بودن را حفظ می‌کند» و یا «اعمال یک جایگشت بر اعضای یک مربع لاتین، مربع لاتین بودن را حفظ می‌کند» را با درک علت آن فهمیده‌اند. توجه کنید که یکی از اهداف

این درس ارتقای سطح استدلال کلامی دانش‌آموزان است، لذا از دانش‌آموزان بخواهید که استدلال‌های موردنظر را به‌صورت شفاهی بیان نمایند. در این بخش توجه داشته باشید که سؤالات انحرافی بسیاری مانند اینکه «در حالت کلی چند مربع لاتین $n×n$ داریم» و غیره می‌توان مطرح نمود که جزء اهداف درسی این کتاب نیستند.

در تعریف دو مربع لاتین متعامد، معمولاً گفته می‌شود از کنار هم قرار گرفتن درایه‌های نظیر به نظیر، زوج مرتب‌هایی حاصل می‌شود اما در این کتاب برای راحت‌تر درک کردن دانش‌آموزان و از آنجا که مربع‌های لاتینِ با مرتبهٔ ۲ رقمی در این کتاب مطرح نشده‌اند به‌جای زوج مرتب، اعداد دو رقمی گفته شده است.

مطمئن شوید که دانش‌آموزان اینکه متعامد بودن دو مربع در حل مسائل دقیقاً کجا به‌کار می‌آید را متوجه شده‌اند.

مطالب خواندنی آورده شده در صفحهٔ ۶۷ می‌تواند به جهات مختلف برای دانش‌آموزان جالب باشد. گرچه این مطلب به‌عنوان خواندنی آمده و طبیعتاً در امتحان از آن سؤال مطرح نمی‌شود اما این مطلب که دانش‌آموزان بدانند مجهولاتِ مفهومی به ظاهر در طول سال‌ها چندین ریاضی‌دان را به خود مشغول کرده است و حتی اویلر در این زمینه حدس اشتباه زده است می‌تواند این ذهنیت غلط را که ریاضیات صرفاً توسط چند نابغه که همه چیز را می‌دانسته‌اند به‌وجود آمده است، در آنها مرتفع سازد.

برای ساخت دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ فرد شیوه‌های دیگری هم هست که در این کتاب مطرح نشده است. برای ساخت دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ زوج نیز شیوه‌هایی ارائه شده است که در این کتاب طرح آنها مدنظر نیست. لذا اگر در ارزشیابی سؤالی مطرح شود که نیاز به دو مربع لاتین مرتبهٔ زوج داشته باشد باید دو مربع لاتین متعامد نیز ارائه شوند. در سؤالات ارزشیابی، با تغییر عامل‌های سؤال مطرح شده دربارهٔ کارخانهٔ ریسندگی می‌توانید سؤال‌های کاربردی مختلفی ارائه کنید که برنامه‌ریزی برای آنها توسط دو مربع لاتین متعامد انجام شود.

توصیه آموزشی

- ❑ به پیش‌نیازهای مبحث درس توجه شود و در کلاس با روش پرسش و پاسخ با دانش‌آموزان، مفاهیمی که قبلاً آموخته‌اند، مرور و یادآوری گردد تا مباحث جدید و مرتبط را بهتر درک کنند.
- ❑ طرح سؤالاتی برای معادلات سیاله که شرط‌هایی برای x_iها به‌صورت $a \le x_i \le b$ در آن لحاظ شده باشد، در امتحانات و ارزشیابی‌ها جایز نمی‌باشد.
- ❑ به اهداف درس توجه شود و از طرح زود هنگام مسائل دشوار اجتناب گردد.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان

❑ در حل مسئله‌ای که از قضیه جایگشت با تکرار استفاده می‌شود، ممکن است تعداد تکرارها را نادرست شمرده باشد.

❑ عدم درک درست از مفاهیم ترکیبیّاتی و به‌کارگیری نادرست از آنها در حل مسائل شمارشی.

❑ هنگام معادل‌سازی مسئله‌ای از دنیای واقعی به فرم معادله سیاله خطی، ممکن است دچار اشتباه شود.

❑ برای تعیین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی (حسابی) یا تعداد جواب‌های صحیح و مثبت (طبیعی) معادله سیاله خطی، به شرط‌های داده شده در مسئله دقت نمی‌کند، که در صورت لزوم با تعویض کدام متغیرها بتواند مسئله را به شرایط مورد نظر رسانده و با استفاده از فرمول، تعداد جواب‌های معادله را به‌دست آورد.

حل تمرینات درس اول صفحه ۷۲ کتاب

۱ هر دو برادری که رو به روی هم نشستند را در یک دسته در نظر می‌گیریم، پس ۴ دسته داریم و تعداد جایگشت‌ها می‌شود !۴، از طرفی در هر دسته، هر دو برادری که رو به روی هم نشستند هم جایگشت دارند که برابر است با !۲. بنابراین طبق اصل ضرب داریم : $۴!\times(۲!)^{۴}$

۲ تعداد جایگشت‌های کد ۵ رقمی برابر !۵ است. از طرفی با توجه به تعداد حالات انتخاب ارقام از مجموعه‌های A و B داریم : $۵!\times\binom{۵}{۳}\times\binom{۴}{۲}$

۳ الف) !۹

ب) $۶!\times۴!$

پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند، پس باید در قفسه، کتاب‌ها را یک در میان بچینیم.

۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۵
ریاضی	فیزیک	ریاضی	فیزیک	ریاضی	فیزیک	ریاضی	فیزیک	ریاضی

طبق اصل ضرب داریم : $۵!\times۴!$

ت) $۳!\times۷!$

۴ ۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم در یک ردیف قرار بگیرند، اگر بخواهیم دانش‌آموزان پایه دوازدهم همواره کنار هم باشند؟

۵
$$\frac{۶!}{۲!\times ۳!}$$

۶
$$\frac{۹!}{۳!\times ۲!\times ۳!}$$

۷
$$\frac{۷!}{۲!\times ۲!\times ۳!}$$

۸ الف)

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵=۱۱\Rightarrow\binom{۱۱+۵-۱}{۵-۱}=\binom{۱۵}{۴}=۱۳۶۵$$

ب)

$$\binom{۱۱-۱}{۵-۱}=\binom{۱۰}{۴}=۲۱۰$$

پ)

$$x_۲\geq ۲\Rightarrow x_۲-۲\geq ۰\xrightarrow{y_۲=x_۲-۲}y_۲\geq ۰,\ x_۲=y_۲+۲$$
$$x_۵>۳\Rightarrow x_۵\geq ۴\Rightarrow x_۵-۴\geq ۰\xrightarrow{y_۵=x_۵-۴}y_۵\geq ۰,\ x_۵=y_۵+۴$$
$$\Rightarrow x_۱+y_۲+۲+x_۳+x_۴+y_۵+۴=۱۱$$
$$\Rightarrow x_۱+y_۲+x_۳+x_۴+y_۵=۵\Rightarrow\binom{۵+۵-۱}{۵-۱}=\binom{۹}{۴}=۱۲۶$$

ت)

$$x_۳=۰$$
$$x_۴\geq ۵\Rightarrow x_۴-۵\geq ۰\xrightarrow{y_۴=x_۴-۵}y_۴\geq ۰,\ x_۴=y_۴+۵$$
$$\Rightarrow x_۱+x_۲+۰+y_۴+۵+x_۵=۱۱$$
$$\Rightarrow x_۱+x_۲+y_۴+x_۵=۶\Rightarrow\binom{۶+۴-۱}{۴-۱}=\binom{۹}{۳}=۸۴$$

۹ الف)

$$۲\leq i\leq ۵\rightarrow i=۲,۳,۴,۵$$
$$x_i>۰\Rightarrow x_i\geq ۱\rightarrow x_i-۱\geq ۰\xrightarrow{y_i=x_i-۱}y_i\geq ۰,\ x_i=y_i+۱$$
$$\Rightarrow x_۱+y_۲+۱+y_۳+۱+y_۴+۱+y_۵+۱=۱۰$$
$$\Rightarrow x_۱+y_۲+y_۳+y_۴+y_۵=۶\Rightarrow\binom{۶+۵-۱}{۵-۱}=\binom{۱۰}{۴}=۲۱۰$$

ب)

$$x_۱>۲\Rightarrow x_۱\geq ۳\Rightarrow x_۱-۳\geq ۰\xrightarrow{y_۱=x_۱-۳}y_۱\geq ۰,\ x_۱=y_۱+۳$$
$$x_۵\geq ۴\Rightarrow x_۵-۴\geq ۰\xrightarrow{y_۵=x_۵-۴}y_۵\geq ۰,\ x_۵=y_۵+۴$$

$$\Rightarrow y_۱+۳+x_۲+x_۳+x_۴+y_۵+۴+x_۶=۱۲$$

$$\Rightarrow y_۱+x_۲+x_۳+x_۴+y_۵+x_۶=۵ \Rightarrow \binom{۵+۶-۱}{۶-۱}=\binom{۱۰}{۵}=۲۵۲$$

پ)

$$۱\leq i\leq ۵ \rightarrow i=۱,۲,۳,۴,۵$$

$$x_i\geq ۱ \Rightarrow x_i-۱\geq ۰ \xrightarrow{y_i=x_i-۱} y_i\geq ۰ , x_i=y_i+۱$$

$$\Rightarrow y_۱+۱+y_۲+۱+y_۳+۱+y_۴+۱+y_۵+۱=۱۱$$

$$\Rightarrow y_۱+y_۲+y_۳+y_۴+y_۵=۶ \Rightarrow \binom{۶+۵-۱}{۵-۱}=\binom{۱۰}{۴}=۲۱۰$$

