

آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

هدف کلی درس

بررسی آهنگ تغییر و رابطه آن با مشتق

اهداف درس

- ۱ تعبیر هندسی و فیزیکی آهنگ تغییر
- ۲ محاسبه آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر و تفاوت آنها
- ۳ کاربردهای آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر
- ۴ سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای
- ۵ اتصال بین آهنگ لحظه‌ای تغییر و مشتق

پیش نیازها

- ۱ آشنایی با خارج قسمت تفاضلی
- ۲ آشنایی با مشتق
- ۳ آشنایی با مفاهیم اولیه سرعت

روش تدریس

در این درس آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای و کاربردهای آن معرفی شده است. مثال‌های متنوعی برای دانش‌آموزان ارائه شده است. توجه شود که آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابرند.

با توجه به آنکه دانش‌آموزان در درس فیزیک ۳ پایه دوازدهم با مفهوم سرعت لحظه‌ای به طور شهودی آشنا می‌شوند، فرصتی مناسب فراهم می‌شود تا به مفهوم سرعت لحظه‌ای از منظر ریاضی با دقت بیشتری پرداخته شود. بهتر است ارتباط با درس فیزیک به دانش‌آموزان یادآوری شود.

کار در کلاس ص ۱۰۴

۱ نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظه t نمایش می‌دهد. مقادیر زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید (محاسبه عددی لازم نیست)

A سرعت متوسط بین $t=1$ و $t=3$

B سرعت متوسط بین $t=5$ و $t=6$

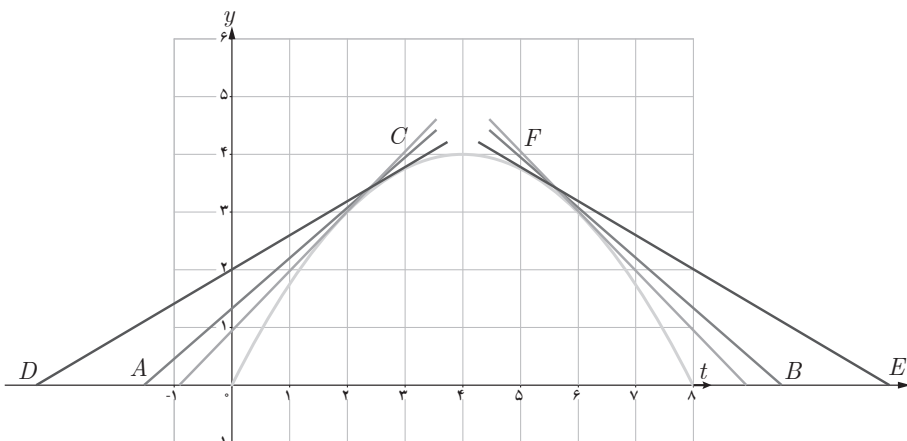
C سرعت لحظه‌ای در $t=1$

D سرعت لحظه‌ای در $t=3$

E سرعت لحظه‌ای در $t=5$

F سرعت لحظه‌ای در $t=6$

حل: $F < B < E < D < A < C$



کار در کلاس ص ۱۰۵

الف) آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟
 ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، باهم مقایسه کنید. کدام یک بیشتر است؟

ب) اگر قد علی در ۱۶ ماهگی، ۸۰ سانتی‌متر و در ۳۶ ماهگی، ۹۵ سانتی‌متر باشد، آهنگ متوسط تغییر رشد او را در این فاصله حساب کنید و با نمودار صفحه قبل مقایسه کنید.

حل :

$$\frac{f(25) - f(0)}{25} = \frac{7\sqrt{25} + 50 - 50}{25} = \frac{35}{25} = \frac{7}{5} = 1.4 \text{ cm / M} \quad \text{الف)}$$

$$f'(x) = \frac{7}{2\sqrt{x}}; f'(25) = \frac{7}{10} = 0.7, f'(49) = \frac{7}{14} = 0.5 \rightarrow f'(49) < f'(25) \quad \text{ب)}$$

$$\frac{f(36) - f(16)}{36 - 16} = \frac{95 - 80}{20} = \frac{15}{20} = 0.75 \text{ cm / M} \quad \text{ب)}$$

کار در کلاس ص ۱۰۸

با توجه به مثال قبل :

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به دست آورید.

ب) سرعت متوسط جسم را در بازه زمانی $[5, 8]$ به دست آورید.

