فصل ۶

هندسه

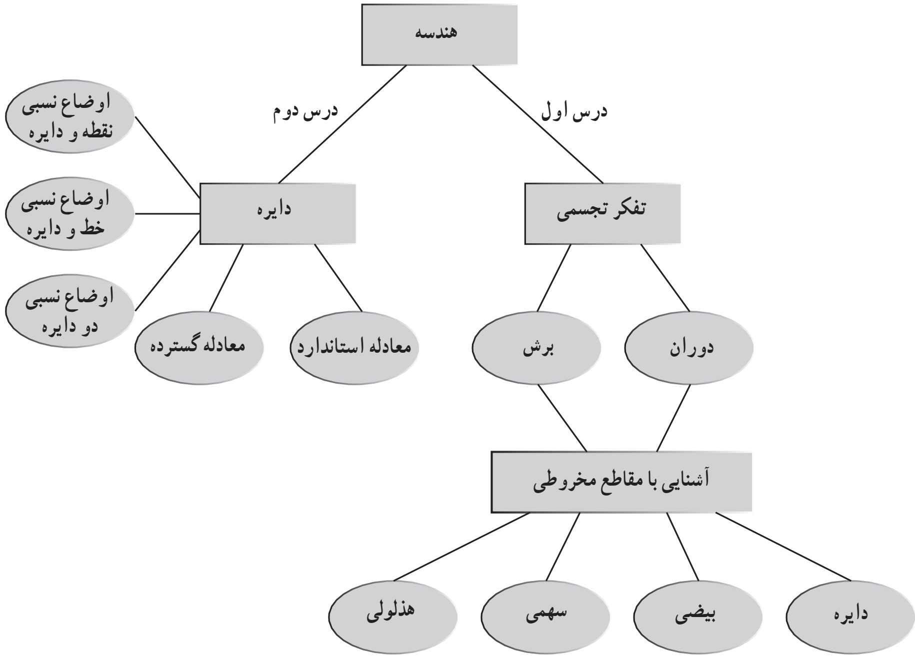
نگاه کلی به فصل

این فصل از ۲ درس با عناوین «تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی» و «دایره» تشکیل شده است. هندسه و تفکر هندسی به عنوان بخش مهمی از ریاضیات و به مثابهٔ یکی از مفاهیم اصلی در برنامه درسی ریاضی از پایه اول تا پایه دوازدهم تحصیلی در دو رشتهٔ ریاضی و تجربی مورد توجه بوده و به‌طور مستمر دنبال شده است.

در این کتاب نیز مانند کتاب‌های سال گذشته در قالب یک فصل به هندسه پرداخته شده است. در درس اول مفهوم تفکر تجسمی مورد توجه قرار گرفته است و سعی بر آن است که با فراهم آوردن موقعیت‌های مختلف، ضرورت تقویت تفکر تجسمی و موارد کاربرد آن در زندگی روزمره برای دانش‌آموزان روشن شود. تفکر تجسمی دارای مؤلفه‌های متفاوتی است که در درس به‌طور صریح و ضمنی به آنها اشاره شده است. اما از آنجا که دوران و برش مبنای مناسبی برای ورود به بحث مقاطع مخروطی فراهم می‌آورد، لذا بیشتر از سایر مؤلفه‌ها بدان توجه شده است.

دقت شود از آنجا که سعی شده است حداکثر هماهنگی بین دو کتاب ریاضی دوازدهم تجربی و کتاب هندسه دوازدهم ریاضی برقرار باشد، لذا در این کتاب نیز از بین مقاطع مخروطی دایره، بیضی، سهمی و هذلولی، تنها دایره در درس دوم به شکل مفصل تشریح و معادله آن بررسی شده است. بنابراین اشاره به معادله بیضی، سهمی و هذلولی جزو اهداف این کتاب نیست. به عبارت دقیق‌تر در درس بیضی، تنها به تعریف و آشنایی با بیضی بسنده شده است. انواع مختلف سهمی تنها در قسمت خواندنی معرفی شده است و لذا در ارزشیابی‌ها لحاظ نخواهد شد و هذلولی در مختصرترین شکل ممکن معرفی شده است. بنابراین نقشه مفهومی این فصل در حالت کلی بدین شکل قابل ترسیم است.

نقشه مفهومی فصل ۶



تصویر عنوانی

تصویر صفحهٔ عنوانی این فصل به معرفی شهر گور که اعراب آن را جور تلفظ می‌کنند، اختصاص دارد. این شهر اولین شهر دایره‌ای در ایران و یکی از نخستین شهرهای دایره‌ای در جهان است که در سه کیلومتری فیروزآباد فارس قرار دارد. قدمت این شهر به دورهٔ هخامنشیان می‌رسد. طرح و الگوی این شهر، دایره‌ای به قطر دو کیلومتر است که اکنون متروک مانده و مناره‌ای با ارتفاع حدود ۵ متر از آن باقی است. به گزارش مورخان، گور، شهری بزرگ با حصاری محکم بوده است؛ به‌طوری‌که اسکندر مقدونی هرچه کرد نتوانست آن را بگشاید. پس دستور داد که مسیر رودخانه‌ای را به سمت شهر بگردانند و آن را در آب غرق کنند.