ت)

$$\begin{cases} x_۲=۰ \Rightarrow x_۱+۰+x_۳+x_۴=۷ \Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۷ \Rightarrow \binom{۷+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۹}{۲}=۳۶ \\ x_۲=۱ \Rightarrow x_۱+۳+x_۳+x_۴=۷ \Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۴ \Rightarrow \binom{۴+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۶}{۲}=۱۵ \\ x_۲=۲ \Rightarrow x_۱+۶+x_۳+x_۴=۷ \Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۱ \Rightarrow \binom{۱+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۳}{۲}=۳ \end{cases}$$

$\Rightarrow$ تعداد کل جواب‌ها = ۳۶ + ۱۵ + ۳ =۵۴

ث)

$$\begin{cases} x_۲=۰ \Rightarrow x_۱+۰+x_۳+x_۴=۳ \Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۳ \Rightarrow \binom{۳+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۵}{۲}=۱۰ \\ x_۲=۱ \Rightarrow x_۱+۱+x_۳+x_۴=۳ \Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۲ \Rightarrow \binom{۲+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۴}{۲}=۶ \\ x_۲=۴ \Rightarrow x_۱+۲+x_۳+x_۴=۳ \Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۱ \Rightarrow \binom{۱+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۳}{۲}=۳ \\ x_۲=۹ \Rightarrow x_۱+۳+x_۳+x_۴=۳ \Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۰ \Rightarrow \binom{۰+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۲}{۲}=۱ \end{cases}$$

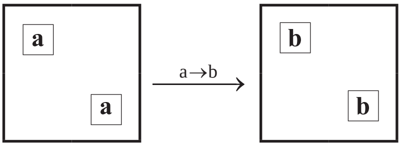
$\Rightarrow$ تعداد کل جواب‌ها =۱۰ + ۶ +۳ + ۱ =۲۰

۱۰

$$\begin{cases} x_۱+x_۲+x_۳=۵ \\ x_i\geq ۰ , i=۱,۲,۳ \end{cases} \Rightarrow \binom{۵+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۷}{۲}=۲۱$$

۱۱

$$\begin{cases} x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۸ \\ x_i\geq ۱ , i=۱,۲,۳,۴ \end{cases} \Rightarrow \binom{۸-۱}{۴-۱}=\binom{۷}{۳}=۳۵$$



۱۲ خیر ــ مثلاً اگر تمام ۱ها به ۲ تبدیل شده باشند، در این صورت در جایگاهی متناظر آنها اعداد تکراری ۱۲ به‌وجود می‌آید.

۱۳ الف)

$A =$

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

$\longrightarrow A_۱ =$

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

بله متعامدند

ب)

$A =$

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

$\longrightarrow$

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

$\longrightarrow A_۲ =$

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

خیر متعامد نیستند زیرا مثلاً در جایگاه‌های سطر اول ستون اول و سطر دوم ستون سوم عدد دورقمی ۳۲ تکرار می‌شود.

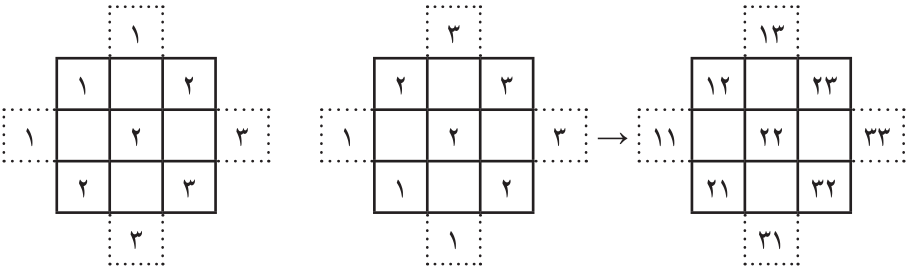
پ) ۱ــ خیر ۲ــ خیر

۱۴ کافی است از یک مربع لاتین ۶×۶ استفاده کنیم. جلسات را با $S_۱$, $S_۲$, . . . و $S_۶$ نمایش می‌دهیم.

	$C_۱$	$C_۲$	$C_۳$	$C_۴$	$C_۵$	$C_۶$
$S_۱$	$T_۱$	$T_۲$	$T_۳$	$T_۴$	$T_۵$	$T_۶$
$S_۲$	$T_۶$	$T_۱$	$T_۲$	$T_۳$	$T_۴$	$T_۵$
$S_۳$	$T_۵$	$T_۶$	$T_۱$	$T_۲$	$T_۳$	$T_۴$
$S_۴$	$T_۴$	$T_۵$	$T_۶$	$T_۱$	$T_۲$	$T_۳$
$S_۵$	$T_۳$	$T_۴$	$T_۵$	$T_۶$	$T_۱$	$T_۲$
$S_۶$	$T_۲$	$T_۳$	$T_۴$	$T_۵$	$T_۶$	$T_۱$

لذا به‌طور مثال مدرس $T_۱$ در جلسهٔ اول به کلاس $C_۱$ می‌رود.

۱۵



۱۲	۳۱	۲۳
۳۳	۲۲	۱۱
۲۱	۱۳	۳۲

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

۲	۱	۳
۳	۲	۱
۱	۳	۲

با همین روش دو مربع لاتین از مرتبهٔ ۷ ساخته می‌شود.

۱۶ با روش توضیح داده شده در صفحهٔ ۷۰ می‌توان دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۷ به‌دست آورد که با نوشتن آنها در یک مربع و نمایش راننده‌ها با d_1 ، . . . و d_7 و نمایش روزهای هفته با s_1 ، . . . و s_7 و نمایش ماشین‌ها با اعداد سمت چپ و نمایش جاده‌ها با اعداد سمت راست، خواهیم داشت :

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
d_1	۱۲	۲۳	۳۴	۴۵	۵۶	۶۷	۷۱
d_2	۷۳	۱۴	۲۵	۳۶	۴۷	۵۱	۶۲
d_3	۶۴	۷۵	۱۶	۲۷	۳۱	۴۲	۵۳
d_4	۵۵	۶۶	۷۷	۱۱	۲۲	۳۳	۴۴
d_5	۴۶	۵۷	۶۱	۷۲	۱۳	۲۴	۳۵
d_6	۳۷	۴۱	۵۲	۶۳	۷۴	۱۵	۲۶
d_7	۲۱	۳۲	۴۳	۵۴	۶۵	۷۶	۱۷

بنابراین به‌طور مثال رانندهٔ d_1 در روز s_1 با ماشین شمارهٔ ۱ و در جادهٔ شمارهٔ ۲ رانندگی می‌کند.

درس دوم

روش‌هایی برای شمارش

اهداف

۱ آشنایی با مفهوم اصل شمول و عدم‌شمول
۲ به‌کارگیری اصل شمول و عدم‌شمول در حل مسائل ترکیبیّاتی
۳ آشنایی با مفهوم توابع پوشا و یافتن تعداد آنها به کمک اصل شمول و عدم‌شمول
۴ به‌کارگیری مفهوم اصل ضرب برای یافتن تعداد کل توابع
۵ به‌کارگیری مفهوم تبدیل r شیء از n شیء برای یافتن تعداد توابع یک به یک
۶ مهارت در ارائه الگویی از مسئله و تعبیر معادل آن
۷ آشنایی با مفهوم اصل لانه کبوتری و به‌کارگیری آن در حل برخی از مسائل
۸ آشنایی با مفهوم تعمیم اصل لانه کبوتری و به‌کارگیری آن در حل برخی از مسائل
۹ توانایی در طرح مسائلی که با اصل لانه کبوتری حل می‌شوند.

روش تدریس

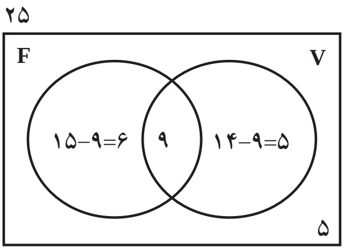
یکی از تکنیک‌های بسیار مهم در حل مسائل ترکیبیّاتی، اصل شمول و عدم‌شمول است. دانش‌آموزان از سال‌های قبل، با نظریه مجموعه‌ها آشنایی دارند. بهتر است قبل از ورود به موضوع درس، با روش پرسش و پاسخ در کلاس، مفاهیم $A\cup B$ و $A\cap B$ و $A-B$ و A' برای آنها یادآوری شود، سپس به معرفی اصل شمول و عدم‌شمول پرداخت.

واضح است که تساوی $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ اصل شمول است و تساوی $|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|$ اصل عدم‌شمول، چون $\overline{A\cup B}$ هیچ یک از ویژگی‌های اعضای A و B را شامل نمی‌شود.

در ابتدای درس، اصل شمول و عدم‌شمول را برای دو مجموعه متناهی بیان می‌کند و سپس این اصل را برای سه مجموعه متناهی بسط می‌دهد. در کتاب برای درک بهتر و یادگیری دانش‌آموزان، نمودار ون برای

دو مجموعه متناهی و برای سه مجموعه متناهی که با هم در اشتراک هستند، رسم شده است. واضح است اگر A و B دو مجموعه متناهی جدا از هم باشند، داریم : $|A\cup B|=|A|+|B|$

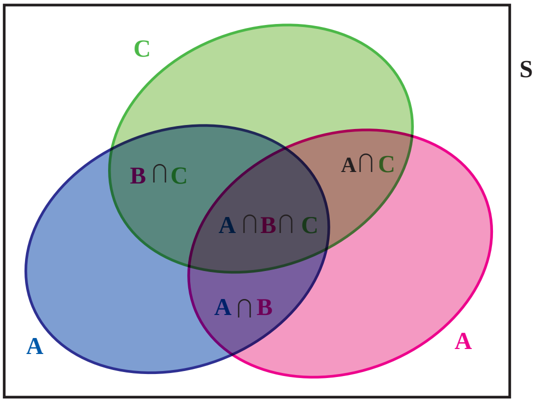
در صفحه ۷۴، مثالی مطرح شده است که دانش‌آموزان در کتاب ریاضی (۱) پایه دهم، در مبحث تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه، با این‌گونه سؤالات آشنایی دارند و برای حل آن، یا از روش نموداری (رسم نمودار ون) یا از قانون $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ استفاده می‌کردند.