ب) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم 35 m/s و -35 m/s است.

حل :

$$h'(t) = -10t + 40 \quad \text{الف)}$$

$$h'(0) = 40 \text{ m/s}, h'(8) = -40 \text{ m/s}$$

$$\frac{h(8) - h(5)}{8 - 5} = \frac{((-5)(8) + 40(8)) - ((-5)(5) + 40(5))}{3} = \frac{-75}{3} = -25 \text{ m/s} \quad \text{ب)}$$

$$h'(t) = -10t + 40 = 35 \rightarrow t = 0.5 \text{ s} \quad \text{ب)}$$

$$h'(t) = -10t + 40 = -35 \rightarrow t = 7.5 \text{ s}$$

۱ جدول زیر درجه حرارت T (سانتی گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را :

(الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به دست آورید.

(ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به دست آورید.

(پ) پاسخ ها را تفسیر کنید.

حل :

$$\frac{T(12) - T(8)}{12 - 8} = \frac{19 - 11}{4} = 2^\circ C/h \quad \text{(الف)}$$

$$\frac{T(18) - T(12)}{18 - 12} = \frac{9 - 19}{6} = -1.67^\circ C/h \quad \text{(ب)}$$

(پ) از صبح ساعت ۸ تا ۱۲ درجه حرارت با سرعت متوسط ۲ سانتی گراد بر ساعت در حال افزایش

است و از ساعت ۱۲ تا ۱۸ درجه حرارت با سرعت متوسط -1.67 سانتی گراد بر ساعت در حال کاهش می باشد.

۲ کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله

یک ویروس آلوده شده اند برحسب زمان (هفته) در نمودار رویه رو نشان داده شده است.

(الف) شیب های خطوط t و d چه چیزهایی را

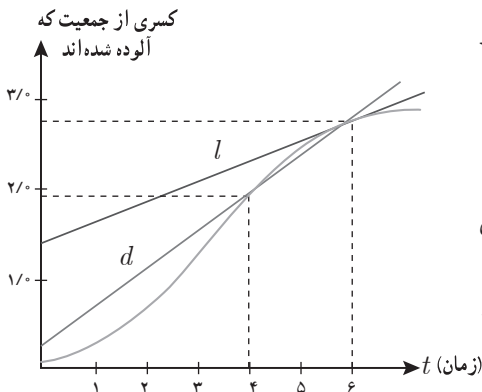
نشان می دهند؟

(ب) گسترش آلودگی در کدام یک از زمان های

$t=1$ ، $t=2$ یا $t=3$ بیشتر است؟

(پ) قسمت ب را برای $t=4$ ، $t=5$ یا $t=6$

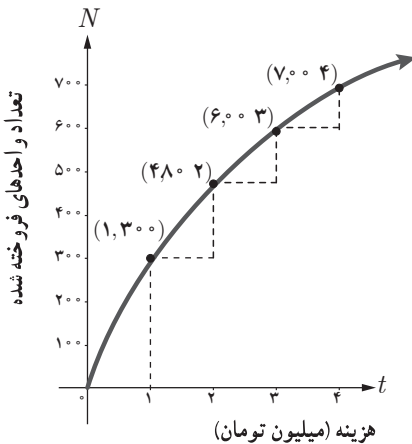
بررسی کنید.



حل : شیب خط l سرعت آلوده شدن کسری از جمعیت شهر در پایان هفته ششم (سرعت لحظه‌ای در $t=6$) و شیب خط d سرعت متوسط آلوده شدن کسری از جمعیت شهر در بین هفته‌های چهارم تا ششم (آهنگ تغییر متوسط در بین لحظات ۴ تا ۶ هفته) را نشان می‌دهد.

(ب) با توجه به شیب خط گسترش آلودگی در زمان‌های $t=1$ تا $t=3$ در حال افزایش است.

(پ) با توجه به شیب خط گسترش آلودگی در زمان‌های $t=4$ تا $t=6$ در حال کاهش می‌باشد.



۳ نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

(الف) آهنگ تغییر N بر حسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به دست آورید.

(ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

$$\text{حل : الف)} \quad \frac{N(1) - N(0)}{1 - 0} = \frac{300 - 0}{1} = 300$$

$$\frac{N(2) - N(1)}{2 - 1} = \frac{480 - 300}{1} = 180$$

$$\frac{N(4) - N(3)}{4 - 3} = \frac{700 - 600}{1} = 100 \quad N(2) - N(1) = 480 - 300 = 180$$

(ب) با توجه به شیب خطوط قاطع که در حال کم شدن است بنابراین آهنگ تغییر در حال کاهش می‌باشد.