درس اول

تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

اهداف درس

❑ آشنایی کلی با مفهوم تفکر تجسمی و درک ضرورت و اهمیت آن در زندگی روزمره
❑ توانایی تجسم شکل حاصل از دوران اشکال هندسی حول یک محور
❑ آشنایی با مفهوم سطح مقطع
❑ توانایی تجسم سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه با یک جسم هندسی
❑ توانایی تجسم سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه در حالت‌های مختلف با یک سطح مخروطی
❑ آشنایی با تعریف بیضی و مفاهیم فاصله کانونی، قطر بزرگ، قطر کوچک، بیضی قائم و افقی و خروج از مرکز
❑ آشنایی با ویژگی بیضی و روابط بین قطر بزرگ، قطر کوچک و فاصله کانونی

بدین ترتیب مواردی از قبیل موارد زیر جزء اهداف این کتاب نمی‌باشد.

ـ تعریف دقیق سهمی و هذلولی
ـ معرفی بیضی، معادلهٔ هذلولی و حالت‌های مختلف معادلهٔ سهمی
ـ تعیین سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با اجسام هندسی پیچیده
ـ معرفی حالت‌های خاص (تباهیده) در برخورد یک صفحه با سطح مخروطی

روش تدریس

هدف این درس، آشنایی کلی با مفهوم تفکر تجسمی است. لذا تلاش شده است در شروع درس موقعیت‌هایی به دانش‌آموز پیشنهاد شود تا فرصتی برای فکر کردن و تجسم تصاویر در ذهن داشته باشد. بدین ترتیب رسیدن به پاسخ دقیق و روشن برای دو موقعیت آغازین فصل مدنظر نمی‌باشد. می‌توانید

مانند نمونهٔ زیر فرصت‌های دیگری را به دانش‌آموز پیشنهاد کنید که در آن برای لحظاتی، تصاویر مختلف در ذهن او پردازش شوند.

چهرهٔ پدربزرگ یا مادربزرگ خود را در ذهن تصور کنید. چه ویژگی‌هایی دارد؟ اگر بیست سال جوان‌تر بود به چه شکل بود؟

۱ همان‌طور که پیش از این اشاره شد تفکر تجسمی مفهوم وسیعی دارد که در این درس قصد نداریم به همه ابعاد آن دست پیدا کنیم. لذا تنها به دو مؤلفهٔ برش و دوران به عنوان مفاهیم زیربنایی برای ورود به بحث مقاطع مخروطی خواهیم پرداخت.

۲ دقت داشته باشید که در بحث دوران ممکن است جسم هندسی حاصل توپر یا توخالی باشد. به همین نسبت، سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با جسم هندسی می‌تواند نقاط درونی یک شکل هندسی را شامل باشد یا نباشد. برای مثال در کار در کلاس صفحه ۱۲۴ سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه موازی با قاعده مکعب مستطیل توخالی با قاعده مربع، **یک مربع** است ولی سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه موازی با قاعدهٔ یک استوانه توپر یک **دایره و تمام نقاط داخلی آن** دایره است.

۳ در این درس استفاده از نرم‌افزارهای هندسی نظیر جئوجبرا می‌تواند نقش مناسبی در یادگیری بهتر و مؤثرتر دانش‌آموزان داشته باشد. درصورتی‌که امکان استفاده از نرم‌افزار در کلاس درس مهیا نباشد، می‌توان به کمک خود دانش‌آموزان و ساخت دست‌سازه‌های هندسی به تفهیم بهتر مطلب کمک کرد.

لینک زیر می‌تواند در نمایش مناسب مقاطع مخروطی استفاده شود.

http: //www.geogebra.org/m/dfvnwrkp

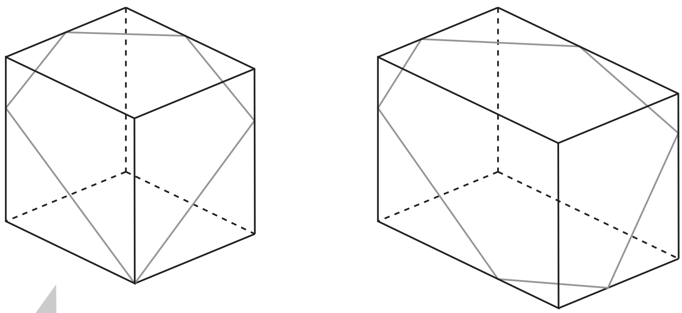
۴ در درس بیضی دقت شود که معرفی معادلهٔ بیضی جزء اهداف کتاب نیست. ضمناً توجه داشته باشید که دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم تجربی با مفهوم «مکان هندسی» آشنا نیستند. بنابراین سعی شده است مفهوم