برای اینکه برایشان یادآوری شود، از دانش‌آموزان بخواهیم قبل از استفاده از اصل شمول و عدم‌شمول، با رسم نمودار ون پاسخ مثال صفحه ۷۴ را به‌دست آورند. مانند روبه‌رو :

سپس با کمک از اصل شمول و عدم‌شمول، حل این مثال را در کتاب تکمیل نمایند.

در صفحه ۷۵، اصل شمول برای سه مجموعه متناهی بیان شده است و برای دلایل برقراری تساوی آن، از دانش‌آموزان خواسته شده، با کمک نمودار ون به سؤال پاسخ دهند. بهتر است از دانش‌آموزان بخواهیم در نمودار ون، نواحی اشتراک را با نماد مجموعه‌ها نشان دهند. مانند نمودار ون زیر :



$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

تعداد اعضای اجتماع سه مجموعه، یعنی تعداد اعضایی که حداقل به یکی از سه مجموعه تعلق دارند.

با توجه به نمودار ون، در جمع تعداد اعضای مجموعه‌های A، B و C، هر عضو متعلق به اشتراک دوتایی مجموعه‌ها به‌طور تکراری به حساب آمده، پس اشتراک دوتایی‌ها باید یک بار کم شوند. همچنین در جمع تعداد اعضای هر سه مجموعه، اشتراک سه تایی آنها، سه بار حساب شده بود و وقتی اشتراک‌های دوتایی

را کم می‌کنیم، هر سه بار حذف می‌شود، پس باید یک اشتراک سه تایی اضافه کنیم.

سپس با استفاده از تعریف متمم، اصل عدم‌شمول یعنی تعداد اعضایی از S که در هیچ یک از مجموعه‌های A، B و C تعلق ندارند، بیان می‌شود. برای نشان دادن کاربرد اصل شمول و عدم‌شمول، فعالیتی مطرح شده است.

تکمیل فعالیت صفحه ۷۵

۱ ۱۳

۲ خیر، چون بر اعداد ۳، ۴ و ۵ بخش‌پذیر است.

۳ مجموعه اعدادی که بر ۳ بخش‌پذیر نیستند را $\overline{A}$ و مجموعه اعدادی که بر ۴ بخش‌پذیر نیستند را $\overline{B}$ و مجموعه اعدادی که بر ۵ بخش‌پذیر نیستند را $\overline{C}$ تعریف می‌کنیم.

۴ بله، طبق قانون دمورگان به‌طور کلی داریم : $\overline{\bigcup A_i} = \bigcap \overline{Ai}$

$$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{(A \cup B) \cup C} = \overline{(A \cup B)} \cap \overline{C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

۵

$$A = \{۱ \le n \le ۴۰۰ | ۳ | n\} \Rightarrow |A| = \left[\frac{۴۰۰}{۳}\right] = ۱۳۳$$

$$B = \{۱ \le n \le ۴۰۰ | ۴ | n\} \Rightarrow |A| = \left[\frac{۴۰۰}{}\right] = ۱۰۰$$

$$C = \{۱ \le n \le ۴۰۰ | ۵ | n\} \Rightarrow |A| = \left[\frac{۴۰۰}{۵}\right] = ۸۰$$

$$|A \cap B| = \left[\frac{۴۰۰}{[۳,۴]}\right] = \left[\frac{۴۰۰}{۱۲}\right] = ۱۳۳ \qquad |A \cap C| = \left[\frac{۴۰۰}{[۳,۵]}\right] = \left[\frac{۴۰۰}{۱۵}\right] = ۲۶$$

$$|B \cap C| = \left[\frac{۴۰۰}{[۴,۵]}\right] = \left[\frac{۴۰۰}{۲۰}\right] = ۲۰ \qquad |A \cap B \cap C| = \left[\frac{۴۰۰}{[۳,۴,۵]}\right] = \left[\frac{۴۰۰}{۶۰}\right] = ۶$$

$$|A \cup B \cup C| = ۱۳۳ + ۱۰۰ + ۸۰ - ۳۳ - ۲۶ - ۲۰ + ۶ = ۲۴۰$$

$$\Rightarrow |\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = ۴۰۰ - ۲۴۰ = ۱۶۰$$

نکته مطرح شده در این فعالیت را می‌توان در حالت کلی بیان نمود، یعنی تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی k که بر عدد a بخش‌پذیر باشند برابر $\left[\frac{k}{a}\right]$ است و تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی k که هم بر عدد a و هم بر عدد b بخش‌پذیر باشند برابر $\left[\frac{k}{[a,b]}\right]$ است.

حل کار در کلاس صفحه ۷۶

$$A=\{1\le n\le ۳۵۰ | ۴ \mid n\} \Rightarrow |A|=\left[\frac{۳۵۰}{۴}\right]=۸۷$$

$$B=\{1\le n\le ۳۵۰ | ۵ \mid n\} \Rightarrow |A|=\left[\frac{۳۵۰}{۵}\right]=۷۰$$

$$C=\{1\le n\le ۳۵۰ | ۶ \mid n\} \Rightarrow |A|=\left[\frac{۳۵۰}{۶}\right]=۵۸$$

$$|A\cap B|=\left[\frac{۳۵۰}{[۴,۵]}\right]=\left[\frac{۳۵۰}{۲۰}\right]=۱۷ \qquad |A\cap C|=\left[\frac{۳۵۰}{[۴,۶]}\right]=\left[\frac{۳۵۰}{۱۲}\right]=۲۹$$

$$|B\cap C|=\left[\frac{۳۵۰}{[۵,۶]}\right]=\left[\frac{۳۵۰}{۳۰}\right]=۱۱ \qquad |A\cap B\cap C|=\left[\frac{۳۵۰}{[۴,۵,۶]}\right]=\left[\frac{۳۵۰}{۶۰}\right]=۵$$

$$|A\cup B\cup C|=۸۷+۷۰+۵۸-۱۷-۲۹-۱۱+۵=۱۶۳$$

$$\Rightarrow |\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C|=۳۵۰-۱۶۳=۱۸۷$$

برای درک بهتر دانش‌آموزان از کاربرد اصل شمول و عدم‌شمول، سؤالات متنوعی مطرح شده است و با مباحثی که در فصل‌های قبل خوانده‌اند، مرتبط می‌باشند.

حل کار در کلاس صفحه ۷۷

۱ گراف‌های الف و پ مورد نظرند، چون رأس تنها ندارند و گراف‌های ب و ت را نباید شمرد.

۲ می‌دانیم تعداد کل گراف‌های ساده‌ای که می‌توان با p رأس رسم کرد، برابر است با : $۲^{\binom{p}{۲}}=۲^{\frac{p(p-۱)}{۲}}$

پس تعداد کل گراف‌های ساده با سه رأس برابر است با : $۲^{\binom{۳}{۲}}=۲^{\frac{۳(۳-۱)}{۲}}=۲^{۳}=۸$

۳ A_a : مجموعه راه‌های طراحی شده‌ای که در آنها روستای A تنها بماند.

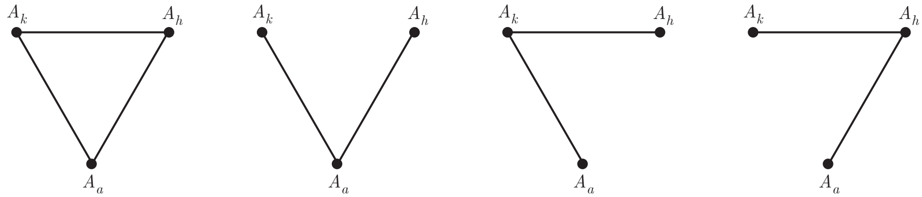
A_h : مجموعه راه‌های طراحی شده‌ای که در آنها روستای H تنها بماند.

$$|A_k|=|A_a|=|A_h|=۲$$

$$|A_k\cap A_a|=|A_k\cap A_h|=|A_a\cap A_h|=۱ \qquad |A_k\cap A_a\cap A_h|=۱$$

$$|A_k\cap A_a\cap A_h|=۲+۲+۲-۱-۱-۱+۱=۴$$

$$\Rightarrow |\overline{A_k} \cap \overline{A_a} \cap \overline{A_h}| = |\overline{A_k \cup A_a \cup A_h}| = |S| - |A_k \cup A_a \cup A_h| = ۸ - ۴ = ۴$$



۴ الف) برای محاسبه $|A_k|$، یعنی تعداد طرق جاده‌کشی اگر روستای K تنها بماند، در این حالت روستای K را کنار می‌گذاریم و می‌ماند دو روستای دیگر، که ۱ یال (جاده) بین آنها وجود دارد که آن یال یا می‌تواند باشد و یا می‌تواند نباشد، پس می‌شود ۲ حالت و همین طور داریم : $|A_k|=|A_a|=|A_h|=۲$

ب) برای محاسبه $|A_k \cap A_a|$، یعنی تعداد طرق جاده‌کشی اگر روستاهای K و A تنها بمانند، در این حالت روستاهای K و A را کنار می‌گذاریم، می‌ماند یک روستا، پس می‌شود ۱ حالت و همین طور داریم :