هزینه‌های تبلیغات تا یک اندازه مشخص در فروش کالا اثرگذار است. افزایش بیش از حد هزینه تأثیر بسزایی در میزان فروش ندارد.

۴ معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 1$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ (t بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ باهم برابرند؟

$$\text{حل :} \quad f'(t) = 2t - 1 \rightarrow 2t - 1 = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0}$$

$$\rightarrow 2t - 1 = \frac{30 - 10}{5} = 4 \rightarrow t = 2.5 \text{ s}$$

۵ تویی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان‌دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول زیر نمایش داده شده است.

t \ ثانیه s	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$ \ متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

براساس جدول کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه، است نشان دهد؟

الف) $۱/۲۳ \text{ m/s}$

ب) $۱۴/۹۱ \text{ m/s}$

پ) $۱۱/۵ \text{ m/s}$

ت) $۱۶/۰۳ \text{ m/s}$

حل: گزینه پ صحیح است. چند پاسخ و استدلال دانش‌آموزان در زیر ارائه شده است.
روش اول: گزینه پ درست است زیرا سرعت تقریبی برابر است با جابجایی به روی زمان

$$v \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۱۷/۴ - ۱۶/۳}{۰/۱} = \frac{۱/۱}{۰/۱} = ۱۱$$

روش دوم: گزینه پ صحیح است زیرا سرعت باید بین سرعت متوسط در بازه $[۰/۳, ۰/۴]$ و $[۰/۴, ۰/۵]$ باشد.

$$\frac{۱/۱}{۰/۱} < v < \frac{۱/۲}{۰/۱} \Rightarrow ۱۱ < v < ۱۲$$

t \ ثانیه s	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$ \ متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

روش سوم : گزینه پ درست است زیرا با محاسبه سرعت‌های متوسط به جواب مسئله می‌رسیم.

$$۱۳، ۱۲/۵، ۱۲، \boxed{۱۱/۵}، ۱۱، ۱۰/۵$$

t	ثانیه s	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$	متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

روش چهارم : گزینه پ صحیح است زیرا

$$v_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{۱۷/۴ - ۱۵/۱}{۰/۵ - ۰/۴} = ۱۱/۵$$

$$v_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{۱۸/۴ - ۱۳/۸}{۰/۶ - ۰/۲} = ۱۱/۵$$

t	ثانیه s	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$	متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

۶ با توجه به مقادیر تابع f در جدول زیر، f' را برای نقاط داده شده تخمین بزنید. به‌طور مثال $f'(۰) = -۶$. بقیه جدول را کامل کنید.

x	۰	۵	۱۰	۱۵	۳۰
$f(x)$	۱۰۰	۷۰	۵۵	۴۶	۴۰
مقدار تقریبی $f'(x)$	-۶	-۳	-۱/۸	-۰/۴	-۰/۴

تذکر : برای تقریب مشتق در یک نقطه مثلاً ۵ می‌توان از آهنگ متوسط تغییر بازه $[۵، ۱۰]$ یا $[۰، ۵]$ استفاده کرد.

حل : برای محاسبه تقریب $f'(۳۰)$ داریم :

$$f'(۳۰) \approx \frac{f(۱۵) - f(۳۰)}{۱۵ - ۳۰} = \frac{۴۶ - ۴۰}{-۱۵} = -۰/۴$$

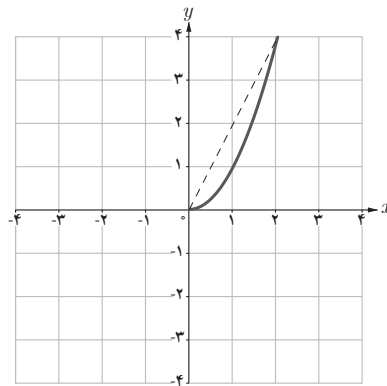
۷ کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است :

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[۰, ۱]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است.

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است.