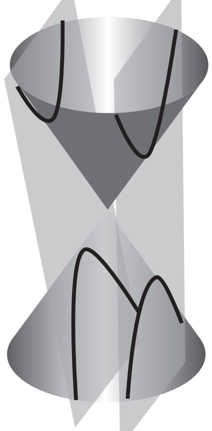
بیضی و همین‌طور مفهوم دایره در درس بعد، بدون اشاره به مفهوم مکان هندسی بیان شود. لذا کافی است دانش‌آموزان به‌طور شهودی به این فهم دست پیدا کنند که مجموع فاصله هر نقطه روی بیضی از دو نقطه ثابت موسوم به کانون‌های بیضی برابر با مقداری ثابت است (l) و از طرف دیگر اگر نقطه‌ای دارای این ویژگی باشد به اجبار روی بیضی واقع خواهد شد. چرا که اگر نقطه داخل بیضی باشد مجموع فاصله‌های آن از نقاط کانونی کمتر از مقدار ثابت l و اگر نقطه بیرون بیضی باشد، مجموع فواصل آن از دو نقطه کانونی بیشتر از مقدار ثابت l است.

۵ در فعالیت صفحه ۱۲۹ دقت داشته باشید که مرکز دایره، فاصله کانونی را نصف می‌کند ولی این مطلب که مرکز دایره قطر بزرگ و قطر کوچک را هم نصف می‌کند، نیاز به اثبات دارد که در این فعالیت بدان پرداخته می‌شود.

۶ مطالبی که در خواندنی آمده‌اند در ارزشیابی‌ها لحاظ نخواهند شد و طرح سؤال از آن مجاز نیست.

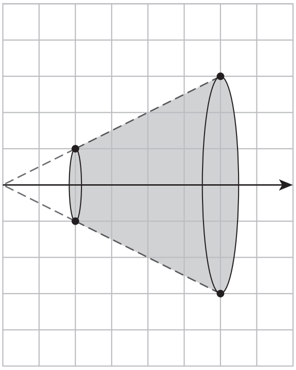
۷ در برخورد یک صفحه با مکعب مستطیل حالت‌هایی که مطابق شکل زیر، جواب، پنج ضلعی یا شش‌ضلعی است جزء اهداف این کتاب نیست. هدف از طرح مبحث برش، تنها زمینه‌سازی برای ورود به بحث مقاطع مخروطی است.





۸ دقت داشته باشید برای تشکیل هذلولی، لازم نیست که صفحه الزاماً موازای با محور سطح مخروطی آن را قطع کند. بلکه فقط کافی است طوری با سطح مخروطی برخورد کند که آن را هم در نیمهٔ بالایی و هم در نیمهٔ پایینی قطع کند.

حل تمرین‌های صفحه ۱۳۲ کتاب درسی



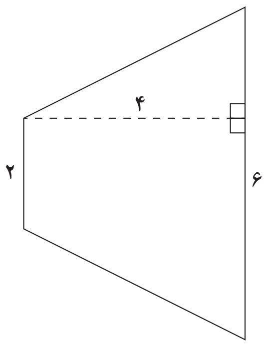
۱ پاره‌خط داده شده را حول محور دوران می‌دهیم. شکل حاصل بدین شکل خواهد بود :

الف) با ادامه دادن پاره‌خط داده شده مشخص می‌شود که شکل حاصل بخشی از یک مخروط است (مخروط ناقص) لذا حجم مخروط ناقص عبارت است از :

حجم مخروط رنگ نشده − حجم مخروط کامل = حجم قسمت رنگی (مخروط ناقص)

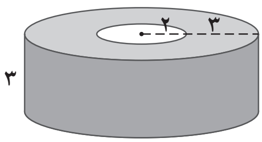
$$=\frac{۱}{۳}\pi(۳)^{۲}\times ۶-\frac{۱}{۳}\pi(۱)^{۲}\times ۲$$

$$=۱۸\pi-\frac{۲}{۳}\pi=\frac{۵۲}{۳}\pi$$



ب) صفحه‌ای که شامل محور دوران باشد، جسم را به دو نیمه مساوی تقسیم می‌کند و سطح مقطع به شکل ذوزنقه خواهد بود.

مساحت ذوزنقه : $\frac{(۲+۶)\times ۴}{۲}=۱۶\text{cm}^{۲}$



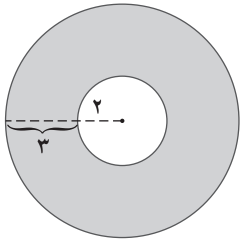
۲ الف) مربع را حول محور دوران می‌دهیم. شکل حاصل بدین شکل است.