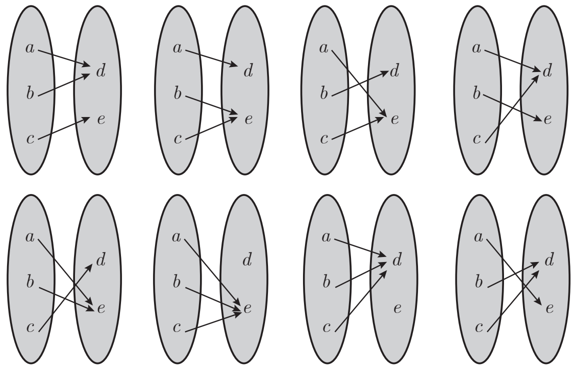
$$|A_k \cap A_a| = |A_k \cap A_h| = |A_a \cap A_h| = ۱$$

پ) برای محاسبه $|A_k \cap A_a \cap A_h|$، یعنی تعداد طرق جاده‌کشی اگر روستاهای K و A و H تنها بمانند، که باز هم می‌شود ۱ حالت و داریم : $|A_k \cap A_a \cap A_h| = ۱$

فعالیت صفحه ۷۸

قبل از بررسی و تکمیل حل آن، برای جلب توجه دانش‌آموزان از آنها خواسته شود، تعداد توابع یک مجموعه سه عضوی به یک مجموعه دو عضوی را با استفاده از رسم نمودار پیکانی پیدا کنند. مانند زیر :

$$f: \{a,b,c\} \rightarrow \{d,e\}$$



پس کلاً ۸ تابع وجود دارد.

با این مثال ساده، دانش‌آموزان درک می‌کنند که شمردن تعداد کل توابع از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی، که تعداد اعضای بیشتری داشته باشند، کار مشکل و زمان‌بری است. حال با استفاده از اصول شمارش و بدون شمردن مستقیم به راحتی می‌توان از رابطه n^m تعداد کل توابع را پیدا نمود.

سپس تابع پوشا معرفی شده است و نشان داده می‌شود که با استفاده از اصل شمول و عدم‌شمول، می‌توان تعداد توابع پوشا را شمارش کرد.

نکته‌ای که دانش‌آموزان باید به آن دقت داشته باشند این است که با توجه به تعریف تابع پوشا، اگر $|A|<|B|$ باشد، هیچ تابع پوشای $f: A \rightarrow B$ وجود نخواهد داشت.

در قسمت ۱ فعالیت صفحه ۷۸، تعریفی برای مجموعه‌های $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ بیان شده است، $A_۱$ شامل توابعی است که در آنها به $b_۱$ پیکان نمی‌رسد، $A_۲$ شامل توابعی است که در آنها به $b_۲$ پیکان نمی‌رسد و $A_۳$ شامل توابعی است که در آنها به $b_۳$ پیکان نمی‌رسد. پس $A_۱ \cap A_۲$ شامل توابعی است که در آنها به $b_۱$ و $b_۲$ پیکان نمی‌رسد و به همین ترتیب، $A_۱ \cap A_۳$ شامل توابعی است که در آنها به $b_۱$ و $b_۳$ پیکان نمی‌رسد و $A_۲ \cap A_۳$ شامل توابعی است که در آنها به $b_۲$ و $b_۳$ پیکان نمی‌رسد و $A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳$ شامل توابعی است که در آنها به $b_۱$، $b_۲$ و $b_۳$ پیکان نمی‌رسد.

در قسمت ۲ این فعالیت، برای پیدا کردن تعداد اعضای $A_۱$، یعنی تعداد اعضای توابعی که به $b_۱$ پیکان نمی‌رسد، با حذف $b_۱$ از مجموعه B، سؤال شبیه این است که چه تعداد تابع از مجموعه $\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴,a_۵\}$ به مجموعه $\{b_۲,b_۳\}$ وجود دارد، که برابر است با : $۲^۵$ و به همین صورت واضح است که : $|A_۱|=|A_۲|=|A_۳|=۲^۵=۳۲$

برای پیدا کردن تعداد اعضای $A_۱ \cap A_۲$ ، یعنی تعداد اعضای توابعی که به $b_۱$ و $b_۲$ پیکان نمی‌رسد، با حذف $b_۱$ و $b_۲$ از مجموعهB، سؤال شبیه این است که چه تعداد تابع از مجموعه $\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴,a_۵\}$ به مجموعه $\{b_۳\}$ وجود دارد، که برابر است با : $۱^۵$ و به همین صورت واضح است که : $|A_۱ \cap A_۲|=|A_۱ \cap A_۳|=|A_۲ \cap A_۳|=۱^۵=۱$

و در آخر $|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳|=۰$. از طرفی تعداد کل توابع از مجموعه ۵ عضوی به مجموعه ۳ عضوی برابر $۳^۵$ است، یعنی : $|S|=۳^۵=۲۴۳$. بنابراین برای پیدا کردن تعداد اعضای مجموعه $(\overline{A_۱} \cap \overline{A_۲} \cap \overline{A_۳})$ داریم :

$$|A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = ۳۲+۳۲+۳۲-۱-۱-۱+۰ = ۹۳$$
$$\Rightarrow |\overline{A_۱} \cap \overline{A_۲} \cap \overline{A_۳}| = |\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}| = |S| - |A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = ۲۴۳-۹۳ = ۱۵۰$$

در ادامه، برای درک بهتر دانش‌آموزان مثال‌های عینی و کاربردی مطرح شده است.

در فعالیت صفحه ۷۹، می‌خواهیم تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۶ عضوی را شمارش کنیم. بهتر است تعریف تابع یک به یک از دانش‌آموزان پرسیده شود تا برایشان یادآوری

شود که تابع یک به یک تابعی است که هیچ دو زوج مرتبی، مؤلفه‌های دوم یکسان نداشته باشند.

۱ ۶ راه

۲ ۵ راه، چون f باید یک به یک باشد، وقتی یکی از اعضای مجموعه B برای $f(a_1)$ انتخاب شده، پس ۵ انتخاب برای $f(a_2)$ خواهیم داشت.

۳ به ۴ طریق می‌توان $f(a_3)$ را تعریف کرد.

به ۳ طریق می‌توان $f(a_4)$ را تعریف کرد. $\Rightarrow f(a_4) \neq f(a_1), f(a_4) \neq f(a_2), f(a_4) \neq f(a_3) \Rightarrow f$ یک به یک

بنابراین تعداد کل توابع یک به یک برابر است با : $6 \times 5 \times 4 \times 3 = \frac{6!}{2!}$

سپس با نتیجه‌گیری از این فعالیت، فرمول تعیین تعداد کل توابع یک به یک از مجموعه A به مجموعه B که معادل است با یافتن تعداد راه‌های انتخاب m شیء از k شیء، بیان می‌شود و مثالی برای یادگیری دانش‌آموزان مطرح شده است.

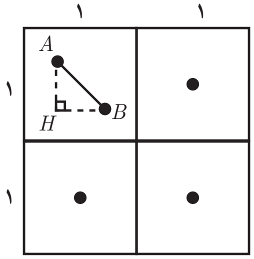
مبحث بعدی درس به معرفی اصل لانه کبوتری پرداخته شده است. اصل لانه کبوتری یکی از ساده‌ترین ابزار برای حل مسائل ترکیبیّاتی می‌باشد و با آنکه صورت ساده‌ای دارد می‌توان مسائل مهم و پیچیده‌ای را با استفاده از این اصل حل نمود، که در واقع بدون استفاده از این اصل، اثبات و حل چنین مسائلی کاری بسیار دشوار خواهد بود. در کتاب برای ایجاد انگیزه یادگیری در دانش‌آموزان، شروع درس با سؤالی مطرح شده است و بهتر است به روش پرسش و پاسخ در کلاس مطرح گردد. سپس اصل لانه کبوتری بیان شده و با سؤالات متنوعی، کاربرد آن در حل مسائل نشان داده می‌شود.

پاسخ تمرین صفحه ۸۱

می دانیم باقی مانده تقسیم هر عدد بر n یکی از اعداد ۰، ۱، ۲، ... یا $n-1$ می‌باشد، که آنها را به‌عنوان لانه‌ها در نظر می‌گیریم، پس n لانه داریم. حال اگر $n+1$ عدد طبیعی دلخواه را به‌عنوان کبوترها در نظر بگیریم، طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار خواهند گرفت، یعنی حداقل دو عدد از این $n+1$ عدد، باقی مانده‌های تقسیمشان بر n با هم برابر است. حال اگر آن دو عدد را a و b فرض کنیم، a و b بر n هم باقی‌مانده بوده و بنابر هم‌نهشتی باید $a \overset{n}{\equiv} b$ و حکم به‌دست می‌آید.

حل کار در کلاس صفحه ۸۱

۱ با توجه به شکل، مثلث اصلی یعنی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ را به ۹ مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۱ تقسیم کرده و آنها را به‌عنوان ۹ لانه در نظر می‌گیریم. اکنون اگر ۱۰ نقطه را به‌عنوان ۱۰ کبوتر تصور کنیم، در این صورت طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر در یک لانه قرار می‌گیرند، یعنی حداقل دو نقطه در داخل یکی از این مثلث‌ها قرار گرفته و لذا فاصله این دو نقطه از یکدیگر کمتر از ۱ خواهد شد.



۲ مسئله : ۵ نقطه داخل مربعی به ضلع ۲ مفروض‌اند، ثابت کنید حداقل فاصله دو نقطه از آنها کمتر از $\sqrt{۲}$ است.