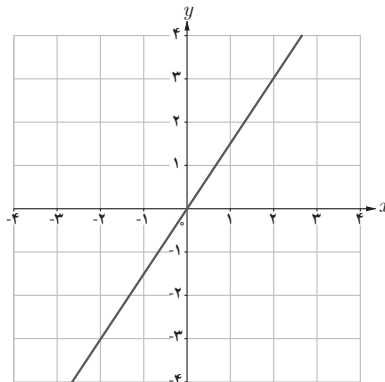
پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a) = ۰$ و هم $f(a) = ۰$

حل : الف) نادرست است مثال نقض، $f(x) = x^2$ در $x = ۰$ شیبی کمتر از آهنگ تغییر متوسط در بازه $[۰, ۱]$ دارد.



ب) نادرست است مثال نقض، $f(x) = x$ تابعی صعودی است ولی آهنگ تغییرات متوسط آن ثابت

می باشد.



پ) نادرست است مثال نقض، $f(x) = x^2$ در $x = ۰$ دارای این ویژگی است که $f'(۰) = ۰$ و $f(۰) = ۰$.

۸ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^2$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش می‌یابد؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=3$ چقدر است؟

حل :

$$\text{الف) } m(4) - m(3) = 130 - (54 + \sqrt{3}) = 76 - \sqrt{3}$$

$$\text{ب) } m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 4t : m'(3) = 54 + \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

۹ گنجایش ظرفی 40 لیتر مایع است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع

باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = 40(1 - \frac{t}{100})^2$ به دست آید :

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0, 1]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 100]$ می‌شود؟

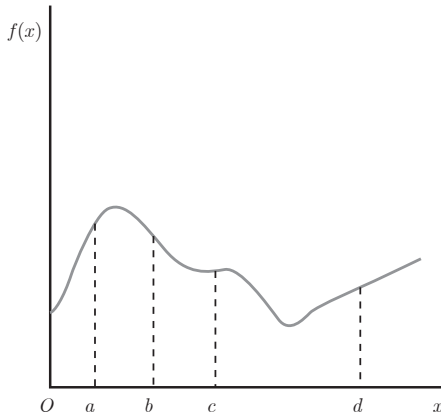
حل :

$$\text{الف) } \frac{V(1) - V(0)}{1 - 0} = \frac{39/2 - 40}{1} = -0.5 \text{ lit/s}$$

$$\text{ب) } \frac{V(100) - V(0)}{100 - 0} = V'(t) \rightarrow \frac{0 - 40}{100} = 80(-\frac{1}{100})(1 - \frac{t}{100})$$

$$\rightarrow (1 - \frac{t}{100}) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{t}{100} = \frac{1}{2} \rightarrow t = 50s$$

نمونه سؤالات ارزشیابی

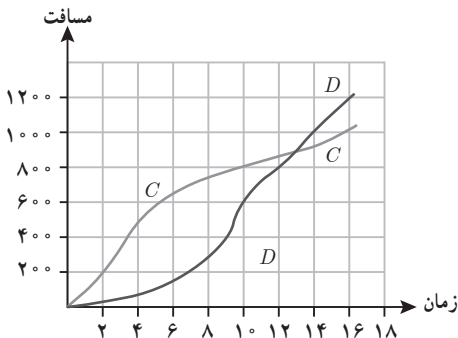
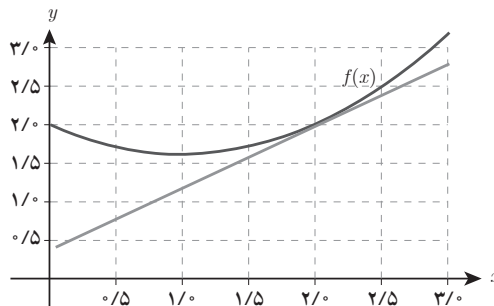


۱ فرض کنید نمودار تابع f به صورت روبه‌رو است. شیب نمودار در نقاط a و b ، c ، d را با هم مقایسه کنید.

۲

الف) $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ را به ازای $h = -0.5$ تقریب بزنید. آیا این مقدار بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از $f'(2)$ است؟ توضیح دهید.

ب) مقادیری از h را بیابید که $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 0$.



۳ دو ماشین مسابقه‌ای C و D در یک پیست مسیری به‌طور مستقیم در ۱۶ ثانیه مطابق شکل روبه‌رو طی می‌کنند.

الف) سرعت متوسط هر دو ماشین را در ۱۶ ثانیه اول بنویسید.