حجم استوانه کوچک‌تر − حجم استوانه بزرگ‌تر = حجم شکل حاصل

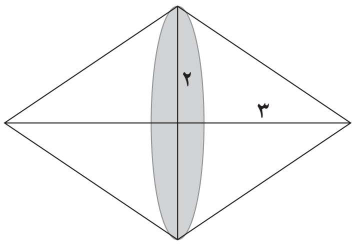
$$=\pi(۵)^{۲}\times ۳-\pi(۲)^{۲}\times ۳$$

$$=۷۵\pi-۱۲\pi=۶۳\pi$$

ب) سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه‌ای موازی با قاعده استوانه یک دایره است. لذا در این شکل سطح مقطع به این شکل است :



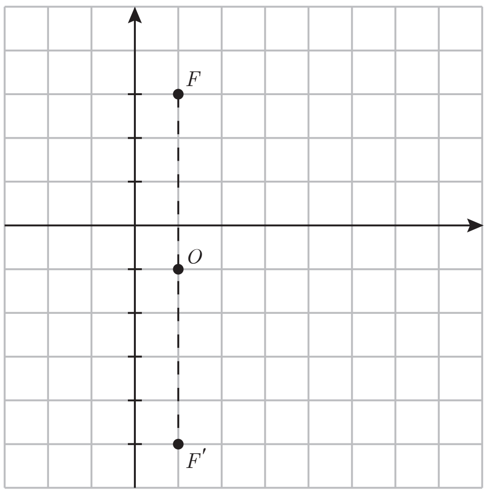
۳ شکل حاصل دو مخروط هم‌اندازه خواهد بود که از قاعده به هم متصل هستند. بنابراین حجم آن برابر است با :



(حجم یک مخروط) × ۲ = حجم شکل

$$= ۲ \times \frac{۱}{۳}\pi(۲)^{۲} \times ۳ = ۸\pi$$

۴ نقاط کانونی را روی دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم. مطابق شکل و با توجه به مختصات داده شده، این بیضی، یک بیضی قائم است.



الف) فاصله کانونی یعنی طول FF' مطابق شکل برابر است با ۸.

مرکز بیضی وسط فاصله کانونی است و لذا مختصات آن برابر با (۱– و ۱). معادلهٔ قطر بزرگ بیضی

$x=۱$، و معادله قطر کوچک $y=-۱$ است.

ب) می‌دانیم

$$b^۲=a^۲-c^۲$$
$$=۶^۲-۴^۲$$
$$=۳۶-۱۶=۲۰ \Rightarrow b=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

بنابراین اندازهٔ قطر کوچک برابر است با $۴\sqrt{۵}$ و اندازهٔ خروج از مرکز با فرمول $e=\frac{c}{a}$ برابر است با $\frac{۴}{۶}$ و لذا $e=\frac{۲}{۳}$

۵ الف) $b=۳ \Rightarrow$ طول قطر کوچک $=۶$؛ $e=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵} \Rightarrow c=\frac{۴}{۵}a$

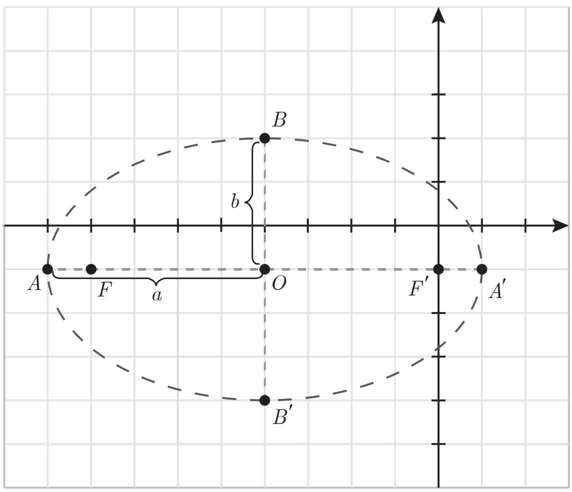
از طرفی می‌دانیم $a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow a^۲=۳^۲+(\frac{۴}{۵}a)^۲ \Rightarrow a^۲=۹+\frac{۱۶}{۲۵}a^۲$

$$\Rightarrow \frac{۹}{۲۵}a^۲=۹ \Rightarrow a^۲=۲۵ \Rightarrow a=۵ \,,\, c=\frac{۴}{۵}\times ۵=۴$$

$\Rightarrow$ فاصله کانونی $=۲c=۸$ و قطر کانونی $=۲a=۱۰$

ب) مطابق شکل رسم شده :

$A(-۹,-۱)\,,\,A'(۱,-۱)\,;\,B(-۴,۲)\,,\,B'(-۴,-۴)\,;\,F(-۸,-۱)\,,\,F'(۰,-۱)$



درس دوم

دایره

اهداف درس

❑ آشنایی با معادلهٔ استاندارد و معادلهٔ گسترده دایره

❑ توانایی تشخیص مرکز دایره و محاسبهٔ اندازهٔ شعاع دایره در هر یک از معادله‌های استاندارد و گستردهٔ دایره

❑ آشنایی شهودی با اوضاع نسبی نقطه و دایره و سپس توانایی ارائهٔ استدلال تحلیلی برای تشخیص حالت‌های مختلف

❑ آشنایی شهودی با اوضاع نسبی خط و دایره و سپس توانایی ارائهٔ استدلال تحلیلی برای تشخیص حالت‌های مختلف

❑ آشنایی شهودی با اوضاع نسبی دو دایره و سپس توانایی ارائهٔ استدلال تحلیلی برای تشخیص حالت‌های مختلف

بدین ترتیب موارد زیر جزء اهداف این کتاب نمی‌باشد.

❑ حل نامعادله‌های مربوط به دایره و تعیین مجموعه جواب آنها

❑ طرح سؤالاتی که در آن $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ مربوط به یک دایره نمی‌باشد و $a^۲ + b^۲ \leq ۴c$ است.

❑ طرح سؤالاتی که در آن دانش‌آموز لازم است به حل دستگاه ۳ معادله و ۳ مجهولی بپردازد.

روش تدریس

۱ در این درس هم استفاده از نرم‌افزارهای هندسی نظیر جئوجبرا می‌تواند به فهم بهتر مطلب کمک

شایانی داشته باشد. استفاده از لینک زیر برای آشنایی بیشتر با دایره و معادلهٔ آن توصیه می‌شود :

http: //www.geogebra.org/m/geh7bga6

۲ باز هم دقت شود که دانش‌آموزان در این پایه با مفهوم مکان هندسی آشنا نیستند. لذا سعی شده است مفهوم دایره و ویژگی نقاط روی دایره بدون استفاده از مفهوم مکان هندسی آموزش داده شود.

۳ در بررسی اوضاع نسبی «نقطه و دایره»، «خط و دایره» و «دو دایره» حتماً آموزش را ابتدا به شیوهٔ شهودی آغاز کنید و سعی کنید فضایی ایجاد کنید که در آن خود دانش‌آموزان روش تحلیلی را حدس بزنند و برای آن اقدام کنند.

۴ در کتاب درسی قدیم سؤالاتی مطرح می‌شد که در معادلهٔ $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$، معادلهٔ داده شده معادلهٔ یک دایره نبود. به عبارتی $a^۲+b^۲\leq ۴c$ بود و معادلهٔ داده شده مربوط به یک نقطه بود یا دایره‌ای را مشخص نمی‌کرد. دقت شود که به رسم عادت سؤالات این‌چنینی در ارزشیابی‌ها استفاده نشود.

۵ در بررسی اوضاع نسبی دو دایره می‌توان با قطع دادن دو دایره در دستگاه مختصات وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص کرد و علاوه بر آن مختصات نقاط تقاطع دو دایره را در صورت وجود مشخص کرد. این مفهوم جزء اهداف این کتاب نیست ولی استفاده از آن برای دانش‌آموزان با توانایی بالای ریاضی به تشخیص معلم واگذار می‌شود.

۶ دقت داشته باشید که دانش‌آموزان در این پایه، با حل دستگاه ۳ معادله و ۳ مجهولی آشنایی ندارند. بنابراین از طرح سؤالاتی که نیاز به این توانایی دارند، اجتناب کنید. برای دانش‌آموزان با توانایی بالای ریاضی طرح چنین سؤالاتی به تشخیص معلم واگذار می‌شود.

حل تمرین‌های صفحه ۱۴۲ کتاب درسی

۱ الف) داریم : $x^۲+y^۲-۶x+۲y+۱=۰ \Rightarrow a=-۶\ ,\ b=۲\ ,\ c=۱$

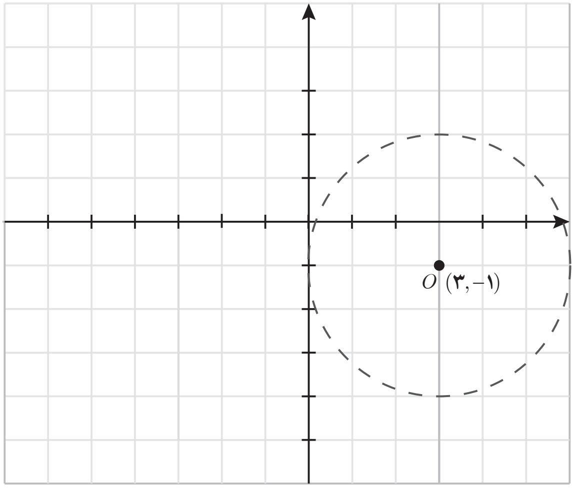
$$\Rightarrow \text{مرکز دایره}: \left(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲}\right)=(۳,-۱)\ ,\ r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}\Rightarrow r=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۶)^۲+۲^۲-۴(۱)}=۳$$

محل تقاطع با محور x: $y=۰ \Rightarrow x^۲-۶x+۱=۰ \Rightarrow \Delta=(-۶)^۲-۴(۱)(۱)=۳۲$

$$\Rightarrow x=\frac{+۶\mp\sqrt{۳۲}}{۲}=\frac{۶\mp۴\sqrt{۲}}{۲}\ \begin{cases} ۵/۸ \to (۵/۸,۰)\\ ۰/۱۷ \to (۰/۱۷,۰)\end{cases}$$

محل برخورد با محور y: $x=۰ \to y^۲+۲y+۱=۰ \Rightarrow (y+۱)^۲=۰ \Rightarrow y=-۱ \to (۰,-۱)$

محل تقاطع با محور y



ب) $x^{۲} + (y+۳)^{۲} = ۴$

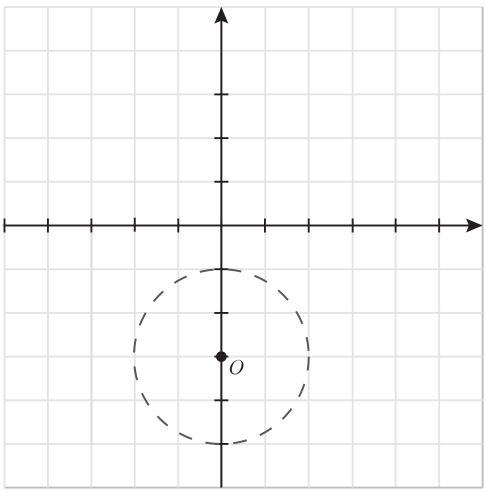
$\Rightarrow$ مرکز دایره: $(۰,-۳)$, شعاع دایره: $r=۲$

محل برخورد با محور x: $y=۰ \Rightarrow x^{۲}+۹=۴ \Rightarrow x^{۲}=-۵ \Rightarrow$ با محور x نقطه برخورد ندارد

محل برخورد با محور y: $x=۰ \Rightarrow (y+۳)^{۲}=۴ \Rightarrow y+۳=\mp ۲ \rightarrow y=-۱,\ y=-۵$

بنابراین نقاط برخورد با محور y عبارت‌اند از $(۰,-۱)$ و $(۰,-۵)$

شکل دایره را به کمک مختصات مرکز و اندازهٔ شعاع دایره رسم می‌کنیم. مطابق شکل، دایره با محور طول نقطهٔ برخورد ندارد و نقاط برخورد با محور y با آنچه محاسبه شد مطابق است.



۲ الف) اندازه شعاع دایره برابر است با : $\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}$ پس $r=\sqrt{۵} \Leftarrow$ معادلهٔ دایره :

$(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۵$

ب) اندازهٔ شعاع برابر است با $\sqrt{(۲+۳)^۲+(۹+۳)^۲}$ پس $r=۱۳ \Leftarrow$ معادلهٔ دایره :

$(x-۲)^۲+(y-۳)^۲=۱۶۹$

پ) مرکز دایره وسط پاره‌خطی است که $(۰,۳)$ را به $(-۴,-۱)$ وصل می‌کند. پس $O(-۲,۱)$ و اندازهٔ شعاع نصف طول این پاره‌خط است $\Leftarrow$ $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۴)^۲+(-۱-۳)^۲}$ به عبارتی $r=۲\sqrt{۲}$ پس معادلهٔ دایره : $(x+۲)^۲+(y-۱)^۲=۸$

دقت داشته باشید که نوشتن معادلهٔ گستردهٔ دایره به جای معادلهٔ استاندارد نیز صحیح است.

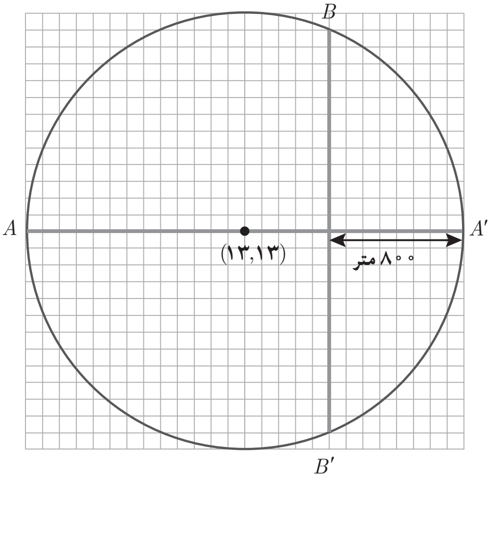
۳ مختصات مرکز دایره برابر است با $(-۲,۱)$ و شعاع دایره برابر است با : $۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲+(۴)^۲-۴(۱)}$

ـ فاصلهٔ نقطهٔ $(۰,۱)$ از مرکز دایره برابر است با $۲=\sqrt{(۱-۱)^۲+(۰+۲)^۲}$ از آنجا که این مقدار برابر شعاع است نقطه $(۰,۱)$ روی دایره است.

ـ فاصلهٔ نقطهٔ $(۰,-۱)$ از مرکز دایره برابر است با $\sqrt{۲}=\sqrt{(۰-۱)^۲+(-۱+۲)^۲}$ این مقدار از اندازهٔ شعاع کمتر است پس نقطه $(۰,-۱)$ درون دایره است.

ـ فاصلهٔ نقطهٔ $(-۱,-۲)$ از مرکز دایره برابر است با $۲=\sqrt{(-۱-۱)^۲+(-۲+۲)^۲}$ پس این نقطه هم روی دایره است.

ـ فاصلهٔ نقطهٔ $(۰,۰)$ از مرکز دایره برابر است با $\sqrt{۵}=\sqrt{(۰-۱)^۲+(۰+۲)^۲}$ این مقدار از شعاع دایره بزرگ‌تر است. پس این نقطه بیرون دایره است.



۴ شعاع دایرهٔ ۱۳۰۰ و بنابراین ۱۳ واحد است. پس

الف) معادلهٔ دایره عبارت است از :

$(x-۱۳)^۲+(y-۱۳)^۲=۱۶۹$

ب) اگر مختصات نقاط برخورد مسیرها را با دایره A، A'، B و B' بنامیم مطابق شکل داریم : $A'(۲۶,۱۳)$ و $A(۰,۱۳)$ معادله خط گذرنده از نقاط B و B' برابر است با $x=۱۸$. با جایگزین کردن این مقدار در معادلهٔ دایره داریم :

$$(۱۸-۱۳)^{۲}+(y-۱۳)^{۲}=۱۶۹ \Rightarrow (y-۱۳)^{۲}=۱۶۹-۲۵=۱۴۴ \Rightarrow y-۱۳=\mp ۱۲ \Rightarrow \begin{cases} y=۲۵ \\ y=۱ \end{cases}$$

پس مختصات B و B' به ترتیب عبارت‌اند از : (۱۸,۲۵) و (۱۸,۱)

پ) در نقطه (۱۸,۱۳)

ت) شعاع دایره برابر ۱۳ و فاصلهٔ مرکز دایره از محل تقاطع دو مسیر ۵ واحد است. از رابطهٔ فیثاغورس اندازهٔ فاصلهٔ نقطه B از محل تقاطع ۱۲ واحد است و طول مسیر BB' بدین ترتیب ۲۴۰۰ متر است.

۵ مختصات مرکز دایره عبارت است از (۱-,۱-) و شعاع آن از رابطه $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}$ برابر است با $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴-۴(-۸)}=\sqrt{۱۰}$ $\Leftarrow$ فرم استاندارد این دایره به این شکل است :

$(x+۱)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۱۰$

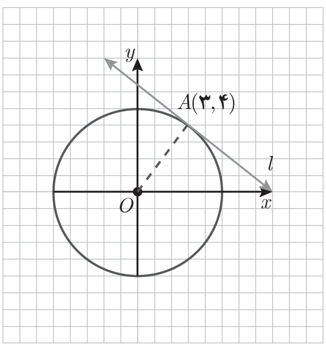
۶ کافی است مختصات مرکز دایره را مشخص کرده و سپس فاصلهٔ مرکز دایره را از خط داده شده محاسبه کنیم و اندازهٔ آن را با اندازهٔ شعاع دایره مقایسه کنیم.

الف) مختصات مرکز دایره (۲,۲) است و فاصله این نقطه از خط $۶x+۴y=۰$ برابر است با :

$$d=\frac{|۶(۲)+۴(۲)+۰|}{\sqrt{۶^{۲}+۴^{۲}}}=\frac{۲۰}{\sqrt{۵۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۱۳}}$$

از طرفی اندازهٔ شعاع برابر است با $\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۴)^{۲}+(-۴)^{۲}-۴(۷)}=۱$ پس داریم $d>r$ و بنابراین خط داده شده بیرون دایره است و با آن نقطه تقاطعی ندارد.

ب) مختصات دایره مرکز داده شده (۰,۰) و شعاع آن $\sqrt{۲}$ است. فاصله نقطه (۰,۰) از خط $-x-y-۲=۰$ برابر است با $d=\frac{|۰+۰-۲|}{\sqrt{(-۱)^{۲}+(-۱)^{۲}}}=\sqrt{۲}$ از آنجا که $d=r$ پس خط داده شده بر دایره مماس است.



۷ برای داشتن معادلهٔ خط مماس مختصات یک نقطه از آن و شیب آن لازم است. از آنجا که شعاع در محل تماس بر خط مماس عمود است داریم :

$$OA \text{ شیب خط } =\frac{۴}{۳} \Rightarrow l \text{ شیب خط } =-\frac{۳}{۴}$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس عبارت است از :

$$y-۴=-\frac{۳}{۴}(x-۳) \Rightarrow ۴y+۳x=۲۵$$

۸ برای نوشتن معادلهٔ دایره، اندازهٔ شعاع لازم است که برابر است با اندازهٔ فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس بر دایره :

$$d=\frac{|۳(۰)-۴(۳)-۳|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۱۵}{۵}=۳ \Rightarrow r=۳ \Rightarrow \text{معادلهٔ دایره}: (x-۰)^۲+(y-۳)^۲=۳^۲$$
$$\Rightarrow x^۲+(y-۳)^۲=۹$$

۹

الف) مرکز دایره : $O(+۱,-۲)$, شعاع دایره : $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲+۴^۲-۴(۴)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴}=۱$

مرکز دایره : $O'(-۱,۲)$, شعاع دایره : $r'=\frac{۱}{۲}\sqrt{(۲)^۲+(-۴)^۲-۴(-۹)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۵۶}=\sqrt{۱۴}$

از طرفی $OO'=\sqrt{(۱-(-۱))^۲+(-۲-۲)^۲}=\sqrt{۴+۱۶}=\sqrt{۲۰} \Rightarrow r-r'<OO'<r+r'$

و دو دایره متقاطع هستند.

ب) مرکز دایره : $O(۲,-۳)$, شعاع دایره : $r=\sqrt{۷}$

مرکز دایره : $O'(۰,۵)$, شعاع دایره : $r'=\sqrt{۵}$

از طرفی $OO'=\sqrt{(۲-۰)^۲+(-۳-۵)^۲}=\sqrt{۶۸} \Rightarrow OO'>r+r'$ بنابراین دو دایره بیرون از هم هستند.

۱۰ در دایرهٔ داده شده مرکز دایره $O(۲,۳)$ و اندازهٔ شعاع دایره برابر است با :

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۴)^۲+(-۶)^۲-۴(-۳)}=۴$$

از طرفی اندازهٔ خط‌المرکزین قابل محاسبه است و برابر است با :

$$OO'=\sqrt{(۲+۱)^۲+(۳+۱)^۲}=۵$$

می‌خواهیم دو دایره مماس درون باشند، پس باید $|r-r'|= d \Rightarrow ۵=|۴-r'| \Rightarrow \begin{cases} r'=-۱ & \text{غ‌ق‌ق} \\ r'=۹ \end{cases}$

بنابراین معادلهٔ دایره برابر است با :

$$(x+۱)^۲+(y+۱)^۲=۸۱$$

نمونه سؤالات بیشتر (سؤالات ستاره‌دار فقط مخصوص دانش آموزان علاقمند)

۱ روی دایره‌ای به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۶y + ۴ = ۰$ دو نقطهٔ A و B را به طول ۲ درنظر می‌گیریم.

الف) مختصات نقطهٔ C را روی این دایره چنان بیابید که مثلث ABC دررأس C متساوی‌الساقین شود. چند مثلث با این ویژگی داریم؟

ب) چند نقطه مثل D روی این دایره می‌توان یافت، به‌طوری که مثلث ABD دررأس D قائمه شود؟

۲ معادلهٔ وتری که از نقطهٔ (۲,۱) A درون دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳ می‌گذرد و بر شعاع OA عمود است چیست؟

۳ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از نقاط (۱,۰) و (۶,۰) بگذرد و بر خط $y=۱$ مماس باشد. *

۴ نقاط (۵ , ۲-) و (۱- ,۲-) دوسر قطر بزرگ یک بیضی هستند.

الف) مختصات مرکز این بیضی چیست؟

ب) اگر قطر کوچک این بیضی ۴ واحد باشد کدام نقاط دو سر قطر کوچک هستند؟

پ) اندازهٔ فاصلهٔ کانونی و مختصات نقاط کانونی را محاسبه کنید.

ت) خروج از مرکز بیضی چقدر است؟

۵ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که با دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۶y + ۱۲ = ۰$ هم‌مرکز باشد و شعاع آن، دو برابر شعاع این دایره باشد.

۶ اگر نقاط (۱,۰)، (۲-,۳) و (۱-,۲) سه نقطه از یک شهر باشد، دکل مخابراتی را در کدام نقطه باید نصب کرد که سرویس‌دهی یکسانی به هر سه نقطه انجام شود؟ *

۷ معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقطه‌های B(۳،۳) و A(۱،۱) بگذرد و مرکز آن روی خط $x = ۳y$ واقع باشد.

۸ چند دایره می‌توان به مرکز M(۲,۱) رسم کرد به‌طوری که بر محورهای مختصات مماس باشد؟ معادلهٔ این دایره‌ها را بنویسید.

۹ معادله دایره‌ای را بنویسید که نقاط (۱,۳) و (۱,۵) دوسر قطری از آن باشند.

۱۰ دایره‌ای به مرکز (۲, ۱−) بر خط ۴y − ۳x −۱ = ۰ مماس است. شعاع این دایره چقدر است؟

۱۱ اگر خط l در نقطهٔ (۱,۳−) بر دایره‌ای به مرکز (۲,۰) مماس باشد :

الف) معادلهٔ خط مماس را پیدا کنید.

ب) معادلهٔ دایره را بنویسید.

۱۲ مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a را حول ضلع آن دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل چقدر است؟