حل :

با توجه به شکل، وسط اضلاع موازی در مربع را به هم وصل کرده تا ۴ مربع به ضلع ۱ ایجاد شود. ۴ مربع کوچک را به‌عنوان ۴ لانه در نظر می‌گیریم. اکنون اگر ۵ نقطه را به‌عنوان ۵ کبوتر تصور کنیم، در این صورت طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر در یک لانه قرار می‌گیرند، یعنی حداقل دو نقطه مانند A و B وجود خواهند داشت که در داخل یکی از مربع‌ها قرار گیرند. ثابت می‌کنیم که $AB < \sqrt{۲}$.

$BH <$ ضلع مربع کوچک ، $AH <$ ضلع مربع کوچک

$$\Rightarrow \begin{cases} AH < ۱ \\ BH < ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AH^{۲} < ۱ \\ BH^{۲} < ۱ \end{cases} \Rightarrow AH^{۲} + BH^{۲} < ۱+۱ \xrightarrow{AH^{۲}+BH^{۲}=AB^{۲}} AB^{۲} < ۲ \Rightarrow AB < \sqrt{۲}$$

۳ چهار فصل سال را به‌عنوان ۴ لانه و افراد یک خانواده ۵ نفری را به‌عنوان ۵ کبوتر در نظر می‌گیریم. با توجه به اصل لانه کبوتری، دست کم دو کبوتر وجود دارند که در یک لانه قرار می‌گیرند، یعنی دست کم دو نفر از این ۵ نفر وجود دارند که فصل تولدشان یکی است.

۴ حالت (۱)، حالتی که رأس ایزوله یا تنها نداشته باشیم، که در این صورت درجات رئوس از ۱ تا $p-۱$ تغییر می‌کند. اگر رئوس هر گراف را به‌عنوان کبوترها و درجات رئوس از ۱ تا $p-۱$ را به‌عنوان لانه‌ها در نظر بگیریم، بنابراین تعداد p کبوتر و $p-۱$ لانه داریم که با توجه به اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر وجود دارند که در یک لانه قرار بگیرند، یعنی حداقل دو رأس هم درجه وجود دارد.

حالت (۲)، حالتی که یک رأس تنها داشته باشیم، که در این صورت درجات بقیه رئوس از ۱ تا $p-۲$ تغییر می‌کند. چون درجه رأس تنها صفر است و با کنار گذاشتن آن، تعداد $p-۱$ رأس داریم. اگر رئوس گراف را به‌عنوان کبوترها و درجات رئوس از ۱ تا $p-۲$ را به‌عنوان لانه‌ها در نظر بگیریم، بنابراین تعداد $p-۱$ کبوتر و $p-۲$ لانه داریم که با توجه به اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر وجود دارند که در یک لانه قرار بگیرند، یعنی حداقل دو رأس هم درجه وجود دارد.

نیازی نیست حالتی را برای دو رأس یا بیشتر تنها در نظر بگیریم، چون رأس‌های تنها درجه صفر دارند و کنار گذاشته می‌شوند، بنابراین از تعداد رئوس و تعداد درجات رئوس به یک اندازه کم می‌شود و تعداد رئوس همواره از تعداد درجات بیشتر می‌باشد.

فعالیت صفحه ۸۲، تعمیم اصل لانه کبوتری را به بیانی ساده مطرح می‌کند. مسئله‌هایی برای نشان دادن کاربرد این تعمیم مطرح شده است.

حل کار در کلاس صفحه ۸۳

۱ تعداد لانه‌ها برابر است با تعداد ماه‌های سال ضربدر تعداد روزهای هفته، یعنی : n=۱۲×۷=۸۴، از طرفی : k+۱=۱۰ → k=۹، پس تعداد دانش‌آموزان حداقل می‌بایست kn+۱=۸۴×۹+۱=۷۵۷ باشد.

۲

$$k+۱=۵ \rightarrow k=۴$$

$$kn+۱=۵۴ \rightarrow ۴n=۵۳ \rightarrow n=\left[\frac{۵۳}{۴}\right]=۱۳$$

۳ با توجه به اینکه در زبان فارسی ۳۲ حرف وجود دارد، پس طبق اصل ضرب برای تعیین حرف اول و دوم فامیلی غیر تکراری هر فرد حاضر در همایش ۹۹۲=۳۱×۳۲ حالت وجود دارد. حال اگر این حالت‌ها را به‌عنوان لانه‌ها در نظر بگیریم، یعنی تعداد لانه‌ها برابر است با : n=۹۹۲، از طرفی : k+۱=۳→ k=۲، پس تعداد افراد حاضر در سالن همایش حداقل می‌بایست kn+۱=۲×۹۹۲+۱=۱۹۸۵ باشد.

حل مثال صفحه ۸۳

گرافی تعریف می‌کنیم که رأس‌های آن دانش‌آموزان و رابطه دوستی بین هر دو دانش‌آموز، یالی بین رأس‌های متناظرشان باشد، پس درجه هر رأس، تعیین کننده تعداد دوستان دانش‌آموز متناظر با آن رأس خواهد بود. از طرفی می‌دانیم که در هر گراف ساده، حداقل ۲ رأس هم درجه وجود دارد، یعنی حداقل دو دانش‌آموز یافت می‌شوند که تعداد دوستان آنها در آن کلاس با هم برابر است.

توصیه آموزشی

❑ بهتر است برای حل فعالیت‌ها و کار در کلاس‌های کتاب، به روش پرسش و پاسخ با دانش‌آموزان گفت‌وگو شود تا به این طریق آنان تفکرات ریاضی خود را توصیف و سازماندهی کنند و استحکام بخشند و یادگیری مفهومی صورت گیرد.

❑ قبل از ورود به مبحث جدید، پیش‌نیازهای آن مبحث در کلاس برای دانش‌آموزان یادآوری گردد تا ارتباط مفهومی میان مفاهیم ریاضی را به خوبی درک کنند.

❑ در این کتاب، تعمیم اصل شمول و عدم‌شمول برای حداکثر سه مجموعه بیان شده است، این مورد در طرح سؤالات امتحانات و ارزشیابی‌ها رعایت گردد.

❑ سطح سؤالات ارزشیابی، در حد مسائل مطرح شده در کتاب درسی باشد.

اشتباهات رایج دانش آموزان

❑ عدم تشخیص تابع پوشا. به‌عنوان مثال، با توجه به تابع $f: \{a,b,c,d\} \rightarrow \{a,b,c\}$، نمی‌تواند تشخیص دهد $f_1=\{(a,a),(b,c),(c,a),(d,c)\}$ پوشا هست یا نیست.

❑ به این نکته توجه ندارد که در تابع $f: A \rightarrow B$، اگر تعداد اعضای مجموعه A کمتر از تعداد اعضای مجموعه B باشد، امکان ندارد f پوشا باشد.

❑ قبل از پیدا کردن تعداد توابع یک به یک از مجموعه A به مجموعه B، به شرط $|A|\leq|B|$ دقت نمی‌کند.

❑ معمولاً نمی‌داند که چه زمانی باید از اصل لانه کبوتری استفاده کند و اینکه در مسئله مطرح شده، کبوترها کدام هستند و لانه‌ها کدام، دچار اشتباه می‌شود.

❑ به واژگان کلیدی «حداقل» و «حداکثر» در مسئله توجه ندارد.

حل تمرینات درس دوم صفحه ۸۴ کتاب

۱

$$A=\{1\leq n\leq 90 \,|\, 2|n\} \Rightarrow |A|=\left[\frac{90}{2}\right]=45$$

$$B=\{1\leq n\leq 90 \,|\, 3|n\} \Rightarrow |A|=\left[\frac{90}{3}\right]=30$$

$$|A\cap B|=\left[\frac{90}{[2,3]}\right]=\left[\frac{90}{6}\right]=15$$

$$\Rightarrow |A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=45+30-15=60$$

۲

$$A=\{1\leq n\leq 200 \,|\, 4|n\} \Rightarrow |A|=\left[\frac{200}{4}\right]=50$$

$$B=\{1\leq n\leq 200 \,|\, 7|n\} \Rightarrow \overline{B}=\{1\leq n\leq 200 \,|\, 7\nmid n\}$$

می دانیم : $A\cap\overline{B}=A-(A\cap B)$

$$|A\cap B|=\left[\frac{200}{[4,7]}\right]=\left[\frac{200}{28}\right]=7$$

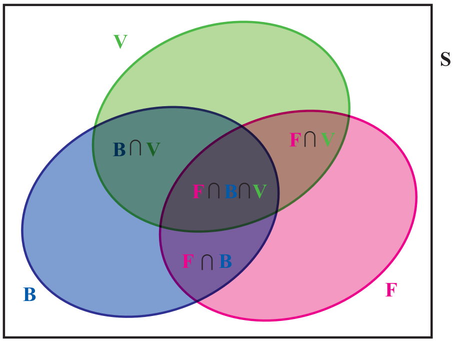
$$\Rightarrow |A\cap\overline{B}|=|A|-|A\cap B|=50-7=43$$

۳ الف) چند نفر هر سه رشتهٔ ورزشی را بازی می‌کنند؟

ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

پ) چند نفر والیبال بازی می‌کنند ولی بسکتبال بازی نمی‌کنند؟

ت) چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟



$$|F|=۱۵ \;,\; |V|=۱۱ \;,\; |B|=۹ \;,\; |\overline{F}\cap\overline{B}\cap\overline{V}|=۱۰$$
$$|S|=۳۴ \;,\; |F\cap V|=۵ \;,\; |B\cap V|=۶ \;,\; |F\cap B|=۳$$

الف)

$$|F\cup B\cup V|=|S|-|\overline{F}\cap\overline{B}\cap\overline{V}|=۳۴-۱۰=۲۴$$
$$\Rightarrow |F\cup B\cup V|=|F|+|B|+|V|-|F\cap V|-|B\cap V|-|F\cap B|+|F\cap B\cap V|$$
$$\Rightarrow ۲۴=۱۵+۱۱+۹-۵-۶-۳+|F\cap B\cap V| \Rightarrow |F\cap B\cap V|=۳$$

ب)

فقط فوتبال بازی کنند : $|F|-|F\cap V|-|F\cap B|+|F\cap B\cap V|=۱۵-۵-۳+۳=۱۰$

پ)

$$|V\cap\overline{B}|=|V|-|V\cap B|=۱۱-۶=۵$$

ت)

فقط فوتبال بازی کنند : $|F|-|F\cap V|-|F\cap B|+|F\cap B\cap V|=۱۵-۵-۳+۳=۱۰$

فقط والیبال بازی کنند : $|V|-|F\cap V|-|B\cap V|+|F\cap B\cap V|=۱۱-۵-۶+۳=۳$

فقط بسکتبال بازی کنند : $|B|-|F\cap B|-|B\cap V|+|F\cap B\cap V|=۹-۳-۶+۳=۳$

$$\Rightarrow ۱۰+۳+۳=۱۶$$

۱۶ نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند.