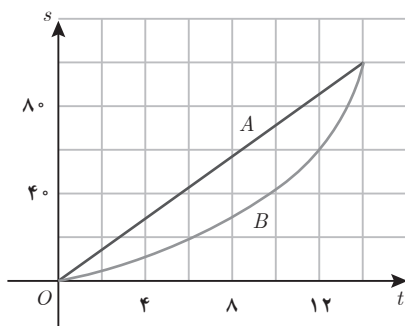
(ب) بازه‌ای با شروع $t=4$ برای ماشین D بیابید به طوری که سرعت متوسط ماشین D تقریباً مشابه سرعت متوسط ماشین C در بازه $t=2$ تا $t=10$ باشد.

(پ) با استفاده از خطوط قاطع و شیب‌ها نشان دهید ماشین D در بازه $t=4$ تا $t=10$ دارای سرعت متوسط بالاتری نسبت به ماشین C است.

۴ فرض کنید $f(0) = 0$ ، درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.

(الف) اگر برای هر x ، $f(x) \leq x$ ، آنگاه $f'(x) \leq 1$.

(ب) اگر برای هر x ، $f'(x) \leq 1$ ، آنگاه $f(x) \leq x$.



۵ نمودار روبه‌رو تابع موقعیت دو دوندۀ A و B در یک مسابقه دو ۱۰۰ متر را نشان می‌دهد.

(الف) چگونگی حرکت دونده‌ها را مقایسه و تشریح کنید.

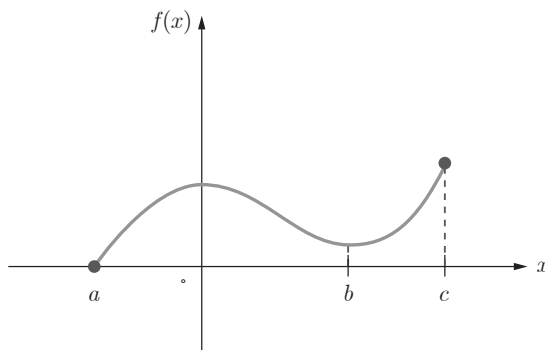
(ب) در چه زمانی تقریباً فاصله بین دو دونده بیشترین است؟

(پ) در چه زمانی تقریباً سرعت هر دو دونده یکسان است؟

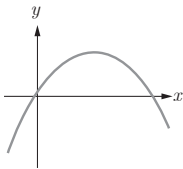
۶ برای تابع رسم شده در شکل زیر بازه یا نقاطی روی محور طول‌ها بیابید که آهنگ تغییر $f(x)$ نسبت

به x :

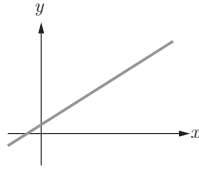
(الف) مثبت (ب) منفی (پ) صفر است.



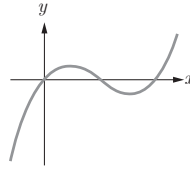
۷ توابع A و B ، C ، D را به مشتقات آنها I ، II ، III نظیر کنید.



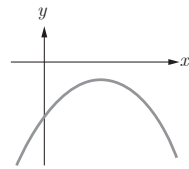
(A)



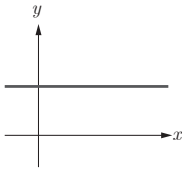
(B)



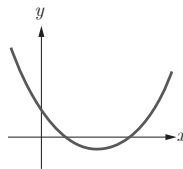
(C)



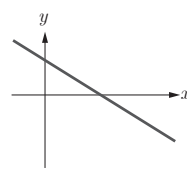
(D)



(I)



(II)



(III)

۸ بشکله‌ای حاوی یک مایع است که در پایین آن سوراخی وجود دارد و مایع در حال خروج از آن می‌باشد. حجم مایع درون بشکله در حال کاهش است و از رابطه $V(t) = 10(2 - \frac{1}{6}t)^2$ پیروی می‌کند. سرعت خروج مایع در $t = 4$ را محاسبه کنید.

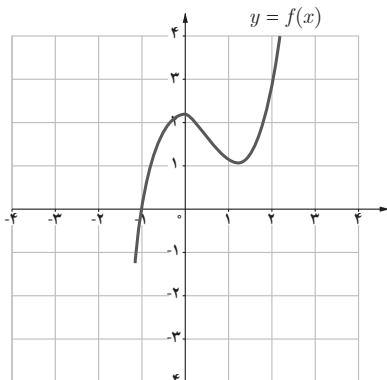
۹ از روی شکل خارج قسمت تفاضلی $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ را تفسیر کنید.