۴ می‌خواهیم یک رمز ۵ رقمی به‌صورت $\overline{abcde}$ بسازیم که در آن a، b، c، d و e ارقام ۱ تا ۹ می‌باشند.

ابتدا مجموعه‌های A، B و C را به‌صورت زیر و مخالف با آنچه مورد نظر مسئله است تعریف می‌کنیم :

$$A=\{\overline{abcde}\,|\,a,b,c,d,e\neq ۲\}\Rightarrow |A|=۸^۵$$
$$B=\{\overline{abcde}\,|\,a,b,c,d,e\neq ۳\}\Rightarrow |B|=۸^۵$$

$$C=\{\overline{abcde}\mid a,b,c,d,e\neq ۷\}\Rightarrow |C|=۸^۵$$

$$A\cap B=\{\overline{abcde}\mid a,b,c,d,e\neq ۲,۳\}\Rightarrow |A\cap B|=۷^۵$$

$$A\cap C=\{\overline{abcde}\mid a,b,c,d,e\neq ۲,۷\}\Rightarrow |A\cap C|=۷^۵$$

$$B\cap C=\{\overline{abcde}\mid a,b,c,d,e\neq ۳,۷\}\Rightarrow |B\cap C|=۷^۵$$

$$A\cap B\cap C=\{\overline{abcde}\mid a,b,c,d,e\neq ۲,۳,۷\}\Rightarrow |A\cap B\cap C|=۶^۵$$

تعداد کل ۵ رقمی‌ها : $|S|=۹\times۹\times۹\times۹\times۹=۹^۵=۵۹۰۴۹$

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

$$|A\cup B\cup C|=۸^۵+۸^۵+۸^۵-۷^۵-۷^۵-۷^۵+۶^۵=۵۵۶۵۹$$

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C|=۵۹۰۴۹-۵۵۶۵۹=۳۳۹۰$$

$\Rightarrow$ زمان لازم برحسب ثانیه : $۳۳۹۰\times۶=۲۰۳۴۰$

۵

تعداد تابع‌ها از A به B : $|B|^{|A|}=۴^۵$

در این سؤال $|A|=m=۵$، $|B|=k=۴$ و شرط $m\leq k$ برقرار نیست، بنابراین هیچ‌کدام از این تابع‌ها یک‌به‌یک نمی‌باشند.

۶ تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های یک به یک از مجموعه ۵ عضوی به مجموعه ۸ عضوی، یعنی : $(۸)_۵=\frac{۸!}{۳!}=۶۷۲۰$

۷ تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این کار، معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های پوشا از یک مجموعه ۶ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی، که با توجه به تذکر صفحه ۷۹ کتاب از رابطه $۳^m-(۳\times۲^m-۳)$ به‌دست می‌آید.

$$\left.\begin{matrix}|A|=m=۶\geq۳\\|B|=۳\end{matrix}\right\}\Rightarrow ۳^۶-(۳\times۲^۶-۳)=۷۲۹-۱۸۹=۵۴۰$$

۸ اگر روزهای سال را به‌عنوان لانه‌ها و افراد را به‌عنوان کبوترها در نظر بگیریم، در این صورت می‌خواهیم ۳۶۸ کبوتر را در ۳۶۵ لانه قرار دهیم. چون تعداد کبوترها از تعداد لانه‌ها بیشتر است، پس طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر وجود دارند که در یک لانه قرار گیرند، یعنی حداقل دو نفر وجود دارند که در یک روز متولد شده باشند.

۹ تعداد کبوترها = ۵۰۵

تعداد لانه‌ها = تعداد روزهای هفته × تعداد ماه‌های سال $\Rightarrow n = ۷×۱۲ = ۸۴$

طبق تعمیم اصل لانه کبوتری داریم :

تعداد کبوترها $= kn+۱ \xrightarrow{n=۸۴} ۵۰۵ = k\times ۸۴+۱ \Rightarrow k=۶ \Rightarrow k+۱=۷$

در این صورت لانه‌ای وجود دارد که لااقل ۷ کبوتر در آن قرار می‌گیرند، یعنی لااقل ۷ نفر از دانش‌آموزان آن دبیرستان، روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

۱۰ طبق تعمیم اصل لانه کبوتری داریم :

تعداد لانه‌ها = تعداد روزهای سال $\rightarrow n=۳۶۵$ و $k+۱=۲۰ \rightarrow k=۱۹$

$\Rightarrow$ تعداد کبوترها $= kn+۱ = ۱۹ \times ۳۶۵ + ۱ = ۶۹۳۶$

یعنی حداقل ۶۹۳۶ نفر در آن سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی می‌باشند.

۱۱ می‌دانیم باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۲، یکی از اعداد ۰ و ۱ است، اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد بر ۲ را به‌عنوان لانه‌ها در نظر بگیریم، پس ۲ لانه داریم و ۳ عدد طبیعی را به‌عنوان کبوترها در نظر می‌گیریم. طبق اصل لانه کبوتری، حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار خواهند گرفت، یعنی حداقل دو عدد از این ۳ عدد، باقی‌مانده‌های تقسیمشان بر ۲ با هم برابر است. حال اگر آن دو عدد را a و b فرض کنیم، a و b بر ۲ هم باقی‌مانده بوده، پس a و b هر دو فرد یا هر دو زوج خواهند بود، که مجموعشان عددی زوج است.

۱۲ اعداد مجموعه $A=\{۱,۲,\dots,۸۴\}$ را به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم : (افراز مجموعه A به ۴۲ زیرمجموعه)

$\{۱,۸۴\}$ و $\{۲,۸۳\}$ و $\{۳,۸۲\}$ و $\{۴,۸۱\}$ و $\{۵,۸۰\}$ و ... و $\{۴۲,۴۳\}$

دسته‌ها را به‌عنوان لانه‌ها در نظر می‌گیریم، بنابراین ۴۲ لانه داریم و می‌خواهیم ۴۳ کبوتر را از اعداد درون آنها انتخاب کنیم. در بدترین شرایط از هر کدام از لانه‌ها یک عدد برداریم، چون ۴۲ لانه داریم و از هر لانه یک عدد انتخاب کرده ایم، پس ۴۲ عدد انتخاب شد، ولی مجموع هیچ دو عددی در بین اعداد انتخابی ۸۵ نمی‌باشد. حال یک عدد مانده که آن را از یکی از لانه‌ها انتخاب کنیم، در این صورت طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو عدد در این زیر مجموعه ۴۳ عضوی وجود دارند که مجموعشان برابر ۸۵ می‌باشد.

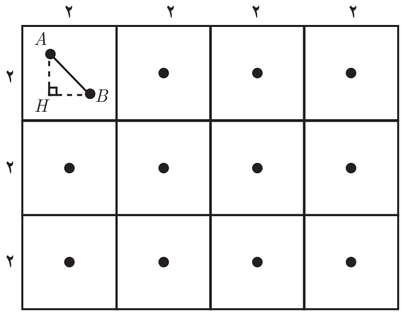
۱۳ اعداد مجموعه $A=\{۱,۵,\dots,۸۱,۸۵\}$ را به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم : (افراز مجموعه A به ۱۲ زیرمجموعه)

$\{۱\},\{۵,۸۵\},\{۹,۸۱\},\{۱۳,۷۷\},\{۱۷,۷۳\},\{۲۱,۶۹\},\{۲۵,۶۵\},\{۲۹,۶۱\},\{۳۳,۵۷\},\{۳۷,۵۳\},\{۴۱,۴۹\},\{۴۵\}$

چون مجموع عدد ۱ و همین طور عدد ۴۵ با هیچ‌کدام از اعداد داخل مجموعه A، برابر ۹۰ نمی‌شوند،

لذا هر کدام از آنها را در یک دسته مجزا قرار دادیم.

دسته‌ها را به‌عنوان لانه‌ها در نظر می‌گیریم، بنابراین ۱۲ لانه داریم و می‌خواهیم ۱۳ کبوتر از درون آنها انتخاب کنیم. در بدترین شرایط از هر لانه یک عدد برداریم، پس ۱۲ عدد انتخاب شد و یک انتخاب دیگر مانده که آن را از یکی از لانه‌های موجود غیر از لانه‌های یک عضوی، چون قبلاً عدد درون آن را برداشته‌ایم، انتخاب می‌کنیم. پس طبق اصل لانه کبوتری، حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد.



۱۴ با توجه به شکل، مستطیل را به ۱۲ مربع به ضلع ۲ تقسیم کرده و آنها را به‌عنوان ۱۲ لانه در نظر می‌گیریم. اکنون اگر ۱۳ نقطه را به‌عنوان ۱۳ کبوتر تصور کنیم، در این صورت طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر در یک لانه قرار می‌گیرند، یعنی حداقل دو نقطه مانند A و B وجود دارند که در داخل یک مربع قرار می‌گیرند. ثابت می‌کنیم که $AB<\sqrt{۸}$

ضلع مربع $>AH$ و ضلع مربع $>BH$

$$\Rightarrow\begin{cases}AH<۲\\BH<۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AH^{۲}<۴\\BH^{۲}<۴\end{cases}\Rightarrow AH^{۲}+BH^{۲}<۴+۴\Rightarrow\xrightarrow{AH^{۲}+BH^{۲}=AB^{۲}}AB^{۲}<۸\Rightarrow AB<\sqrt{۸}$$

۱۵ هر نقطه به‌صورت زوج مرتب (a,b) دارای دو مؤلفه اول و دوم است که با توجه به زوج یا فرد بودن هر کدام از مؤلفه‌ها، در یکی از دسته‌های زیر قرار می‌گیرد:

	a	b
دسته ۱	زوج	زوج
دسته ۲	زوج	فرد
دسته ۳	فرد	زوج
دسته ۴	فرد	فرد

اگر هر دسته را به‌عنوان لانه و هر نقطه را به‌عنوان کبوتر در نظر بگیریم، در این صورت ۴ لانه و ۵ کبوتر داریم، که طبق اصل لانه کبوتری، لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار می‌گیرند. یعنی حداقل ۲ نقطه از این ۵ نقطه، با توجه به زوج یا فرد بودن مختصاتشان، مانند هم هستند. از طرفی چون مجموع دو عدد زوج، عددی زوج است و مجموع دو عدد فرد، نیز عددی زوج می‌باشد، پس جمع مؤلفه‌های اول آنها و همچنین جمع مؤلفه‌های دوم آنها زوج است و بر ۲ بخش‌پذیرند. بنابراین مختصات نقطه وسط این دو نقطه نیز صحیح است.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ جاهای خالی را کامل کنید.

الف) با جابه‌جایی ارقام عدد ۳۶۹۴۴۴، تعداد .... تا عدد شش رقمی می‌توان نوشت به‌طوری که رقم‌های ۴ یک در میان باشند.

ب) با ارقام ۳، ۹، ۹، ۳ و ۹، به تعداد .... تا می‌توان کد ۵ رقمی نوشت.

پ) شش نفر که دو نفر آنها برادر هستند به تصادف در یک ردیف می‌ایستند. تعداد حالاتی که دو برادر در اول و آخر صف واقع شده باشند، برابر .... است.

ت) تعداد طرقی که R مهره نامتمایز را می‌توان در N جعبه متمایز جا داد. به‌طوری‌که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد، برابر .... است. $(N \leq R)$

ث) تعداد طرقی که می‌توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر توزیع کرد به‌طوری‌که هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد، برابر $\binom{\cdots\cdots}{۲}$ است.

ج) اگر A، B و C زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع S باشند، در این صورت تعداد اعضایی از S که در هیچ یک از مجموعه‌های A، B و C قرار ندارند، به‌صورت .... نشان داده می‌شود.

چ) تعداد اعداد طبیعی از ۱ تا k که بر ۳ بخش‌پذیر باشند، برابر .... است.

ح) تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ۴ عضوی به مجموعه ۸ عضوی برابر .... است.

خ) تعداد توابع غیرپوشا از مجموعه $A=\{a,b,c\}$ به مجموعه $B=\{d,e\}$ برابر .... است.

د) هر گاه .... کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $k+۱$ کبوتر در آن قرار گرفته است.

۲ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) تعداد جایگشت‌های مختلف کلمهٔ consonant، به‌طوری که حروف یکسان کنار هم قرار گیرند، برابر !۶ است.

ب) تعداد طرقی که ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ کنار هم قرار گیرند به‌طوری که همواره رقم‌های فرد کنار هم باشند، برابر !۲×!۳ است.

پ) مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰ را می‌توان به تعداد $\frac{۱۰!}{۲!\times ۳!\times ۴!}$ طریق به مجموعه‌های ۲، ۳ و ۴ عضوی افراز نمود.

ت) تعداد توابع غیر یک به یک از مجموعه $A=\{a,b,c\}$ روی خودش، برابر ۲۱ تا است.

ث) به تعداد $۵^۴$ تابع مانند $f: A \to B$ می‌توان تعریف کرد، اگر بدانیم $|A|=۵$ و $|B|=۴$ است.

ج) تعداد طرقی که می‌توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد به‌طوری‌که هر نفر حداکثر یک کتاب داشته باشد، برابر $\binom{۸}{۵}$ است.

چ) مجموعه اعدادی که بر a و بر b بخش‌پذیر باشد با مجموعه اعدادی که بر «ب م م» آن دو عدد بخش‌پذیرند، برابر می‌باشد.

ح) اصل لانه کبوتری قضیه‌ای است که با برهان خلف ثابت می‌شود.

خ) اگر ۴ نقطه داخل مربعی به ضلع ۲ در نظر بگیریم، به‌طور یقین حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله‌شان کمتر از ۱ است.

د) از ۶۶ نفر در یک مهمانی، به‌طور یقین حداقل ۳ نفر یافت می‌شوند که نام‌خانوادگی آنها با یک حرف فارسی شروع شود.

۳ گزینه صحیح را انتخاب کنید.

الف) به چند طریق می‌توان ۸ سیب را بین چهار نفر تقسیم کرد که اولاً همه سیب‌ها تقسیم شوند. ثانیاً بریدن سیب مجاز نباشد، ثالثاً به هر نفر حداقل یک سیب برسد؟

۱) $\binom{۸}{۳}$ ۲) $\binom{۷}{۴}$ ۳) $\binom{۸}{۴}$ ۴) $\binom{۷}{۲}$

ب) ۱۸ تخته سیاه نامتمایز را به چند طریق می‌توان بین ۸ مدرسه تقسیم کرد؟

۱) $۸^{۱۸}$ ۲) $۱۸^{۸}$ ۳) $\binom{۱۸+۸-۱}{۸}$ ۴) $\binom{۱۸+۸-۱}{۱۸}$

پ) ۱۰ سکه بهار آزادی را به چند طریق می‌توان میان ۳ نفر تقسیم تصادفی نمود؟

۱) ۶۶ ۲) ۱۲۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۱۰۰۰

ت) به چند طریق مختلف می‌توان تعداد ۵ کلید مشابه میله‌ای و ۱۰ کلید مشابه دکمه‌ای را در یک پانل کنترل کنار هم چید به‌طوری که کلید چهارم از نوع میله‌ای باشد؟

۱) ۱۰۰۱ ۲) ۲۰۰۲ ۳) ۳۰۰۳ ۴) ۴۰۰۴

ث) به چند طریق می‌توان ۲۰ مهره نامتمایز را در ۱۵ ظرف متمایز قرار داد به‌طوری‌که ظرف شماره ۷ درست ۴ مهره داشته باشد؟

۱) $\binom{۲۹}{۱۴}$ ۲) $\binom{۳۰}{۱۴}$ ۳) $\binom{۲۹}{۱۳}$ ۴) $\binom{۳۰}{۱۳}$

ج) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۱۰$ که $x_i \in N \cup \{۰\}$ ، کدام است؟

۱) $\binom{۱۰}{۴}$ ۲) $\binom{۱۳}{۴}$ ۳) $\binom{۱۳}{۱۰}$ ۴) $\binom{۱۴}{۴}$

چ) ۵ درخت کاج متمایز و ۷ درخت صنوبر متمایز و ۳ درخت سرو متمایز را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کاشت؟

۱) $\frac{۱۵!}{۵! \times ۷! \times ۳!}$ ۲) $\frac{۱۵!}{۳!}$ ۳) $۱۵!$ ۴) $\binom{۱۵}{۳}$

ح) ۳ کتاب متمایز ریاضی و ۴ کتاب متمایز ادبی را به چند طریق می‌توان کنار هم در یک قفسه قرار داد به‌طوری که کتاب‌های ریاضی همواره کنار هم باشند؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۵۴۰ ۴) ۷۲۰

خ) کمترین مقدار m در مجموعه $\{۲۰$ و ۲۱ و ۲۲ و . . . و $m\}$ چقدر باشد تا حداقل ۶ عضو از مجموعه در تقسیم بر عدد ۶ باقی‌مانده‌های یکسانی داشته باشند؟

۱) ۵۰ ۲) ۵۳ ۳) ۳۱ ۴) ۵۱

د) حداقل تعداد نقاط درون دایره‌ای به شعاع واحد، به‌طوری‌که حداقل سه نقطه وجود داشته باشد که مساحت مثلث حاصل از این سه نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ باشد، کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

ذ) در یک مهمانی حداقل چند نفر حضور داشته باشند تا دست کم چهار نفر از آنها در یک روز هفته و یک فصل از سال متولد شده باشند؟

۱) ۸۴ نفر ۲) ۱۱۲ نفر ۳) ۸۵ نفر ۴) ۱۱۳ نفر

ر) تعدادی کتاب از چهار موضوع مختلف، متعلق به دانش‌آموزی می‌باشد، حداقل چند کتاب باید وجود داشته باشد تا دانش‌آموز لااقل ۳ کتاب از یک موضوع داشته باشد؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۵ ۴) ۱۳