الف) $f(1)$ به چه معنی است؟

ب) $f(1+h)$ به چه معنی است؟ مثلاً برای $h = 0.2$ ؟

پ) $1+h$ به چه معنی است؟

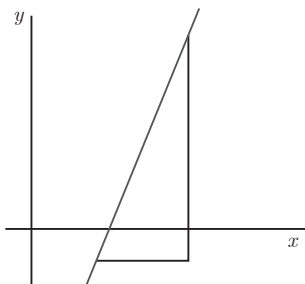
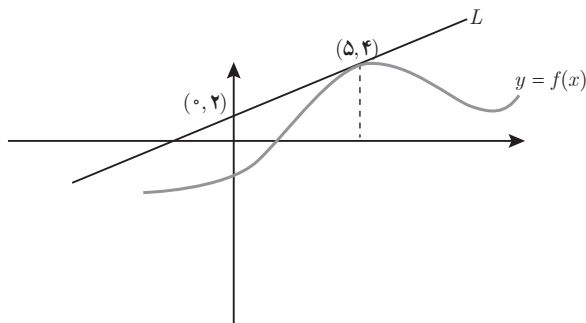
ت) $1+h$ ، $f(1+h)$ و $f(1)$ را روی نمودار مشخص کنید.



ث) از روی شکل حد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ را تفسیر کنید.

ج) مقدار حد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ را برآورد کنید.

۱۰ فرض کنید خط L مماس بر نمودار تابع f در نقطه $(5, 4)$ است. $f(5)$ و $f'(5)$ را به دست آورید.



۱۱ فرض کنید P و Q دو نقطه دلخواه روی نمودار باشند و تغییرات طول‌های آنها x و تغییرات عرض‌های آنها y باشد. اگر بین x و y رابطه $y = mx + b$ برقرار باشد، مقدار m را به طور تقریبی محاسبه کنید.

۱۲ مشتق بگیرید.

۱) $y = \sin 2x \cos 5x - 4$

۲) $y = \cos^2 x + \tan x$

۳) $y = (x^2 - 3x)^2 (x + 2)$

۴) $y = x \sin x - \frac{x}{\sin x}$

۵) $y = \frac{2x - 5}{x^2}$

۶) $y = \frac{4x^3 - 2x^2 + 1}{x + 3}$

۱۲ آیا تابع‌های صفحه بعد در نقطه مشخص شده خط مماس دارند؟ اگر پاسخ مثبت است معادله خط مماس را بیابید.

الف) $f(x) = \sin x$ در $x = 0$

ب) $f(x) = |x|$ در $x = 1$

۱۴ در تابع $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر روی بازه $[2/25, 2/56]$ از آهنگ آنی در شروع این بازه چقدر کمتر است؟

۱۵ معادله حرکت یک گلوله توپ که از زمین به طور قائم به طرف بالا پرتاب می شود به صورت $S(t) = -5t^2 + 20t$ است. سرعت لحظه ای این گلوله در زمان برخورد با زمین چند متر بر ثانیه است؟

۱۶ در تابع با ضابطه $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر از عدد ۲ به عدد $2+h$ تغییر می کند برابر $\frac{1}{9}$ است. h کدام است؟

۱۷ حجم آب یک منبع آب، t دقیقه پس از شروع تخلیه، بر حسب لیتر برابر است با:
 $V(t) = 250(16-t)^2$
 آهنگ لحظه ای تخلیه آب بعد از ۴ دقیقه چقدر است؟ آن را توصیف کنید.

۱۸ در تابع $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \geq 1 \\ x^2+1 & x < 1 \end{cases}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h^2) - f(1)}{h^2}$ چقدر است؟

۱۹ مشتق تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه $x=1$ برابر ۳ است. اگر $f(1) = 0$ ، $f'(1) = -4$ و $g'(1)$ موجود باشد، مقدار $g(1)$ کدام است؟

۲۰ مقدار مشتق عبارت $y = \frac{\sin x}{1 + \tan^2 x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ چقدر است؟

۲۱ مقادیر a و b را به قسمی تعیین کنید که تابع $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & x \leq 0 \\ ax+a+b & x > 0 \end{cases}$ در $x=0$ مشتق پذیر باشد.

۲۲ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax-a & x < 1 \\ x^2-x & x \geq 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه $x=1$ مشتق پذیر است؟

۲۳ فرض کنید تابع f در $x=1$ مشتق پذیر و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)}{h} = 3$ ، مقدار $f'(1)$ و $f(1)$ را به دست آورید.