ز) حداقل چند دو تایی مرتب از اعداد صحیح انتخاب کنیم، تا به‌طور یقین لااقل در دو جفت انتخاب شده (a,b) و (c,d)، حاصل هر عدد $a+c$ و $b+d$ زوج باشند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

ژ) در چند گراف ساده با رئوس e,d,c,b,a ، هیچ یک از رأس‌های c,b,a تنها نیستند؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۹۲ ۳) ۴۳۲ ۴) ۸۵۴

س) n عدد طبیعی متمایز موجود است. حداقل مقدار n چقدر باشد تا اطمینان یابیم که حداقل ۳ عدد مابین آنها موجود است که دارای رقم یکان یکسانی بوده و در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده‌های یکسان دارند؟

۱) ۶۰ ۲) ۹۰ ۳) ۶۱ ۴) ۹۱

ش) اگر $B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $|A\cap B|=۲$ و مجموعه $(B-A)\times(A-B)$ دارای ۲۱ عضو باشد، تعداد عضوهای مجموعه A کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

ص) تعداد اعداد دو رقمی که مضرب ۷ هستند اما بر ۱۱ بخش‌پذیر نیستند، کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

ض) در مجموعه $\{۱,۲,\ldots,۶۰۰\}$ چند عدد وجود دارد که مضرب ۵ باشند، ولی بر هیچ یک از اعداد ۳ و ۷ بخش‌پذیر نباشند؟

۱) ۳۴ ۲) ۶۸ ۳) ۱۵۰ ۴) ۱۵۴

ط) چند تابع پوشای f می‌توان نوشت به‌طوری‌که : $f:\{۱,۲,۳\}\rightarrow\{۴,۵\}$

۱) ۷ ۲) ۱۱ ۳) ۶ ۴) ۵

ظ) به چند طریق می‌توان بین سه روستای A, B و C جاده کشید، به‌طوری‌که هیچ روستایی تنها نماند؟

۱) ۱ ۲) ۱۴ ۳) ۳ ۴) ۴

۴ تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $x_۱+x_۲+x_۳=۶$ ب) $x_۱+x_۲+۱۰x_۳=۲۳$

۵ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $x_۱+x_۲+x_۳=۱۲$ ب) $x+y+(z+۲)^۲=۱۲$

۶ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_۱+x_۲+x_۳=۱۵$ را با شرط $x_۱>۱$ و $x_۲>۲$ و $x_۳>۳$ تعیین کنید.

۷ تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x+y+z+t=۴۸$ که $x>۵$، $z>۷$، $y>۶$ و $t>۸$ را به‌دست آورید.

۸ معادله $x_۱+x_۲+x_۳=۱۵$ با شرط $x_i\geq ۲i-۱$ و $i=۱,۲,۳$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۹ به چند طریق یک کلاس ۳۰ نفری می‌توانند به سه کاندیدای مشخص از کلاسشان رأی دهند؟ (هر دانش‌آموزی فقط یک رأی می‌دهد.)

۱۰ سه نوع گل و به تعداد فراوان از هر نوع داریم، ۸ شاخه گل از بین آنها انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که از هر نوع حداقل ۲ شاخه برداشته باشیم، تعداد راه‌های انتخاب چند تا است؟

۱۱ می‌خواهیم ۷ مداد را میان ۳ نفر توزیع کنیم به‌طوری‌که ممکن است به بعضی‌ها مداد نرسد، تعداد حالات چند تا است؟

۱۲ ۸ نفر می‌خواهند با ۳ ماشین سواری مسافرت بروند، به چند صورت می‌توانند مسافرت کنند؟

۱۳ می‌خواهیم ۱۰ شاخه گل را بین ۳ نفر تقسیم کنیم به‌طوری‌که به هر کس حداقل یک شاخه گل برسد. به چند طریق می‌توان این کار انجام داد؟

۱۴ هفت کبوتر به چند طریق می‌توانند در سه لانه متمایز قرار گیرند به‌طوری‌که هیچ لانه‌ای خالی نماند؟

۱۵ ۴ کتاب ریاضی متمایز و ۳ کتاب فیزیک متمایز را به چند طریق می‌توان یک در میان در یک قفسه چید؟

۱۶ شماره پلاک ماشینی ۵۵۵ م ۱۱ است. چند پلاک ماشین با همین ۵ رقم و حرف «م» می‌توان ساخت؟

۱۷ ۹ نفر برای صعود یک کوه به چند طریق می‌توانند به گروه‌های ۲، ۳ و ۴ نفره تفکیک شوند؟

۱۸ با حروف کلمه Mississippi، چند کلمه ۱۱ حرفی می‌توان نوشت به‌طوری‌که:

الف) قیدی درباره مکان حروف نباشد.

ب) همه sها کنار هم باشند.

۱۹ در یک نظرخواهی از ۱۰۰ نفر دانش‌آموز نتایج زیر به‌دست آمده است:

۶۰ نفر آنها مجله A را می‌خوانند، ۵۰ نفر مجله B، ۵۰ نفر مجله C، ۳۰ نفر مجله‌های A و B و ۲۰ نفر مجله‌های B و C، ۴۰ نفر مجله‌های A و C و بالاخره ۱۰ نفر هر سه مجله A، B و C را می‌خوانند. مطلوب است تعداد دانش‌آموزانی که:

الف) هیچ مجله‌ای نمی‌خوانند.

ب) دقیقاً ۲ مجله می‌خوانند.

پ) حداقل ۲ مجله می‌خوانند.

۲۰ با ارقام ۱، ۲ و ۳ چند عدد شش رقمی ساخته می‌شود که در هر یک از آنها، هر یک از ارقام مذکور حداقل یک بار ظاهر شوند؟

۲۱ چه تعداد شماره شناسنامه پنج رقمی می‌توان ساخت که در آنها هر یک از رقم‌های ۱، ۳ و ۷ حداقل یک بار ظاهر شوند؟

۲۲ اگر $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{e,f\}$ باشد، مطلوب است :

الف) تعداد توابع از B به A

ب) تعداد توابع یک به یک از B به A

پ) تعداد توابع پوشا از B به A

۲۳ چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰۰ وجود دارد که نسبت به ۶۵ اول باشد؟

۲۴ در بین اعداد طبیعی، چند عدد سه رقمی داریم که نه بر ۳ و نه بر ۷ بخش‌پذیر باشند؟

۲۵ ۶ مسافر به چند طریق می‌توانند در ۳ ایستگاه پیاده شوند به‌طوری‌که لااقل در یکی از ایستگاه‌ها کسی پیاده نشود؟

۲۶ ده نقطه داخل مربعی به ضلع واحد مفروض‌اند. ثابت کنید حداقل فاصله دو نقطه از این ده نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ می‌باشد.

۲۷ پنج نقطه داخل دایره‌ای به شعاع ۳ مفروض‌اند. نشان دهید حداقل فاصله دو نقطه از این پنج نقطه از $۳\sqrt{۲}$ کمتر است.

۲۸ ۱۴ عدد از مجموعه $\{۱,۲,۳,...,۲۰\}$ را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید تفاضل حداقل دو تا از عددها برابر ۷ است.

۲۹ از مجموعه $\{۱,۲,۳,۵,۹,۱۳,۱۷\}$ یک زیرمجموعه انتخاب می‌کنیم. حداقل تعداد عضوهای زیرمجموعه چند عضو باشد تا همواره مطمئن شویم دو عضو آن در رابطه $y=۴x+۱$ صدق می‌کند؟

۳۰ برای آنکه در یک شهرک حداقل چهل نفر در یکی از ماه‌های سال متولد شده باشند، باید در این شهرک حداقل چند نفر زندگی کنند؟

۳۱ یک مجموعه ۳۶ عضوی از اعداد طبیعی داریم. اگر همه این اعداد را بر عدد ۳۵ تقسیم کنیم، نشان دهید حداقل ۲ عدد از بین آنها یافت می‌شود که در تقسیم بر ۳۵ باقی‌مانده یکسان داشته باشند.

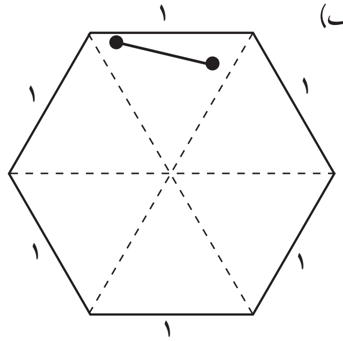
۳۲ نشان دهید هر زیر مجموعه از مجموعه $\{۱,۲,۳,...,۹\}$ که دارای ۶ عضو می‌باشد، حداقل دو عضو دارد که مجموع آنها برابر ۱۰ است.

۳۳ برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش‌آموز پایه یازدهم و ۵ دانش‌آموز پایه دوازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن برابر باشد با :

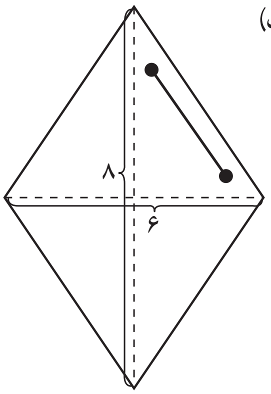
الف) $۵\times ۸!$ ب) $۴!\times ۶!$ پ) $۲!\times ۵!\times ۴!$

۳۴ برای هر کدام از شکل‌های زیر مسئله‌ای طرح کنید و با استفاده از اصل لانه کبوتری به آن پاسخ دهید.

الف)



ب)



معلّمان محترم و صاحب‌نظران گرامی می‌توانند نظر اصلاحی خود را دربارهٔ مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران- صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۴۸۷۴- گروه درسی مربوط و یا پیام‌نگار (Email) talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری