

فصل ۱

آمار و احتمال



روستای مشکله - استان گیلان (شهرستان املش)

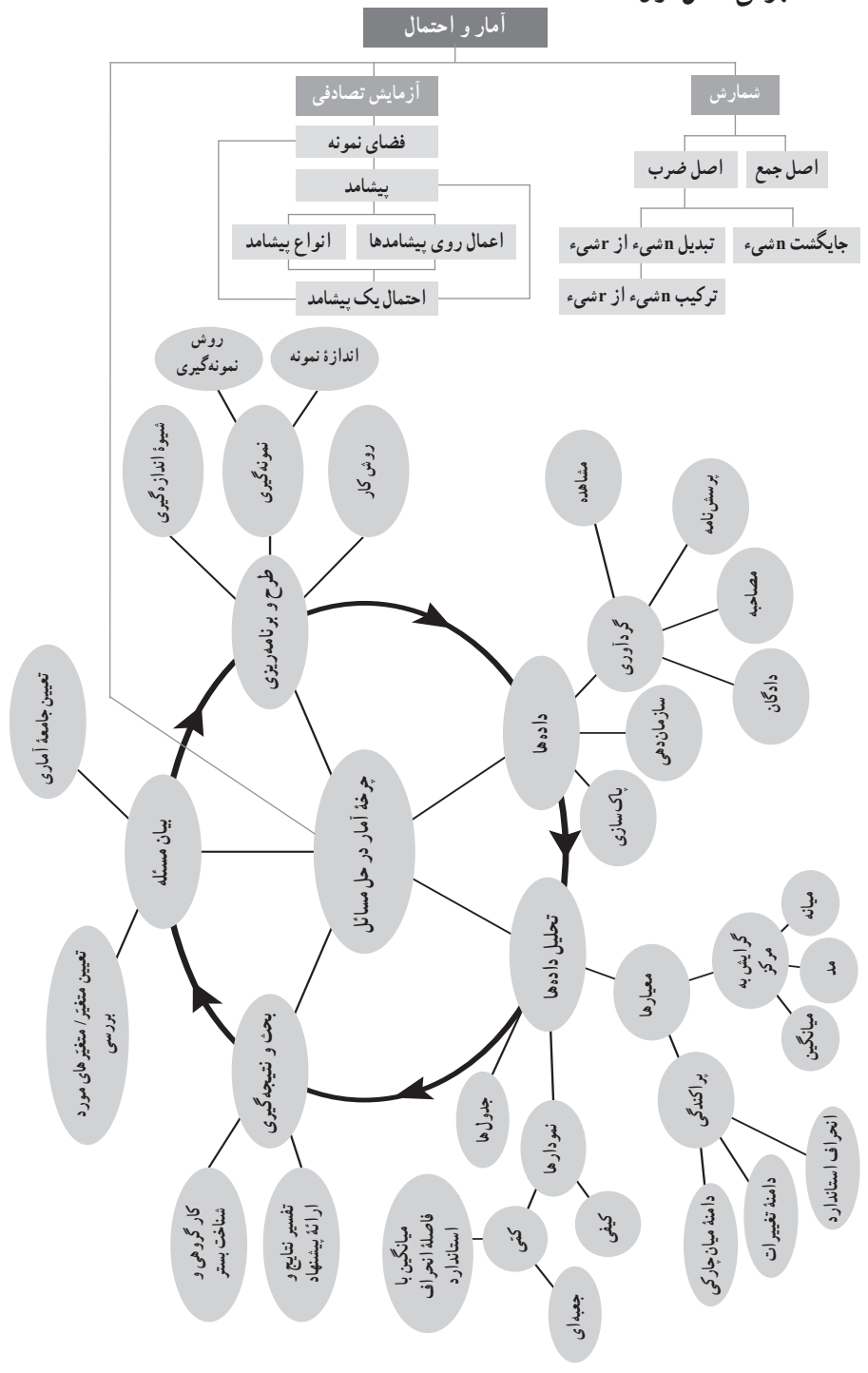
نگاه کلی به فصل

فصل ۱ کتاب ریاضی پایه دوازدهم به مبحث آمار و احتمال اختصاص یافته است. این فصل شامل سه درس است. در درس اول مفهوم شمارش مطرح می‌شود و شامل قواعد اصل ضرب، اصل جمع، جایگشت، تبدیل و ترکیب است، که هر یک از این قواعد در نظریه احتمال نقش اساسی ایفا می‌کنند. در درس دوم با استفاده از مفاهیم پدیده تصادفی، فضای نمونه، پیشامد، اعمال روی پیشامدها و مفهوم احتمال تشریح می‌گردد و در درس سوم مفهوم چرخه آمار و مسائل مربوط به آن بیان می‌شود.

آمار و احتمال به عنوان دو علم، مدل‌هایی را در اختیار قرار می‌دهند که برای مطالعه عدم حتمیت‌ها به کار می‌روند. انتخاب کالایی از محصولات یک کارخانه، عدد رو شده در پرتاب یک تاس، وضعیت آب و هوا و... همه مواردی از وجود عدم قطعیت هستند. بررسی این گونه مسائل به شمارش تعداد حالات رخدادها مربوط می‌شود. در حقیقت بسیاری از مسائلی را که ما تحت عنوان عدم حتمیت یا همان احتمال مطرح می‌کنیم، می‌توانیم با استفاده از اصول و قواعد شمارش به سادگی بررسی کنیم.

در این فصل، هر مبحث درس با فعالیتی آغاز می‌شود، سپس با نتیجه‌گیری از حل فعالیت، قوانین آن را گفته و سؤالات متنوعی ارائه شده است.

نقشه مفهومی فصل اول



ترکیبیات (آنالیز ترکیبی) یکی از شاخه‌های مهم ریاضیات است که سریعاً در حال رشد می‌باشد. یکی از علل رشد سریع ترکیبیات، ورود کامپیوتر در صحنه علم و جامعه است. روش‌های ترکیبیاتی فقط کاربرد ریاضی یا فیزیکی ندارند، بلکه در علوم دیگر مانند اجتماعی و بیولوژی نیز کاربرد دارند. ریاضی‌دانان چینی، هندی و یونانی از قرن نخست میلادی با فرمول‌های مربوط به آرایش‌ها و ترکیب‌ها آشنایی داشتند. ترکیبیات ارتباط تنگاتنگ با نظریه احتمالات دارد و در قرون هفدهم و هجدهم، بسیاری از ریاضی‌دانان اروپایی به مطالعه احتمالات ترکیبیاتی پرداخته بودند.

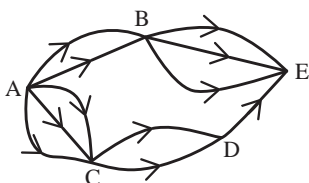
در آنالیز ترکیبی یا علم شمارش در سطوح مقدماتی، فقط از اصول جمع و ضرب برای شمارش استفاده می‌شود، حال آنکه شمارش می‌تواند توسط ابزارهای دیگر یا اصول دیگری نیز انجام شود. یکی از این ابزارها گراف‌های جهت‌دار و ماتریس‌های مجاورت وابسته به این گراف‌ها، توأم با اصل ضرب است. همچنین از اصولی چون اصل لانه کبوتری و اصل شمول و عدم شمول نیز می‌توان برای شمارش و حل مسائل شمارشی در آنالیز ترکیبی استفاده نمود.^۱

بازی‌هایی که متکی بر شانس است، از زمان‌های بسیار دور رایج و متداول بوده است. در حفاری‌های مربوط به باستان‌شناسی، برخی وسایل و آثار مربوط به بازی‌های شانس مشاهده شده است. با این شواهد به نظر می‌رسد که نوعی تصور خام از احتمال در تصمیم‌گیری‌ها مؤثر بوده است. در آغاز نخستین بحث‌های صوری ریاضی در احتمال، اغلب نویسندگان، کاردانو را نخستین نویسنده در احتمال معرفی می‌کنند. اثر او کتابی با نام «بازی‌هایی با تاس» است. کارهای اولیه ریاضی‌دانان در زمینه تئوری احتمال از قرن هفدهم شروع شد. با توجه به پیشرفت در زمینه ریاضیات به ویژه در احتمال، آغاز قرن بیستم، دوران احتمال مدرن نام گرفت. در این دوره، ریاضی‌دانان به خوبی آگاه بودند که در احتمال، عوامل تجربی بیشتر از علوم قدیمی‌تر مانند هندسه و آنالیز دخالت دارند. در نتیجه بحث‌های جدی که در این زمینه آغاز شده بود، کولموگروف موفق به کشف بزرگ خود شد. او توانست احتمال را بر اساس اصول موضوعی در قالب تئوری اندازه بنا نهد. از او کتابی به نام «مبانی تئوری احتمال» در آلمان به سال ۱۹۳۳ منتشر شد و پایه بنای تئوری احتمال مدرن شد.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ جا‌های خالی را کامل کنید.

- (الف) اگر بتوان کاری را به دو روش مجزا از هم انجام داد و در روش اول m طریق و در روش دوم n طریق وجود داشته باشد، طبق اصل می‌توان آن کار را به طریق انجام داد.
- (ب) اگر کاری شامل دو مرحله باشد و انجام مرحله اول به m طریق و برای هر کدام از این m طریق، مرحله دوم به n طریق انجام پذیر باشد، طبق اصل می‌توان کل کار را به طریق انجام داد.
- (پ) با حروف کلمه flower می‌توان کلمه شش حرفی با معنای بی‌معنا، بدون تکرار حروف ساخت.
- (ت) حاصل $9 \times 10 \times 11$ با استفاده از نماد فاکتوریل برابر با است.
- (ث) حاصل عبارت $!(2! + 1! + 0!)$ برابر می‌شود.
- (ج) تعداد مثلث‌هایی که با ۵ نقطه روی محیط دایره می‌توان ساخت، برابر است.
- (چ) حاصل $P(n, n)$ برابر و حاصل $C(n, n)$ برابر می‌باشد.
- (ح) شکل زیر نشان دهنده جاده‌های بین شهرهای A, B, C, D, E است و همه جاده‌ها یک طرفه‌اند، به طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت.



۲ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

$$\text{(الف)} \quad \left(\frac{3}{5}\right)! = \frac{3!}{5!}$$

$$\text{(ب)} \quad \frac{2!}{0!} = \text{تعریف نشده}$$

$$\text{(پ)} \quad 0! + 0! + 1! + 1! = 4!$$

- (ت) تعداد زیر مجموعه‌های ۴ عضوی از مجموعه $\{1, 2, \dots, 10\}$ که حتماً شامل عدد ۵ باشد، برابر $C(10, 4)$ می‌باشد.

(ث) تعداد حالت‌های انتخاب نفرات اول تا سوم از بین ۲۵ دانش آموز برابر $P(25, 3)$ می‌باشد.

$$\text{(ج)} \quad (4!)^2 = 16!$$

$$\text{(چ)} \quad 7! = 7 \times 6!$$

$$\text{(ح)} \quad \frac{10!}{5!} = 2!$$

۳ گزینه صحیح را انتخاب کنید.

(الف) با ارقام ۳، ۹، ۸، ۷ و ۴ چند عدد پنج رقمی می توان نوشت؟

۱۲۰ ۱ ۴۶۲ ۲ ۵۶۴ ۳ ۶۲۵ ۴

(ب) با ارقام ۱، ۰، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی بزرگ تر از ۳۰۰ بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

۴۰ ۱ ۶۰ ۲ ۸۰ ۳ ۱۲۰ ۴

(پ) سه کتاب متمایز ریاضی و دو کتاب متمایز اقتصاد را به چند طریق می توان در یک قفسه کنار هم قرار داد به طوری که کتاب های هم موضوع همواره کنار هم باشند؟

۲۴ ۱ ۱۲ ۲ ۱۲۰ ۳ ۶۰ ۴

(ت) به چند طریق می توان ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه را در یک خط مرتب کرد به طوری که مهره های سفید کنار یکدیگر باشند؟ (همه مهره ها متمایزند.)

۴۸ ۱ ۳۶ ۲ ۲۴ ۳ ۱۲ ۴

(ث) پلاک اتومبیل سواری سری ب در تهران به صورت _____ تهران است که هر ستاره نمایش یک رقم غیر صفر است. در سری ب و در تهران چند پلاک می توان ساخت که با رقم فرد شروع شود و به رقم زوج ختم شود؟

۱۱۶۶۴ ۱ ۱۴۵۸۰ ۲ ۱۵۴۸۰ ۳ ۱۸۲۲۵ ۴

(ج) با جایگشت ارقام ۶، ۵، ۵، ۲ و ۱ چند عدد پنج رقمی بخش پذیر بر ۵ می توان ساخت؟

۱۸ ۱ ۲۰ ۲ ۲۴ ۳ ۳۰ ۴

(چ) دانش آموزی باید به ۱۸ سؤال از ۲۰ سؤال امتحانی به دلخواه پاسخ دهد، به چند طریق می تواند این ۱۸ سؤال را انتخاب کند؟

۱۸ ۱ ۲۰ ۲ ۱۹۰ ۳ ۳۸۰ ۴

(ح) در یک پرواز داخلی، ۴ جای خالی در هواپیما است و ۹ نفر در فهرست انتظار قرار دارند، به چند طریق می توان از بین آنان ۴ نفر را سوار کرد؟

۵۶ ۱ ۶۳ ۲ ۱۱۲ ۳ ۱۲۶ ۴

(خ) به چند راه مختلف، از بین ۸ نفر دوندۀ در یک مسابقه، نفرات اول تا سوم می توانند مشخص شوند، بدون آنکه هیچ دو نفری هم زمان به خط پایان برسند؟

۶۳۳ ۱ ۳۳۶ ۲ ۲۳۶ ۳ ۳۲۶ ۴

۴ حاصل عبارات ستون الف را با ستون ب جور کنید.

الف	ب
$(0! + 0! + 0! + 0!)!$	۳۶
$6 \times 20 \times 42$	$8!$
$\frac{9!}{7! \times 2!}$	۶
$1! + 2! + 3!$	$7!$
$24 \times 56 \times 30$	۹

۵ با حروف کلمه CHAIR،

الف) چند کلمه سه حرفی می توان نوشت؟

ب) چند کلمه سه حرفی بدون تکرار می توان نوشت؟

پ) چند کلمه سه حرفی می توان نوشت به طوری که شامل حرف A باشد؟

۶ در جعبه ای ۵ مهره سبز، ۴ مهره آبی و ۲ مهره سفید وجود دارد، به چند طریق می توان تصادفی ۳ مهره

از این جعبه خارج کنیم به طوری که،

الف) هر سه مهره سبز باشند.

ب) هر سه هم رنگ باشند.

پ) فقط دو مهره آبی باشد.

ت) حداقل یک مهره سبز باشد.

ث) حداکثر دو مهره آبی باشد.

ج) هیچ یک از مهره های خارج شده سفید نباشد.

۷ مجموعه $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ مفروض است،

الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد سه رقمی زوج (بدون تکرار ارقام) می توان ساخت؟

ب) چند عدد چهار رقمی فرد بزرگ تر از ۵۰۰۰ (بدون تکرار ارقام) می توان ساخت؟

پ) چند عدد سه رقمی مضرب ۵ (بدون تکرار ارقام) می توان نوشت؟

ت) مجموعه A چند زیر مجموعه چهار عضوی دارد؟

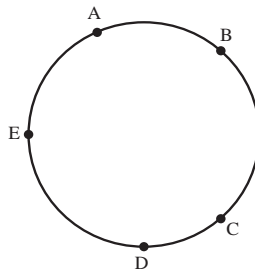
ث) مجموعه A چند زیر مجموعه چهار عضوی و شامل رقم ۳ دارد؟

ج) مجموعه A چند زیر مجموعه پنج عضوی فاقد ارقام ۲، ۴ و ۷ دارد؟

- ۸ شش نفر که دو نفر آنها با هم برادرند در یک ردیف می‌ایستند،
 الف) به چند طریق دو برادر می‌توانند در کنار هم باشند؟
 ب) به چند طریق دو برادر می‌توانند در اول و آخر صف واقع شوند؟

۹ با نقاط روی شکل،

- الف) چند بردار می‌توان رسم کرد؟
 ب) چند مثلث می‌توان رسم کرد که B یک رأس آن باشد؟



- ۱۰ پنج دانش آموز پایه دوازدهم و چهار دانش آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند در یک ردیف کنار هم قرار بگیرند به طوری که دانش آموزان پایه دوازدهم کنار هم و دانش آموزان پایه یازدهم کنار هم باشند؟

۱۱ در هر یک از روابط زیر مقدار n را به دست آورید.

الف) $(n-4)! = 24$	ب) $\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6}$	پ) $p(n, 3) = 2p(n-1, 3)$
ت) $C(n, n-2) = 6$	ث) $C(n, 2) + p(n, 1) = 15$	

- ۱۲ به چند طریق می‌توان از بین ۳ دانش آموز، ۵ دانشجو و ۴ کارمند، کمیته‌ای سه نفری تشکیل داد به طوری که افراد انتخاب شده:
- الف) دارای شغل‌های متمایز باشند.
 ب) دو نفر دانش آموز باشند.
 پ) حداقل دو نفر دانش آموز باشند.
 ت) حداکثر دو نفر دانش آموز باشند.

۱۳ از دانش آموزان یک کلاس ۲۵ نفره پایه دوازدهم رشته علوم انسانی، به چند طریق می توان ۳ نفر را برای فعالیت فوق برنامه مدرسه انتخاب نمود به طوری که یک نفر مجری برنامه، یک نفر مسئول گروه نمایش و یک نفر مسئول گروه سرود شود؟

۱۴ به چند طریق می توان ۳ کتاب از ۵ کتاب سال یازدهم و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوازدهم را در یک قفسه چید؟

۱۵ بین شهرهای A و B ، چهار جاده دو طرفه و بین شهرهای B و C ، سه جاده دو طرفه موجود است، به چند طریق می توان به کمک این جاده ها از شهر A به شهر C ، به کمک گذشتن از شهر B ، سفر کرد؟

۱۶ با حروف کلمه «زیستگاه» و بدون تکرار حروف،

(الف) چند کلمه ۷ حرفی می توان نوشت؟

(ب) چند کلمه ۷ حرفی می توان نوشت که به حرف «ه» ختم شود؟

(پ) چند کلمه ۷ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف «الف» و «ه» کنار هم قرار بگیرند؟

(ت) چند کلمه ۷ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه «زیست» چهار حرف اول باشند؟

(ث) چند کلمه ۷ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه «زیست» کنار هم باشند؟

(ج) چند کلمه ۷ حرفی می توان نوشت که با حرف نقطه دار شروع شوند؟

(چ) چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت که حرف اول آنها نقطه دار نباشد؟

(ح) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که به «گاه» ختم شوند؟

۱۷ مسئله ای طرح کنید که پاسخ آن برابر باشد با :

$$\text{الف) } 3^2 + 2^3 \quad \text{ب) } \binom{5}{3} \times \binom{4}{2} \quad \text{پ) } \binom{5}{3} + \binom{4}{2}$$

شمارش

اهداف درس اول

- ۱ آشنایی با برخی روش‌های شمارش
- ۲ آشنایی با مفاهیم اصل جمع و اصل ضرب و به‌کارگیری آنها در حل مسائل
- ۳ آشنایی با نماد فاکتوریل و توانایی محاسبه مسائل شامل آن
- ۴ به‌کارگیری اصل ضرب برای رسیدن به مفهوم جایگشت
- ۵ آشنایی با مفهوم جایگشت و به‌کارگیری آن در حل مسائل
- ۶ به‌کارگیری اصل ضرب برای رسیدن به مفهوم تبدیل
- ۷ آشنایی با مفهوم تبدیل و به‌کارگیری آن در حل مسائل
- ۸ به‌کارگیری اصل ضرب و مفهوم تبدیل برای رسیدن به مفهوم ترکیب
- ۹ آشنایی با مفهوم ترکیب و به‌کارگیری آن در حل مسائل
- ۱۰ توانایی طرح مسائلی که پاسخ آنها با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب است.

روش تدریس

از حوزه ترکیبیات، «شمارش» به عنوان یکی از مباحث مهم ترکیبیاتی محسوب می‌شود. یکی از مسائلی که ترکیبیات را از دیگر شاخه‌های ریاضی متمایز می‌کند این است که آموختن آن نیاز به اطلاعات خاصی از ریاضیات ندارد و ماهیت اکثر مسائل ترکیبیاتی، به‌گونه‌ای است که دانش‌آموزان، در سطوح مختلفی از دانش ریاضی، امکان اقدام به حل آن را دارند. تنوع مسئله‌های شمارشی، بسیار زیاد است و دانش‌آموزان در دوره اول متوسطه تا حدودی با مسئله‌های شمارشی آشنا شدند.

موضوع این درس، معرفی برخی ابزارها برای شمارش است، بدون اینکه نیاز به شمردن تک‌تک اشیاء باشد و این ابزارها اصل جمع، اصل ضرب، جایگشت، تبدیل و ترکیب می‌باشند. در صفحه ۲، ورود به مطلب با فعالیتی آغاز می‌شود. بهتر است در ابتدای تدریس برای ایجاد انگیزه و علاقه‌مند نمودن دانش‌آموزان به موضوع درس برای یادگیری، سؤال کاربردی فعالیت کتاب که انتخاب کتاب‌های مختلف از کتابخانه مدرسه است، در کلاس مطرح شده و با روش پرسش و پاسخ به گفت‌وگو پرداخته شود و سپس دانش‌آموزان با تکمیل فعالیت کتاب، مفهوم اصل جمع را بهتر متوجه می‌شوند.

پس از فعالیت، تعریف اصل جمع گفته شده و در این تعریف بیان شد که اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است، یعنی اگر کاری را بتوان به K روش انجام داد، به طوری که در روش اول m_1 انتخاب و در روش دوم m_2 انتخاب و ... و در روش k ام m_K انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر $m_1 + m_2 + \dots + m_K$ روش وجود دارد. مثالی در صفحه ۳ برای درک این موضوع مطرح شده است.

فعالیت صفحه ۳، سؤالی کاربردی است و برای اینکه مسئله ساده تر حل شود از نمودار درختی برای نشان دادن تعداد حالات ممکن برای انجام کار استفاده شده است که دو مرحله ای بودن انجام کار را نشان می دهد. دانش آموزان پس از تکمیل فعالیت، با روش دیگری برای شمردن که اصل ضرب نام دارد، آشنا می شوند. سپس تعریف اصل ضرب گفته شده و در این تعریف بیان شد که اصل ضرب قابل تعمیم به بیشتر از دو مرحله است، یعنی اگر انجام کاری شامل k مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله اول m_1 روش و برای انجام مرحله دوم m_2 روش و ... و برای انجام مرحله k ام m_K روش وجود داشته باشد، (با فرض اینکه در هر مرحله انتخاب تمام روش های آن مرحله ممکن باشد)، برای انجام کار مورد نظر $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_K$ روش وجود دارد. مثالی برای درک این موضوع در ادامه درس مطرح شده است.

کارد در کلاس صفحه ۴، مسئله ای از دنیای واقعی و قابل درک برای دانش آموزان است. این مسئله ترکیبی از اصل جمع و اصل ضرب می باشد. هدف از این کارد در کلاس این است که دانش آموزان به تفاوت اصل جمع و اصل ضرب پی برده و همچنین فرق حرف «و» با حرف «یا» را در مسئله تشخیص دهند، یعنی اگر در سؤال گفته شود کار اول یا کار دوم یا ... انجام می شود، برای حل سؤال از اصل جمع و اگر در سؤال گفته شود کار اول و کار دوم و ... انجام می شود، برای حل سؤال از اصل ضرب استفاده کنند.

در صفحه ۵، نماد فاکتوریل معرفی می شود و برای تسلط نسبی دانش آموزان به استفاده از این نماد، چند مثال مطرح شده است. سپس فعالیتی مطرح شده که با استفاده از اصل ضرب، به مفهوم جایگشت n شیء متمایز می رسد. جایگشت در قلمرو ترکیباتی آن به معنی مرتب سازی یا تغییر ترتیب اعضای یک مجموعه است. ممکن است این چیدمان خطی یا غیرخطی باشد که در هر مورد، تعداد طرق چیدن اعضا اهمیت دارد. قابل توجه است که در این درس، جایگشت خطی مدنظر است. اگر n شیء متمایز در کنار یکدیگر در یک ردیف (صف) قرار گیرند، جایگشت خطی می باشد.

برای حل مسائلی مانند سؤال کارد در کلاس صفحه ۶، بهتر است مانند کتاب با رسم مربع ها یا خط هایی، موقعیت هر رقم را برای دانش آموزان مشخص نمود و تعداد حالات ممکن انتخاب هر رقم را در آن نوشت و سپس اعداد مندرج در آنها را در یکدیگر ضرب کرد. نکته ای که در این گونه سؤالات قابل توجه می باشد محدودیتی است که عدد صفر ایجاد می کند، بهتر است ابتدا موقعیت مربع متناظر آن بررسی شده و سپس به سایر پرداخته شود. همان طور که در قسمت ۱ این کار در کلاس اشاره شده است، رقم اول از سمت چپ نباید صفر باشد، بهتر است برای درک بهتر دانش آموزان مثالی زده شود مثلاً عدد ۳۲۱۵. عددی پنج رقمی نیست.

به دانش‌آموزان تأکید شود که برای حل سؤالات شمارشی، به متن سؤال دقت داشته باشند. چون این سؤالات به ظاهر شباهت‌هایی دارند ولی اگر به متن سؤال توجه کنند متوجه شرط‌هایی که در آن قید شده، می‌شوند. در قسمت‌های دیگر این کار در کلاس ساخت اعداد ۵ رقمی فرد یا زوج خواسته شده، در این صورت ابتدا شرایط خواسته شده را ایجاد می‌کنیم، یعنی برای زوج یا فرد بودن اعداد، ابتدا باید شرایط رقم یکان را مشخص کرده و سپس شرایط اولین رقم سمت چپ و پس از آن تعداد حالات ارقام میانی شمرده می‌شود.

در صفحه ۷، فعالیتی مطرح می‌شود که با استفاده از اصل ضرب، مفهوم تبدیل یا جایگشت r شیء از n شیء را بیان می‌کند و فرمول مربوط به آن معرفی می‌شود. هدف از این فعالیت این است که دانش‌آموزان شباهت جایگشت و تبدیل را درک کنند.

در صفحه ۸، رابطه تبدیل یا جایگشت r شیء از n شیء با اثباتش بیان شده است، تا سطح مطلوبی از یادگیری در دانش‌آموزان ایجاد گردد و بتوانند نحوه به کارگیری اصل ضرب را در رسیدن به رابطه تبدیل درک کنند. همچنین تأکید می‌شود که در تبدیل، جابه‌جایی یا ترتیب انتخاب مهم است.

فعالیت صفحه ۸، برای بیان مفهوم ترکیب مطرح شده و حالت‌های متفاوت این سؤال که تشکیل زیرمجموعه‌های سه عضوی است، در جدول صفحه ۹ نشان داده می‌شود.

جدول صفحه ۹ نشان می‌دهد که در هر ستون، جابه‌جایی اعضای مجموعه‌هایی اثر است و ترتیب انتخاب در آن مهم نیست. همچنین نشان می‌دهد که با استفاده از اصل ضرب و رابطه تبدیل، رابطه ترکیب به دست می‌آید و فرمول مربوط به آن معرفی شده و تأکید می‌شود که در ترکیب، جابه‌جایی یا ترتیب انتخاب مهم نیست. در کاردر کلاس صفحه ۹، سؤالات متنوعی مطرح شده و هدف این است که دانش‌آموزان تفاوت دو مفهوم تبدیل و ترکیب را درک نمایند و نیز تشخیص دهند که برای حل مسائل از کدام فنون شمارشی می‌توانند استفاده کنند.

توصیه‌های آموزشی

■ برای پرورش «تفکر ترکیبیاتی»^۱ در دانش‌آموزان، بهتر است بعضی از مسائل را به‌طور شهودی برای آنان بیان نمود. به عنوان مثال، تعداد طرق نشستن سه دانش‌آموز روی سه صندلی خالی، که در واقع چیزی که مهم است، وضعیت افراد نسبت به یکدیگر می‌باشد، که برای نفر اول سه انتخاب، برای نفر دوم دو انتخاب و برای نفر سوم یک انتخاب وجود دارد. وقتی دانش‌آموزان مفهوم جایگشت را به‌طور شهودی می‌بینند، آن را یاد گرفته و می‌توانند در حل مسائل متنوع به کار گیرند یا مانند فعالیت صفحه ۸ کتاب که تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی از مجموعه چهار عضوی، به‌طور شهودی در

۱. در آمار بیاز، از کار با مفاهیم «تبدیل» و «ترکیب» به معنی «تفکر ترکیبیاتی» نام برده شده است.

جدول نشان داده شده است و کاملاً برای دانش‌آموزان قابل درک خواهد بود.

■ بهتر است در ابتدای درس، هر یک از دانش‌آموزان به‌طور انفرادی، با فعالیت مطرح شده در کتاب درگیر شوند و نظرات خود را در کلاس بیان کنند و با بازتاب بر نظرات یکدیگر، بحث‌ها را پیش ببرند. در این زمان، معلم نقش هدایت‌کننده بحث‌ها را خواهد داشت. سعی شود از ابراز نظر صریح خودداری گردد، مگر زمانی که یک راهنمایی مناسب بیان شود. جهت‌گیری بحث‌های کلاسی به‌گونه‌ای باشد تا زمینه را برای تعمیم مسئله یا موضوع به حالت‌های کلی‌تر فراهم کند. به این شکل، دانش‌آموزان برای ورود به مباحث بعدی، آماده می‌شوند و در آخر می‌توانند ارتباط مفهومی بین مباحث مختلف ترکیباتی را بیابند.

■ از طرح مسائل سخت و پیچیده پرهیز شود. می‌توان مسائل متنوع دیگری در محدوده مطالب کتاب درسی و در همان چهارچوب مطرح نمود تا به درک بهتر دانش‌آموزان از درس کمک نماید.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان

ماهیت اشتباهات دانش‌آموزان در حل مسائل ترکیباتی، هنگام رویارویی با مسئله‌های به ظاهر یکسان، نشانه بدفهمی آنان می‌باشد. بعضی دانش‌آموزان فقط فرمول حفظ می‌کنند، بدون اینکه درک درستی از مفاهیم و قواعد آن داشته باشند.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان از قبیل استفاده نادرست از نمودار درختی، تکرارهای نادرست، عدم درک درست از مفاهیم جایگشت، تبدیل و ترکیب و به کارگیری نادرست از آنها در حل مسائل می‌باشد.

بهتر است قبل از به کارگیری قواعد ترکیباتی در حل مسائل متنوع، این قواعد را با هم مقایسه کنند و تفاوت آنها را تشخیص دهند.

حل تمرینات درس اول (صفحه ۱۰ کتاب)

۱ می‌خواهیم از بین ۱۰ دانش‌آموز کلاس دهم و ۱۱ دانش‌آموز کلاس یازدهم و ۱۲ دانش‌آموز کلاس دوازدهم یک دانش‌آموز انتخاب کنیم؛ به چند طریق می‌توانیم این دانش‌آموز را انتخاب کنیم؟

$$10 + 11 + 12 = 33 \rightarrow \binom{33}{1} = 33$$

۲ بین پنج شهر A ، B ، C ، D و E مطابق شکل صفحه بعد راه‌هایی وجود دارد که همه دوطرفه‌اند. مشخص کنید به چند طریق می‌توان:

الف) از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟

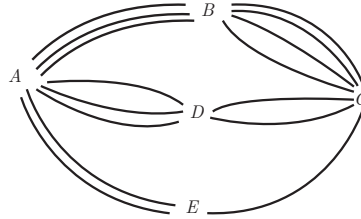
ب) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟

پ) از شهر D بدون عبور از شهر E به شهر A مسافرت کرد؟

الف) $3 \times 4 + 3 \times 2 + 2 \times 1 = 20$

ب) $12 \times 12 = 144$

پ) $3 + 2 \times 4 \times 3 = 27$



۳ با حروف کلمه «ولایت» و بدون تکرار حروف: (با معنی یا بی معنی)

الف) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت؟

ب) چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟

پ) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که با «و» شروع و به «ل» ختم شوند؟

الف) $5! = 120$

ب) $1 \times 3 \times 4 = 12$

پ) $1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 1 = 6$

۴ یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم فوتبال، به صورت رفت و برگشت انجام می شود. اگر همه تیم ها

با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟

$$p(10, 2) = \frac{10!}{8!} = 90$$

۵ یک کارخانه خودروسازی خودروهایی در ۷ رنگ، با ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلو داشبورد

تولید می کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟

$$7 \times 2 \times 3 = 42$$

۶ مجموعه $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است؛

الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد ۵ رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می توان ساخت؟

ب) چند عدد ۵ رقمی و بزرگ تر از ۸۰۰۰۰ می توان نوشت؟

ب) مجموعه A چند زیر مجموعه سه عضوی دارد؟

ت) مجموعه A چند زیر مجموعه سه عضوی و شامل رقم ۸ دارد؟

الف) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 4 = 480$

ب) $2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 240$

پ) $\binom{6}{3} = 20$

ت) $\binom{5}{2} = 10$

چون زیر مجموعه سه عضوی شامل رقم ۸ می باشد، پس دو عضو باقی مانده زیر مجموعه از پنج رقم دیگر مجموعه A انتخاب می شود.

۷ روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید :

الف) با این دوازده نقطه، چه تعداد مثلث می توان تشکیل داد؟

ب) چه تعداد وتر می توان تشکیل داد؟

الف) $\binom{12}{3} = 220$

ب) $\binom{12}{2} = 66$

۸ می خواهیم از بین ۵ دانش آموز پایه یازدهم و ۶ دانش آموز پایه دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم

۶ نفره والیبال تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می توانیم این تیم را تشکیل بدهیم؛ هرگاه بخواهیم :

الف) به تعداد مساوی دانش آموز پایه یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.

ب) کاپیتان تیم فرد مشخصی از پایه دوازدهم باشد.

پ) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش آموز پایه دوازدهم باشند.

ت) فقط ۲ نفر از اعضای تیم از پایه یازدهم باشند.

الف) $\binom{5}{3} \times \binom{6}{3} = 200$

یک نفر از پایه دوازدهم به عنوان کاپیتان تیم انتخاب شده است، پس از دانش آموزان پایه دوازدهم ۵ نفر باقی می ماند.

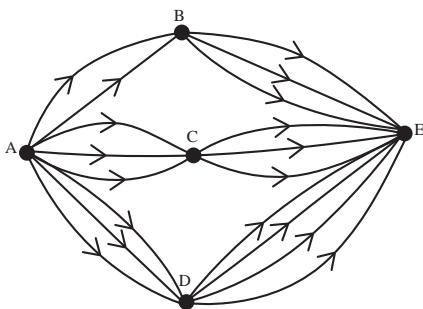
ب) $5 + 5 = 10 \rightarrow \binom{10}{5} = 252$

$$\text{پ)} \quad \binom{6}{4} \times \binom{5}{2} + \binom{6}{5} \times \binom{5}{1} + \binom{6}{6} = 181$$

$$\text{ت)} \quad \binom{5}{2} + \binom{6}{4} = 150$$

۹ مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت $(2 \times 3 + 3 \times 4 + 3^2)$ باشد.

اگر شکل زیر نشان دهنده جاده‌های بین شهرهای A, B, C, D, E باشد و همه جاده‌ها یک طرفه فرض شوند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت؟



۱۰ تعداد راه‌ها یا جاده‌ها از شهر B به C و از شهر E به A را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر

بتوان به 20 طریق از شهر A به شهر D سفر کرد.

$$2 \times 4 \times 2 + 4 \times 1 = 20$$

حالت ۱- از B به C چهارراه و از E به A یک راه باشد :

$$2 \times 3 \times 2 + 4 \times 2 = 20$$

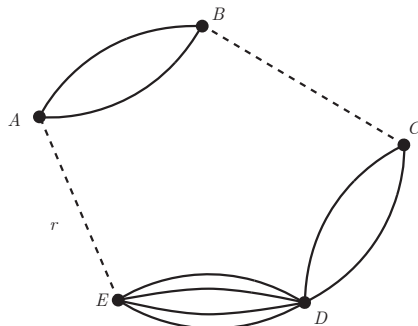
حالت ۲- از B به C سه راه و از E به A دو راه باشد :

$$2 \times 2 \times 2 + 4 \times 3 = 20$$

حالت ۳- از B به C دو راه و از E به A سه راه باشد :

$$2 \times 1 \times 2 + 4 \times 4 = 20$$

حالت ۴- از B به C یک راه و از E به A چهار راه باشد :



تاریخچه و مفهوم احتمال

در واقع شانس و عدم قطعیت تاریخچه‌ای به درازای تمدن بشریت دارد. گفته می‌شود که شواهدی از بازی‌های شانس در ۳۵۰۰ سال قبل از میلاد به دست آمده در مصر و... و تاسی شبیه تاس کنونی در مصر به دست آمده است. متأسفانه بازی‌های شانس و تاس نقش مهمی در توسعه تئوری احتمال داشته است. تئوری احتمال به‌طور ریاضی (توسط پاسکال و فرما) در قرن ۱۷ آغاز شد که سعی در حل و به‌دست آوردن احتمال دقیق در برخی مسائل بازی‌های شانس به‌طور ریاضی داشتند. البته قبل از آنها نیز کاردان و گالیله (قرن ۱۶) به حل چنین مسائلی به‌طور عددی پرداخته‌اند.

از قرن هفدهم مرتباً تئوری احتمال توسعه یافت و در رشته‌های مختلف به‌کار گرفته شد. امروزه احتمال در اغلب زمینه‌های مهندسی و علوم مدیریت ابزار مهمی است و حتی استفاده از آن در پزشکی، رفتارشناسی، حقوق و... مطرح است.

با وجود کاربرد وسیع احتمال و علی‌رغم اینکه چنین مفاهیمی را دائماً در زندگی روزمره استفاده می‌کنیم، تعریف علمی یگانه‌ای برای احتمال وجود ندارد و در طول تاریخ رشد تئوری احتمال، تعاریف مختلفی از احتمال شده است که هریک بعداً مورد انتقاد دیگران قرار گرفته است.

تعریف کلاسیک احتمال

(توسط پاسکال در قرن ۱۷): اگر در یک آزمایش تصادفی تعداد کل نتایج ممکنه N باشد، احتمال واقعه A عبارت است از:

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

تعریف فراوانی نسبی (تعریف آماری)

این تعریف اولین بار در قرن جاری (۱۹۵۷) توسط Von Mises برای اصلاح تعریف کلاسیک معرفی شد. اگر آزمایش تصادفی را n بار انجام دهیم، برای n بزرگ داریم:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$$

تعریف ذهنی Subjective

نگرش به احتمال به عنوان معیاری از میزان اعتقاد به یک امر است. مثلاً وقتی می‌گوییم فلان متهم به احتمال ۷۰٪ مجرم است، در اینجا احتمال بیانگر میزان اعتقاد ما به حقیقت یک امر می‌باشد. البته این بسیار به قضاوت کننده بستگی دارد و ممکن است با همان دلایل و مدارک شخص دیگری بگوید به احتمال ۹۰٪ مجرم است.

همه تعاریفی که تا اینجا مطرح شده اشکالاتی دارند که از آنها به عنوان مبنای یک تئوری ریاضی نمی‌توان استفاده کرد.

تعریف اصولی Axiomatic Definition

این تعریف توسط کلموگروف ارائه شد. البته سال‌ها طول کشید تا مورد توجه قرار گیرد. در اینجا احتمال بر مبنای تئوری اندازه ارائه می‌شود و به هر واقعه عددی که احتمال آن واقعه نامیده می‌شود و باید در اصول موضوعه سه گانه صدق کند نسبت داده می‌شود. اینکه چه عددی بر هر واقعه نسبت داده شود با فرض ارضای شرایط اصول موضوعه دلخواه است و ممکن است تطابق کامل با واقعیت نداشته باشد اما با فرض صحت این احتمالات مفروض برای واقعه‌ها، با استفاده از تئوری احتمال می‌توانیم احتمال وقایع دیگر مورد نظرمان را به دست آوریم.

احتمال

درس دوم

اهداف درس دوم

- ۱ یادآوری و تکمیل مفاهیم مربوط به آزمایش تصادفی، فضای نمونه‌ای و پیشامدهای تصادفی
- ۲ مشخص کردن پیشامدهای تصادفی در حالت‌های مختلف و یافتن تعداد اعضای آنها با ابزارهای شمارش
- ۳ آشنا شدن دانش‌آموزان با جبر پیشامدها و اعمال روی پیشامدها و استفاده از آنها در مسائل مربوط به احتمال
- ۴ استفاده از جایگشت، تبدیل و ترکیب در حل مسائل احتمال

روش تدریس

این درس با معرفی آزمایش تصادفی و قطعی و تمایز بین آنها به عنوان مقدمه آغاز شده است. سپس با معرفی و تکمیل مفاهیم اصطلاحات احتمال زمینه‌های لازم برای حل مسائل احتمال که در زندگی روزمره دانش‌آموز می‌تواند با آنها روبه‌رو شود فراهم می‌گردد.

فعالیت صفحه ۱۲

در این فعالیت با تأکید بر قطعی نبودن برخی از پدیده‌ها زمینه لازم برای پدیده‌های تصادفی (آزمایش تصادفی) را فراهم می‌کنیم. در قسمت آخر این فعالیت از دانش‌آموز می‌خواهیم چند آزمایش تصادفی و چند آزمایش قطعی مثال بزند.

آزمایش تصادفی

- انداختن یک لیوان در کلاس به منظور مشاهده شکسته شدن یا نشدن آن
- پرتاب سکه به منظور مشاهده قسمت روشده
- تولد فرزند به منظور مشاهده جنسیت آن

آزمایش قطعی

- انداختن یک میخ فولادی در کلاس به منظور مشاهده شکسته شدن یا نشدن آن
- پرتاب سکه‌ای که دو طرف آن یک نقش داشته باشد.
- بیرون آوردن مهره سفید از کیسه‌ای که فقط شامل مهره‌های سفید است.

کار در کلاس صفحه ۱۳

این کار در کلاس به منظور درک و تثبیت دو مفهوم آزمایش تصادفی و آزمایش قطعی طراحی شده است.

۱ کدام یک از پدیده‌های زیر تصادفی و کدام یک قطعی است؟ چرا؟

(الف) وجود دانش‌آموزی که سن او بیشتر از ده سال باشد، در کلاس دوازدهم.

پاسخ: آزمایش قطعی زیرا با توجه به سن شروع تحصیل در مدارس ایران هیچ کلاس درسی پیدا نمی‌شود که در پایه دوازدهم دانش‌آموز بیشتر از ده سال نداشته باشد.

(ب) در ابتدای مسابقه فوتبال، پرتاب سکه‌ای که در یک طرف آن عدد ۱ و در طرف دیگرش عدد ۲ حک شده باشد؛

پاسخ: آزمایش تصادفی زیرا نتیجه از قبل مشخص نیست.

(پ) مشاهده دو مهره سبز، پس از خارج کردن دو مهره از جعبه‌ای که در آن ۷ مهره سبز وجود دارد؛

پاسخ: آزمایش قطعی زیرا بجز مهره سفید رنگ دیگری در جعبه نیست.

(ت) پیش‌بینی نتیجه بازی فوتبال بین دو تیم، قبل از بازی؛

پاسخ: آزمایش تصادفی زیرا نتیجه از قبل مشخص نیست.

(ث) در یک بازی بین دو نفر، سکه‌ای پرتاب می‌شود و به دنبال آن تاسی انداخته می‌شود. اگر شخصی

سکه‌اش رو و تاسش زوج بیاید، برنده است. آیا قبل از بازی می‌توان نفر برنده را مشخص کرد؟

پاسخ: آزمایش تصادفی؛ زیرا مشاهده برنده از قبل مشخص نیست.

۲ از ۳ مداد و ۵ خودکاری که در یک جعبه قرار دارند، به طور تصادفی یکی از آنها را خارج می‌کنیم.

(الف) آیا مجموعه دوعضوی {خودکار، مداد} می‌تواند همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را

نشان دهد؟

پاسخ: خیر، اما اگر منظور مشاهده جنسیت شیء خارج شده باشد پاسخ مثبت است.

(ب) به نظر شما چگونه می‌توان همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را مشخص کرد؟

پاسخ: در ادامه این کار در کلاس فضای نمونه آزمایش تصادفی به عنوان مجموعه همه حالت‌های ممکن

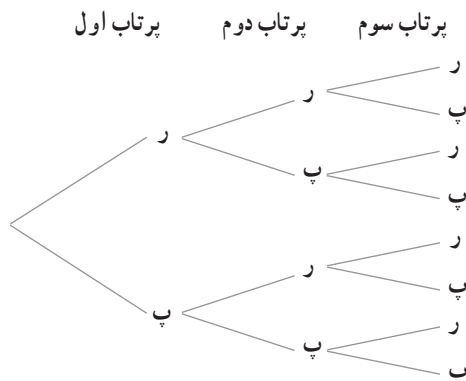
در آزمایش تصادفی معرفی می‌گردد.

فعالیت صفحه ۱۴

در این فعالیت دانش آموز با فضای نمونه‌ای دوبعدی و سه بعدی آشنا می شود.

۱ پرتاب دو سکه باهم.

۲ پرتاب سه سکه باهم (پرتاب یک سکه سه بار)



$$S = \{(پ، پ، پ)، (ر، پ، پ)، (پ، ر، پ)، (پ، پ، ر)، (ر، ر، پ)، (پ، ر، ر)، (ر، پ، ر)، (ر، ر، ر)\}$$

۲ پرتاب یک تاس و یک سکه با هم.

$$S = \{(پ، ۶)، (پ، ۵)، (پ، ۴)، (پ، ۳)، (پ، ۲)، (پ، ۱)، (ر، ۶)، (ر، ۵)، (ر، ۴)، (ر، ۳)، (ر، ۲)، (ر، ۱)\}$$

کار در کلاس صفحه ۱۴

۱ این کار در کلاس تمرینی است برای تسلط دانش آموز در تشخیص فضاهای نمونه‌ای با بیش از یک بعد.

۲ سه دوست با نام‌های علی، پارسا و محمد در یک ردیف کنار هم می نشینند. فضای نمونه این آزمایش

تصادفی را مشخص کنید. چگونه می توان تعداد همه برآمدهای این آزمایش تصادفی را بدون شمردن،

مشخص کرد؟

$$\text{پاسخ: } ۳! = ۶$$

۲ در کیسه‌ای ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۴ مهره سبز وجود دارد. به طور تصادفی سه مهره را یک جا

از کیسه خارج می کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه این پدیده تصادفی را مشخص کنید.

پاسخ:

$$n(s) = \binom{11}{3}$$

پیشامد

در ادامه درس پیشامدهای یک فضای نمونه (در یک آزمایش تصادفی) را به عنوان زیرمجموعه‌های

فضای نمونه معرفی می‌کنیم. توجه داشته باشید که دانش‌آموزان این رشته تحصیلی بعد از پایه نهم دیگر ارتباطی با مفهوم مجموعه‌ها و زیرمجموعه نداشته‌اند، بنابراین یادآوری این مفاهیم ضروری است.

کار در کلاس صفحه ۱۵

۱ سکه‌ای را یک بار پرتاب می‌کنیم؛ می‌دانیم $\{پ، ر\} = S$ تمام پیشامدهای ممکن برای این فضای نمونه را بنویسید.

پاسخ: $\{پ، ر\}$ و $\{\}$ و $\{پ\}$ و $\{ر\}$

۲ مریم، ملیکا و سوگند پول‌هایشان را روی هم گذاشتند و یک رمان دربارهٔ دفاع مقدس از نمایشگاه کتاب مدرسه خریدند. سپس، اسامی خود را روی سه کارت متمایز نوشتند و داخل کیسه‌ای انداختند. آنها باهم قرار گذاشتند که یک کارت را به‌طور تصادفی از کیسه خارج کنند و نام هرکسی که روی آن کارت بود، ابتدا کتاب را به منزل ببرد و مطالعه کند. فضای نمونهٔ این پدیدهٔ تصادفی را بنویسید. سپس، تمام زیرمجموعه‌های یک عضوی S را مشخص کنید. اگر قرار باشد دو نفر از آنها بعد از مطالعهٔ کتاب، باهم خلاصهٔ آن را در کلاس ارائه کنند، پیشامدهای ممکن را بنویسید.

پاسخ: $S = \{\text{مریم، ملیکا و سوگند}\}$

$\{\text{مریم}\}$ ، $\{\text{ملیکا}\}$ ، $\{\text{سوگند}\}$: زیرمجموعه‌های یک عضوی S

اگر قرار باشد دو نفر از آنها با هم کتاب را خلاصه کنند، تمام زیرمجموعهٔ دو عضوی S را می‌نویسیم که جواب ۳ تا است.

۳ تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر پس از نشستن تاس روی زمین، عدد ۲ نمایان شود، به‌نظر شما در این آزمایش تصادفی کدام یک از پیشامدهای زیر رخ داده‌اند؟

$$A = \{۳، ۲، ۵\} \quad B = \{۲\} \quad C = \{۲، ۴، ۶\}$$

پاسخ: هر سه

تذکر

برای درک بهتر این مفهوم «برای اینکه یک پیشامد رخ دهد، کافی است یکی از برآمدهای آن در آزمایش تصادفی به وقوع پیوندد.» کافیست به سؤال به‌صورت زیر دقت شود.

تاسی را پرتاب می‌کنیم. پیشامدهای A ، B و C را در نظر می‌گیریم. اگر پس از نشستن تاس روی زمین، عدد ۲ نمایان شود کدام یک از پیشامدها رخ داده‌اند؟

۴ دو تاس را پرتاب می‌کنیم؛ پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) اعداد روشده از دو تاس مانند هم باشد.

پاسخ: $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

ب) مجموع اعداد برآمده از دو تاس برابر با ۷ باشد.

پاسخ: $\{(6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5), (1,6)\}$

ب) مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۱۳ باشد.

پاسخ: $\{\}$

ت) حاصل ضرب اعداد برآمده از دو تاس کمتر از ۳۷ باشد.

پاسخ: S

۵ در یک برنامه کوهنوردی، ۵ دانش آموز سال دهم، ۶ دانش آموز سال یازدهم و ۴ دانش آموز سال

دوازدهم شرکت دارند. قرار است یک گروه پیشتاز ۳ نفره از بین آنها برای صعود انتخاب کنیم.

تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) سه نفر دانش آموز پیشتاز از سه پایه مختلف باشند.

$$\text{پاسخ: } \binom{5}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{4}{1} = 5 \times 6 \times 4 = 120$$

ب) حداقل ۲ دانش آموز در این گروه پیشتاز از دانش آموزان سال یازدهم باشند.

$$\text{پاسخ: } \binom{6}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{6}{1} \times \binom{4}{1} + \binom{6}{3} = 75 + 60 + 20 = 155$$

اعمال روی پیشامدها

در ادامه با استفاده از اعمال روی مجموعه‌ها رخ دادن دو پیشامد (مثلاً A و B) به صورت زیر بیان می‌شوند:

$A \cup B$ حداقل یکی از پیشامدهای B یا A رخ دهند:

$A \cap B$ هر دو پیشامدهای B و A با هم رخ دهند:

$A - B$ فقط پیشامد A رخ دهد:

A' پیشامد A رخ ندهد:

در ادامه دو پیشامد ناسازگار به عنوان دو پیشامدی که اشتراک آنها تهی است تعریف می‌شود.

کار در کلاس صفحه ۱۸

۱ تاسی را پرتاب می‌کنیم؛ هریک از پیشامدهای زیر را با اعضا مشخص کنید.

پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج و اول باشد. $\{2\}$

■ پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج یا اول باشد. $\{۲,۴,۶,۳,۵\}$

■ پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج باشد ولی اول نباشد. $\{۴,۶\}$

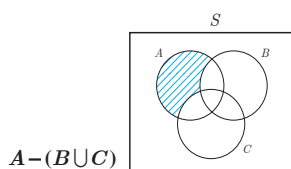
■ پیشامد اینکه عدد رو آمده اول باشد ولی زوج نباشد. $\{۳,۵\}$

■ پیشامد اینکه عدد رو آمده اول نباشد. $\{۱,۴,۶\}$

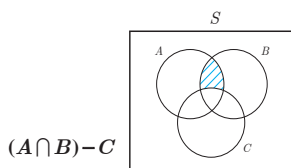
۲ فرض کنید A ، B ، و C سه پیشامد در فضای نمونه S باشند. هر یک از پیشامدهای زیر را روی نمودار

ون مانند نمونه سایه بزنید. سپس، عبارت مجموعه‌ای مربوط به هر پیشامد را بنویسید.

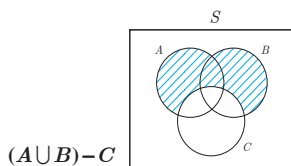
■ فقط پیشامد A رخ دهد و پیشامدهای B و C رخ ندهد.



■ پیشامدهای A و B رخ دهند ولی C رخ ندهد.



■ پیشامدهای A یا B رخ دهند ولی C رخ ندهد.



۳ خانواده‌ای صاحب ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

■ پیشامد A اینکه همه فرزندان خانواده دارای یک جنسیت باشند. $A = \{(د,د,د), (پ,پ,پ)\}$

■ پیشامد B اینکه دو فرزند خانواده پسر و یک فرزند دختر باشند.

$B = \{(پ,د,د), (د,پ,پ), (پ,پ,د)\}$

■ پیشامد C اینکه حداقل دو فرزند این خانواده دختر باشند.

$C = \{(د,د,د), (د,د,پ), (د,پ,د), (پ,د,د)\}$

باتوجه به پیشامدهای A ، B ، و C به سؤالات زیر پاسخ دهید:

■ آیا پیشامدهای A و B ناسازگارند؟ بله

■ آیا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟ خیر

■ آیا پیشامدهای C و B ناسازگارند؟ بله

۴ دو پیشامد ناسازگار از یک آزمایش تصادفی را بنویسید.

پاسخ: در پرتاب تاس پیشامد آمدن عدد زوج و پیشامد آمدن عدد فرد دو پیشامد ناسازگارند.

فعالیت صفحه ۱۹

۱ چنان که پیشامد A نشدنی باشد، یعنی $A = \emptyset$ در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید.

$$P(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0 \quad \text{پاسخ:}$$

۲ در صورتی که پیشامد A حتمی باشد، یعنی $A = S$ در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)} = 1 \quad \text{پاسخ:}$$

۳ در صورتی که $A \subseteq B$ در این صورت جاهای خالی را پر کنید.

$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq \boxed{n(B)} \Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)} \leq \boxed{\frac{n(B)}{n(S)}} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

۴ با توجه به ۱، ۲ و ۳، اگر A پیشامد دلخواهی در فضای نمونه S باشد، در این صورت داریم:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

۵ هرگاه A و B دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونه S باشند، با پرکردن جاهای خالی مقدار $P(A \cup B)$

را طبق اصل جمع پیدا کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

کار در کلاس صفحه ۲۰

۱ یک سکه و یک تاس را باهم پرتاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

(الف) تاس زوج بیاید $\cdot \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

(ب) سکه پشت بیاید $\cdot \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

(پ) تاس زوج یا سکه رو بیاید $\cdot \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

(ت) تاس فرد و سکه پشت بیاید $\cdot \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

۲ یکی تاکسی دارای ۵ سر نشین است؛ مطلوب است محاسبه احتمال اینکه :

الف) هر پنج نفر آنها در ماه فروردین متولد شده باشند $\frac{1}{12^5}$.

ب) هر پنج نفر آنها در یک ماه از سال متولد شده باشند $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{12^5} = \frac{1}{12^4}$.

پ) تولد هیچ دوتای آنها در یک ماه نباشد $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{12^5} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{12^4}$.

۳ در یک بازی ۱۱ نفره، به هر شخصی یکی از شماره‌های ۲، ۳، ۴، ...، ۱۲ را نسبت می‌دهیم. سپس با پرتاب دو تاس و مجموع اعداد برآمده از آنها، نفر برنده مشخص می‌شود.

الف) احتمال برنده شدن چه شماره‌ای نسبت به بقیه بیشتر است؟ پاسخ: شخصی که عدد ۷ را انتخاب کرده است.

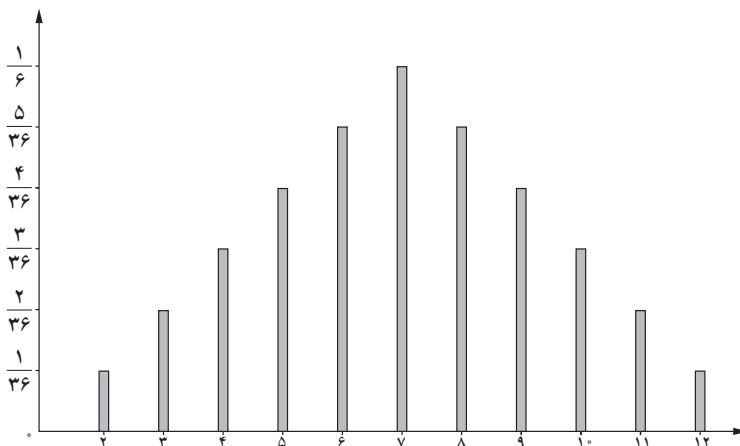
ب) احتمال برنده شدن کدام شماره‌ها از همه کمتر است؟

پاسخ: اشخاصی که عدد ۲ و ۱۲ را انتخاب کرده‌اند.

پ) آیا کسی که احتمال برنده شدنش کمتر است، ممکن است در این مسابقه برنده شود؟ چرا؟

پاسخ: بله، زیرا $\frac{1}{36}$ شانس دارد.

ت) دستگاه مختصاتی رسم کنید و روی محور افقی، مجموع اعداد برآمده از دو تاس و روی محور عمودی، احتمال متناظر با هر یک از آنها را بنویسید. سپس، نمودار میله‌ای را مطابق شکل زیر رسم کنید.



فعالیت صفحه ۲۲

این فعالیت برای آشنا کردن دانش‌آموز با فرمول $P(A') = 1 - P(A)$ است.

کار در کلاس صفحه ۲۳

این کار در کلاس فعالیتی برای تثبیت فرمول $P(A') = 1 - P(A)$ توسط دانش آموز است.

تمرین صفحه ۲۵

۱ کدام یک از پدیده‌های زیر آزمایش تصادفی و کدام یک آزمایش قطعی است؟
الف) نام ۲۰ دانش آموز را روی ۲۰ کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، به‌طور تصادفی یک کارت را بیرون می‌کشیم تا نام یکی از دانش آموزها استخراج شود.

پاسخ: آزمایش تصادفی

ب) مقداری آب را حرارت می‌دهیم تا به بخار تبدیل شود.

پاسخ: آزمایش قطعی

پ) نتیجه یک آزمون چهارجوابی، که نیمی از سؤالات آن را شانس پاسخ داده‌ایم.

پاسخ: آزمایش تصادفی

ت) در یک بازی ساده دو نفره، یکی از دو نفر مراحل زیر را انجام می‌دهد:
عددی را انتخاب می‌کند.

سه واحد به آن عدد می‌افزاید.

سپس حاصل را دو برابر می‌کند.

از عدد حاصل ۲ واحد کم می‌کند.

نتیجه به دست آمده را نصف می‌کند.

از حاصل به دست آمده، عدد اولیه را کم می‌کند.

در مرحله آخر، فرد دوم به جای شخص محاسبه کننده پاسخ را اعلام می‌کند.

پاسخ: آزمایش قطعی

۲ سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو ظاهر شد، آن گاه تاس را می‌ریزیم. در غیر این صورت، یک بار دیگر سکه را می‌اندازیم.

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

$$S = \{(ر، ۶)، (ر، ۵)، (ر، ۴)، (ر، ۳)، (ر، ۲)، (ر، ۱)، (پ، ۶)، (پ، ۵)، (پ، ۴)، (پ، ۳)، (پ، ۲)، (پ، ۱)\}$$

ب) پیشامد A را که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید، با اعضا مشخص کنید.

$$A = \{(ر، ۶)، (ر، ۴)، (ر، ۲)، (پ، ۶)، (پ، ۴)، (پ، ۲)\}$$

۳ هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن

کارت‌ها به‌طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم؛ مطلوب است تعیین :

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی $S = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, ۱۵, ۱۷, ۱۹\}$

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد $A = \{۳, ۹, ۱۵\}$

ب) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، مجذور کامل باشد $B = \{۱, ۹\}$

ت) پیشامدهای $A \cap B$ و $A - B$ را با اعضا مشخص کنید.

$$A \cap B = \{۹\}$$

$$A - B = \{۳, ۱۵\}$$

۴ برای هر یک از پیشامدهای زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.

الف) پیشامدهای A , B و C رخ دهد. $(A \cap B \cap C)$

ب) پیشامدهای A یا B یا C رخ دهد. $(A \cup B \cup C)$

۵ هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۲، ۳، ۴ و ۱ می‌توان نوشت، روی کارت‌هایی می‌نویسیم و

پس از مخلوط کردن کارت‌ها یک کارت را به‌طور تصادفی خارج می‌کنیم.

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

$$S = \{۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۲۱, ۲۲, ۲۳, ۲۴, ۳۱, ۳۲, ۳۳, ۳۴, ۴۱, ۴۲, ۴۳, ۴۴\}$$

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۶ باشد.

$$A = \{۱۲, ۲۴, ۴۲\}$$

پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد.

$$B = \{۱۱, ۱۳, ۲۳, ۳۱, ۴۱, ۴۳\}$$

۶ خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟

$$S = \{(د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د)\}$$

ب) پیشامد A که در آن هر سه فرزند از یک جنس باشند.

$$A = \{(د, د, د), (د, د, د), (د, د, د)\}$$

پ) پیشامد B که در آن فقط یک فرزند دختر باشد.

$$B = \{(پ, پ, د), (پ, د, پ), (د, پ, پ), (پ, پ, د), (پ, د, پ), (د, پ, پ)\}$$

ت) پیشامد C که در آن حداقل ۲ فرزند پسر باشد.

$$C = \{(پ, پ, پ), (پ, پ, د), (پ, د, پ), (د, پ, پ), (پ, پ, د), (پ, د, پ), (د, پ, پ)\}$$

ث) پیشامد D که در آن حداکثر یک فرزند پسر باشد.

$$D = \{(د, د, د), (د, د, پ), (د, پ, د), (پ, د, د), (د, د, د), (د, د, پ), (د, پ, د), (پ, د, د)\}$$

۷ خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چند عضو دارد؟

پاسخ: ۱۶

ب) پیشامد A را مشخص کنید؛ طوری که در آن دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

پاسخ: $A = \{(د، د، د، پ)، (د، د، پ، پ)، (د، پ، د، پ)، (پ، د، د، د)\}$

پ) پیشامد B که در آن تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد.

پاسخ: $B = \{(د، د، د، د)، (د، د، د، پ)، (د، د، پ، د)، (د، پ، د، د)، (پ، د، د، د)\}$

ت) آیا پیشامدهای A و B ناسازگارند؟

پاسخ: خیر

۸ از جعبه‌ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب لکه‌دار است، ۳ سیب را به‌طور تصادفی برمی‌داریم.

مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

$$\begin{pmatrix} ۱۲ \\ ۳ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ۱۷ \\ ۳ \end{pmatrix}$$

الف) هر سه سیب سالم باشند.

$$\begin{pmatrix} ۱۲ \\ ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۵ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ۱۷ \\ ۳ \end{pmatrix}$$

ب) دو سیب سالم و یک سیب لکه‌دار باشد.

$$\begin{pmatrix} ۱۲ \\ ۳ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۱۲ \\ ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۵ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ۱۷ \\ ۳ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۱۷ \\ ۳ \end{pmatrix}$$

پ) تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های لکه‌دار بیشتر باشد.

۹ عقربه دستگاه چرخنده زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می‌ایستد و عددی را نشان

می‌دهد. چقدر احتمال دارد که:

الف) عقربه روی یک عدد اول بایستد.

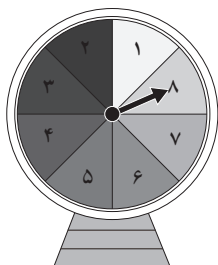
$$\frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

ب) عقربه یک عدد اول یا فرد را نشان دهد.

$$\frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

پ) عقربه روی یک عدد مضرب ۳ بایستد.

$$\frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴}$$



۱۰. ۷ پرچم مختلف را به هفت میله پرچم نصب کرده ایم و روی میله ها شماره های ۱ تا ۷ را حک کرده ایم. چنانچه این پرچم ها به طور تصادفی کنار هم قرار گیرند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه میله پرچم ها با شماره های غیراقل در مکان های زوج باشند.

$$\frac{3! \times 4!}{7!} = \frac{1}{35}$$

۱۱. یازده بازیکن فوتبال تیم مدرسه شما به طور تصادفی کنار یکدیگر قرار می گیرند تا عکسی یادگاری ببندازند. چنانچه دروازه بان و کاپیتان تیم دو نفر متفاوت باشند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه در عکس دقیقاً ۴ نفر بین دروازه بان و کاپیتان حضور داشته باشند؟

$$\frac{6 \times 2! \times 9!}{11!}$$

۱۲. در یک پارک جنگلی حفاظت شده، ۲۰ قوج وحشی البرز مرکزی وجود دارد؛ ۵ تا از آنها را می گیرند و پس از نشان دار کردن، رهایشان می کنند. بعد از مدتی، محیط بانان به طور تصادفی ۷ تا از آنها را می گیرند و می خواهند تعداد قوج های نشانه دار را بشمارند. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه حداکثر ۲ قوج نشانه دار باشند.

$$\frac{\binom{5}{0}\binom{15}{7} + \binom{5}{1}\binom{15}{6} + \binom{5}{2}\binom{15}{5}}{\binom{20}{7}}$$

۱۳. انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان ۱۰ نفر عضو دارد. به یک برنامه خاص، ۵ نفر رأی موافق، ۳ نفر رأی مخالف و ۲ نفر رأی ممتنع داده اند. از بین آنها به طور تصادفی ۳ نفر انتخاب می کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه :

الف) حداقل ۲ نفر از افراد انتخابی موافق برنامه باشند.

$$1 - \frac{\binom{5}{0}\binom{5}{3} + \binom{5}{1}\binom{5}{2}}{\binom{10}{3}}$$

ب) نظر هیچ دو نفری از آنها مانند هم نباشد.

$$\frac{\binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{10}{3}}$$

چرخه آمار در حل مسائل

اهداف درس سوم

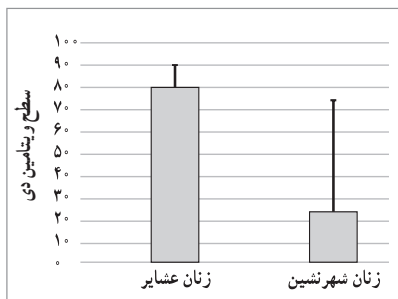
- یادآوری شاخص‌ها، نمودارها، اصطلاحات و مفاهیم آماری پایه‌های پیشین
- یادآوری و درک منطق انتخاب شاخص‌ها و نمودارهای آماری
- آشنایی با چرخه حل مسائل آماری به عنوان الگویی برای آماری فکر کردن
- درک روش به دست آوردن نتایج آماری و پرسیدن پرسش‌های تعیین‌کننده با توجه به بستر و زمینه مسئله
- پرورش نگاه نقادانه به مسائل و نتایج آماری و ارائه پیشنهاد مناسب

نمونه سؤالات ارزشیابی

۱ هر یک از موارد زیر مربوط به کدام گام از چرخه آمار است؟ این موارد را براساس ترتیب گام‌ها مرتب کنید.

(الف) وارد کردن داده‌ها در نرم‌افزار Excel در ۳۰ سطر و دو ستون و بررسی داده‌های دور افتاده
(ب) بررسی میزان دانش معلمان متوسطه دو، یک ناحیه آموزشی یک شهر در زمینه استفاده از رایانه و زبان انگلیسی

(پ) گزارش معیار گرایش به مرکز و معیار پراکندگی با توجه به نوع متغیر و توزیع داده‌ها
(ت) انتخاب ۳۰ معلم ناحیه به صورت تصادفی و اندازه‌گیری دانش آنها با استفاده از دو آزمون
(ث) از مقایسه میانگین نمرات این دو آزمون با نمره قابل قبول برای معلم‌ها به این نتیجه می‌رسیم که معلم‌های این ناحیه به آموزش ضمن خدمت در به کارگیری رایانه و ارتقای سطح زبان انگلیسی نیاز دارند.



۲ اگر در نمودار روبه‌رو بلندی مستطیل‌ها نشان‌دهنده میانگین و میله خط نشان‌دهنده انحراف استاندارد باشد درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید و توضیح دهید.

(الف) سطح ویتامین D زنان عشایر به طور متوسط بیش از زنان شهرنشین است.

(ب) برخی از زنان عشایر سطح ویتامین D بسیار پایین و برخی سطح ویتامین D بالایی دارند.
 (پ) زنان عشایر به صورت همگن وضعیت ویتامین D خوبی دارند.
 (ت) به نظر می‌رسد برخی از زنان شهرنشین با مصرف مکمل‌ها توانسته‌اند وضعیت ویتامین D خود را بهبود دهند اما برخی دیگر به دلیل سبک زندگی شهری و مواجهه کم با نور خورشید وضعیت خوبی ندارند.

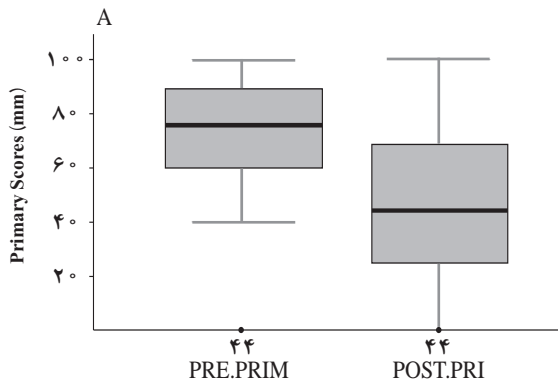
۳ در یک مدرسه متوسطه دو می‌خواهیم بدانیم دانش‌آموزان از بوفه مدرسه چه خوراکی‌هایی می‌خرند و از این طریق به صورت متوسط روزانه چند کالری دریافت می‌کنند.
 (الف) با تعیین متغیر مورد بررسی مسئله را به صورت شفاف تعریف کنید.
 (ب) جامعه آماری و نمونه را مشخص کنید.
 (پ) شیوه نمونه‌گیری را توضیح دهید.
 (ت) نوع و مقیاس متغیر مورد بررسی را مشخص کنید.
 (ث) نتایج را چگونه گزارش می‌کنید؟
 (براساس تعریف مسئله و نوع متغیر، پاسخ‌ها می‌تواند متفاوت باشد.)

۴ در بررسی میزان پول توجیبی دانش‌آموزان یک کلاس از میان ۲۷ دانش‌آموز آن کلاس ۱۱ نفر به صورت تصادفی انتخاب شدند.
 (الف) اندازه نمونه و اندازه جامعه را مشخص کنید.
 (ب) متغیر مورد بررسی در این مسئله چیست؟ نوع و مقیاس آن را مشخص کنید.
 (پ) پارامتر جامعه و آماره نمونه را مشخص کنید.
 (ت) اگر دو نفر از دانش‌آموزان مورد بررسی در مقایسه با بقیه پول توجیبی بسیار کمی داشته باشند، معیار گرایش به مرکز و معیار پراکندگی مناسب در این مسئله چه خواهد بود؟
 (ث) اگر متغیر مورد بررسی سن دانش‌آموزان این کلاس بود به اندازه نمونه بیشتری نیاز داشتیم یا کمتر؟ توضیح دهید.

۵ علی و آریا برای بررسی میزان رضایت مشتری‌های بازار میوه و تره‌بار ساعت ۹ صبح به یکی از این بازارها مراجعه کردند و از ۴۰ زن و ۱۰ مرد در مورد میزان رضایتشان از محصولات این بازار (به صورت بسیار راضی/راضی/ناراضی/بسیار ناراضی) پرسیدند. علی و آریا نتایج این بررسی را به صورت نمودار دایره‌ای گزارش کردند و به این نتیجه رسیدند که شهروندان از عملکرد شهرداری

این شهر در بازارهای میوه و تره‌بار تقریباً راضی هستند. چه اشکالاتی در این بررسی مشاهده می‌کنید؟ هر یک از این اشکالات مربوط به کدام گام است و چگونه می‌توانستیم آن را اصلاح کنیم؟

۶ درد اغلب نشانه‌ای از یک بیماری یا آسیب است اما گاهی درد مزمن خود یک بیماری محسوب می‌شود که می‌تواند ریشه جسمانی یا روانی داشته باشد. تا کنون درمان‌های مختلفی برای این بیماری پیشنهاد شده است اما گاهی درد مبتلایان به این بیماری با دوزهای بالایی از مسکن‌ها نیز آرام نمی‌شود. در مطالعه‌ای بر روی نوع خاصی از درد مزمن گروهی از پژوهشگران با پیشنهاد یک درمان سنتی از نمونه‌ای از بیماران خواستند میزان درد خود را بر روی یک محور ۱۰ سانتی متری علامت بزنند (مقدار صفر: کم‌ترین درد؛ مقدار ده: بیشترین درد). نتایج این بررسی در دو نمودار جعبه‌ای زیر نمایش داده شده است. نمودار سمت چپ مربوط به میزان درد بیماران قبل از درمان و نمودار سمت راست مربوط به میزان درد بیماران پس از درمان است.



الف) متغیر مورد بررسی در این مسئله چیست؟ نوع و مقیاس آن را مشخص کنید.

ب) چرا محور عمودی تا ۱۰۰ میلی‌متر اندازه‌گیری شده است؟

پ) میانه درد قبل از درمان و بعد از درمان چند است؟ این تفاوت نشان‌دهنده چیست؟

ت) پراکندگی داده‌ها در دو نمودار جعبه‌ای چگونه متفاوت است؟ این تفاوت را چگونه تفسیر می‌کنید؟

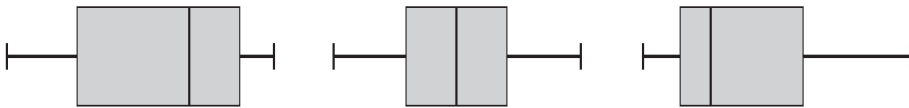
ث) یک نمودار جعبه‌ای فرضی بعد از درمان را طوری رسم کنید که این درمان مطمئن‌تر به نظر برسد.

ج) کدام یک از عبارت‌های زیر درست و کدام نادرست است. توضیح دهید:

■ تقریباً نیمی از بیماران قبل از درمان، درد بیشتری نسبت به ۷۵ درصد بیماران بعد از درمان داشتند.

- تقریباً نیمی از بیماران بعد از درمان، درد کمتری نسبت به تمامی بیماران قبل از درمان داشتند.
- پراکندگی داده‌ها بعد از درمان کاهش یافته است.

۷ از میان سه نمودار جعبه‌ای زیر کدام یک نشان‌دهنده توزیعی با داده‌های دورافتاده کوچک، توزیعی با داده‌های دور افتاده بزرگ و کدام یک نشان‌دهنده داده‌های متقارن است؟ در هر یک از موارد کدام معیار گرایش به مرکز و پراکندگی مناسب است؟



روشی تدریسی

در این درس می‌بایست تمرکز بر روی تقویت توانایی دانش‌آموزان در برقراری ارتباط بین مسئله و بستر آن در دنیای واقعی باشد. این مهم با تأکید کمتر بر روی محاسبات و ایجاد فضا و مجال بحث و گفت‌وگو در کلاس میسر خواهد شد.

درس سوم با بیان مسئله‌ای آغاز می‌شود که تمامی گام‌های چرخه حل مسائل آماری در آن نهفته است. در واقع دانش‌آموزان در فعالیت صفحه ۲۸ تا ۳۰، پیش از معرفی چرخه حل مسائل آماری، گام‌های مختلف چرخه حل مسائل آماری را در یک مثال مشاهده می‌کنند. در این فعالیت زیر واژگان کلیدی هر گام خطی کشیده شده تا نشان داده شود در هر گام چه مواردی بیشتر مورد توجه است.

در صفحه ۲۹ در پرسش مربوط به گام دوم (طرح و برنامه‌ریزی) تأکید می‌شود که در هر مسئله واحد اندازه‌گیری متغیر مورد بررسی باید مشخص باشد. در پرسش‌نامه پرسش الف. صفحه ۲۸، اگر «واحد اندازه‌گیری مدت استفاده از تلفن هوشمند (دقیقه)» مشخص نباشد ممکن است پاسخ‌هایی با واحد ساعت یا پاسخ‌هایی کیفی (کم، متوسط، زیاد) دریافت کنیم که تحلیل داده‌ها را مشکل می‌کند.

در گام سوم این فعالیت در صفحه ۲۹ به حفظ محرمانگی اطلاعات شرکت‌کنندگان، به‌عنوان راهی برای گردآوری اطلاعات دقیق‌تر و حفظ حریم خصوصی افراد، اشاره می‌شود و دانش‌آموزان به این نتیجه می‌رسند که اگر پرسش‌نامه‌ها بی‌نام باشد شرکت‌کنندگان اطمینان خاطر خواهند داشت که اطلاعاتشان محرمانه می‌ماند و والدین و کادر آموزشی و افرادی که داده‌ها را گردآوری می‌کنند از آن باخبر نخواهند شد. در این راستا به شرکت‌کنندگان توضیح داده می‌شود که اطلاعات گردآوری شده (مثلاً مدت زمان استفاده از تلفن هوشمند) به صورت کلی در قالب شاخص‌های آماری (مثلاً میانگین یا میانه و انحراف استاندارد یا دامنه میان چارکی) گزارش می‌شود و پاسخ تک‌تک افراد فاش نمی‌شود.

در ادامه در صفحه ۲۹ در گام چهارم (تحلیل داده‌ها)، به گزارش نتایج و یادآوری مفاهیمی که دانش‌آموزان پیش‌تر آموخته‌اند پرداخته می‌شود. در این فعالیت با توجه به مفهوم چارک‌ها، حدود ۲۵ درصد دانش‌آموزان بیش از ۱۰۰ دقیقه در روز با تلفن هوشمند کار می‌کنند. حضور در شبکه‌های اجتماعی بیشترین فراوانی و خواندن کتاب الکترونیک کمترین فراوانی را در میان فعالیت‌ها داشتند.

در این فعالیت صفحه ۲۹، چون شرکت‌کنندگان می‌توانند بیش از یک فعالیت را علامت بزنند، مجموع درصد فراوانی‌های نسبی بیش از ۱۰۰ درصد می‌شود. در این قسمت بهتر است توضیح داده شود که نمودار دایره‌ای گزینه مناسبی برای گزارش این نتایج نیست؛ چون در نمودار دایره‌ای مجموع زوایایی که به هر قسمت تخصیص داده می‌شود باید ۳۶۰ درجه شود.

در گام آخر (بحث و نتیجه‌گیری) صفحه ۳۰، به تعمیم‌پذیری نتایج پرداخته می‌شود و دانش‌آموزان می‌آموزند که نتایج حاصل فقط در مورد دانش‌آموزان پایه‌های دهم، یازدهم و دوازدهم همان مدرسه صادق است و نمی‌توانیم نتایج آن مدرسه را به مدارس دیگر تعمیم دهیم؛ چراکه از مدارس دیگر نمونه‌گیری نکرده‌ایم و اطلاعاتی در دست نداریم. همچنین این نتایج فقط در مورد میزان و چگونگی استفاده از تلفن هوشمند صادق است و قابل تعمیم به میزان و چگونگی استفاده از ابزارهایی مانند رایانه و تبلت و... نیست.

در این گام همچنین به تفسیر نتایج می‌پردازیم و به این نتیجه می‌رسیم که حضور در شبکه‌های اجتماعی، تماشای فیلم یا گوش دادن به موسیقی و همچنین عکاسی بیشترین فعالیت‌هایی هستند که دانش‌آموزان با تلفن هوشمند خود انجام می‌دهند و نیمی از دانش‌آموزان بیش از ۷۰ دقیقه در روز با تلفن هوشمند خود کار می‌کنند و حدوداً ۲۵ درصد دانش‌آموزان کمتر از ۶۵ دقیقه و حدوداً ۲۵ درصد بیش از ۱۰۰ دقیقه با تلفن هوشمند خود کار می‌کنند. (در این قسمت به علت اینکه در حالت کلی اندازه نمونه (مثلاً زوج یا فرد بودن تعداد دانش‌آموزان مورد مطالعه در این فعالیت) می‌تواند بر تعداد و درصد دقیق داده‌هایی که بین چارک‌ها قرار می‌گیرند تأثیر بگذارد از کلمه «تقریباً» و «حدوداً» استفاده شده است.)

در کاردر کلاس صفحه ۳۱ دانش‌آموزان به طور دقیق‌تر با اهداف گام‌های چرخه حل مسائل آماری آشنا می‌شوند.

ترتیب گام	نام گام	توضیح گام
۲	طرح و برنامه‌ریزی	راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم. به نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم.
۵	بحث و نتیجه‌گیری	به تفسیر نتایج به دست آمده می‌پردازیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم.
۱	بیان مسئله	مسئله‌ای را که در دنیای واقعی وجود دارد به صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری مطرح می‌کنیم.
۴	تحلیل داده‌ها	با استفاده از شاخص‌ها، نمودارها و مفاهیمی که آموخته‌ایم نتایج را متناسب با هدف‌های کارمان، نوع متغیرها و ویژگی‌های داده‌ها گزارش می‌کنیم.
۳	گردآوری داده‌ها	به گردآوری داده‌ها می‌پردازیم و تا حد ممکن از درستی آنها مطمئن می‌شویم.

از صفحه ۳۱ به بعد دانش‌آموزان به صورت عمیق‌تر با هر گام چرخه آشنا می‌شوند. در تمامی گام‌ها ایجاد فضای

گفت‌وگو برای دانش‌آموزان بسیار اهمیت دارد. در گام اول (بیان مسئله) دانش‌آموزان تمرین می‌کنند تعریف دقیق و شفافی از مسئله داشته باشند و در مورد یک جامعه آماری محدود با متغیرهای مشخص مسئله را تعریف کنند. مثلاً در بخش «بحث و گفت‌وگو» صفحه ۳۱ ممکن است دانش‌آموزان با بیان ارتباطی منطقی بگویند که نزدیکی به پارک‌ها یا ورزشگاه‌ها، جنسیت افراد و محدودیت اجتماعی برای انجام برخی ورزش‌ها، میزان آلودگی هوا در مکان مورد بررسی یا در فصل مورد بررسی می‌تواند بر میزان فعالیت بدنی تأثیر بگذارد؛ بدین ترتیب آنها می‌توانند جامعه آماری مورد بررسی را محدود کنند. مثلاً مسئله دیگری را این‌گونه بیان کنند: «بررسی میزان فعالیت بدنی روزانه پسران پیش‌دستانی دو مدرسه مشخص در روزهای تعطیل هفته در دی ماه». در بخش «بحث و گفت‌وگو» هر نوع ارتباط منطقی که از نظر ایشان قابل توجیه باشد می‌بایست شنیده و تشویق شود.

یکی دیگر از نکات مهم برای رسیدن به پاسخ مناسب مسائل به کمک آمار این است که کارها به صورت گروهی انجام شود و از نظرات متخصصان استفاده شود. در مثال «بررسی میزان فعالیت بدنی» انتظار می‌رود دانش‌آموزان به مثال‌هایی مانند افراد زیر برای حضور در گروه اجراکننده اشاره کنند:

- متخصصان تربیت بدنی (به منظور طراحی پرسش‌نامه یا ابزاری برای اندازه‌گیری فعالیت بدنی)
- والدین (برای کمک به طراحی پرسش‌نامه یا ابزار اندازه‌گیری با توجه به شناخت آنها از فعالیت فرزندان)
- معلم‌های ورزش (چنانچه هدف اندازه‌گیری فعالیت بدنی در مدرسه باشد)

■ کار درمان یا مددکار (چنانچه جامعه آماری مورد بررسی شامل افرادی با کم‌توانی جسمی باشد)

در گام «طرح و برنامه‌ریزی» دانش‌آموزان یاد می‌گیرند که به چگونگی اندازه‌گیری، نمونه‌گیری و گزارش نتایج توجه کنند و با نگاهی نقادانه این موارد را بررسی کنند. آنها در این بخش می‌آموزند که هرچه پراکندگی متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر باشد به اندازه بزرگ‌تری نیاز داریم. به همین دلیل در کار در کلاس صفحه ۳۳ پرسش ۱ قسمت الف. چون معدل دانش‌آموزان یک کلاس پراکنده‌تر از سن دانش‌آموزان یک کلاس است (در یک کلاس همه تقریباً هم‌سن هستند) برای بررسی معدل، اندازه نمونه بزرگ‌تری نیاز داریم. به همین ترتیب در قسمت ب. چون حقوق کارکنان یک شرکت بزرگ خصوصی متنوع‌تر و پراکنده‌تر از حقوق معلم‌های یک مدرسه دولتی است برای بررسی حقوق کارکنان این شرکت به اندازه نمونه بزرگ‌تری احتیاج داریم.

در پرسش ۲ قسمت الف. اشکال پیشنهاد علی، قسمت ب. اشکال پیشنهاد امید و قسمت پ. نیز اشکال پیشنهاد علی است.

دو اشکال دیگر در مورد پیشنهاد علی می‌تواند موارد زیر باشد:

۱ از همه افراد مورد بررسی باید همه پرسش‌ها پرسیده شود (مثلاً از کسی که در کتابخانه است نیز باید پرسیم چقدر به مسجد و تئاتر ... می‌رود).

۲ باید به صورت تصادفی دانش‌آموزانی را انتخاب کنیم (نه فقط در مکان‌هایی که به ذهنمان می‌رسد).

در پرسش ۳ انتخاب افراد بر اساس رقم اول شماره تلفن منازل می‌تواند به انتخاب محله‌هایی بینجامد که متعلق

به طبقه اجتماعی - اقتصادی بالا یا پایینی هستند و بدین ترتیب تنوع خانوارها در نمونه کم می‌شود و تمامی قشرهای جامعه شانس حضور در نمونه نخواهند داشت.

گام سوم گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها است. در این گام همچنین به سازمان‌دهی داده‌ها می‌پردازیم. یعنی تبدیل واحدهای اندازه‌گیری یا محاسبه یک متغیر جدید بر اساس اطلاعات گردآوری شده (مثلاً محاسبه شاخص توده بدنی با استفاده از قد و وزن) در این گام انجام می‌شود.

کار در کلاس صفحه ۳۴ به نکاتی در مورد پاک‌سازی داده‌ها می‌پردازد. در ادامه به پاسخ به پرسش‌های این کار در کلاس می‌پردازیم:

(الف) در متغیر سن، کدام داده احتمالاً اشتباه تایپ شده است؟ چگونه می‌توانستیم با مرتب کردن داده‌ها در نرم‌افزار این داده را از میان تعداد بسیار زیادی سطر پیدا کنیم؟ ۵۱. اگر داده‌ها را با کمک نرم‌افزار به صورت نزولی (از بزرگ به کوچک) مرتب می‌کردیم ۵۱ در بالاترین سطر قرار می‌گرفت. (اگر یک بار هم داده‌ها را به صورت صعودی کنیم داده‌های بسیار کوچک به سرعت پیدا می‌شوند.)

(ب) در داده‌های مربوط به کدام دانش آموز به دلیل جا افتادن کد جنسیت، داده‌های متغیرهای بعدی (ورزش مورد علاقه، متوسط ساعات مطالعه آزاد و نمره ادبیات) به سمت چپ جابه‌جا شده‌اند؟ ورزش مورد علاقه این دانش آموز چیست؟ نمره ادبیات او چند است؟ دانش آموز شماره ۱۹ (سطر ۷). بسکتبال. ۱۹.

(پ) در متغیر «ورزش مورد علاقه» کدام عدد به اشتباه تایپ شده است؟ عدد ۲۲ برای دانش آموز شماره ۴۵. (ت) در متغیر «متوسط ساعات مطالعه آزاد در هفته» کدام عدد با الگوی داده‌های دیگر تفاوت دارد؟ آیا می‌توانیم این عدد را بدون بررسی حذف یا اصلاح کنیم؟ ۴۴. خیر؛ داده‌های دورافتاده لزوماً داده‌های اشتباه نیستند و صحت آنها باید مورد بررسی قرار گیرد. (مثلاً در مورد بررسی حقوق شهروندان یک شهر ممکن است چند داده دورافتاده بزرگ (نجومی) مشاهده شود. اما این داده‌ها لزوماً اشتباه نیستند و نباید کنار گذاشته شوند.) (ث) در متغیر «نمره ادبیات» داده‌های مربوط به کدام دانش آموز با واحد اندازه‌گیری متفاوتی ثبت شده است؟ چگونه می‌توانستیم از این اتفاق جلوگیری کنیم؟ نمره دانش آموز شماره ۴۵ به صورت کیفی ثبت شده است. پیش از گردآوری داده‌ها لازم بود تأکید شود که تمامی دبیران باید آزمون ۲۰ نمره‌ای برگزار کنند.

در بخش بحث و گفت‌وگو صفحه ۳۵ پیشنهادهای دانش‌آموزان در مورد اینکه اگر دانش‌آموزی در روز برگزاری آزمون ادبیات غایب باشد مورد بحث قرار می‌گیرد؛ یک پیشنهاد می‌تواند این باشد که میانگین نمره‌های آزمون‌های قبلی او را به جای نمره او بگذاریم. در اینجا می‌توان درباره صفر گذاشتن برای این دانش‌آموز و تأثیر آن بر میانگین کلاس، حذف کردن تمامی اطلاعات این دانش‌آموز و یا قرار دادن میانگین کلاس به جای میانگین این دانش‌آموز بحث کرد.

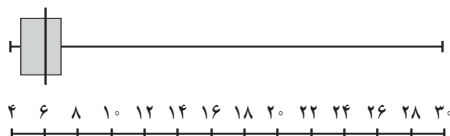
در ادامه بخش بحث و گفت‌وگوی صفحه ۳۵ لازم است تأکید شود که هرگز نمی‌توانیم اطمینان کامل داشته باشیم که داده‌ها به طور کامل پاک‌سازی و اصلاح شده‌اند. مثلاً ممکن است سن یک فرد به جای ۱۴، ۱۳ ثبت شده باشد. اما از آنجا که ۱۳ نیز در دامنه داده‌های مورد بررسی قرار دارد با صعودی و نزولی کردن

داده‌های این متغیر نمی‌توانیم به این اشتباه بی‌بیریم.

یکی از اهداف مهم طراحی این کار در کلاس این است که دانش‌آموزان یاد بگیرند در بسیاری از نرم‌افزارها «هر سطر شامل اطلاعات یک واحد آماری و هر ستون نشان‌دهنده یک متغیر است» در گام چهارم (تحلیل داده‌ها) به گزارش نتایج با معیارها و نمودارهای مناسب پرداخته می‌شود و یادآوری می‌شود که میانگین معیار گرایش به مرکز مناسبی برای داده‌هایی که مقادیر دورافتاده دارند نیست. چرا که این معیار تحت تأثیر داده‌های دورافتاده قرار می‌گیرد (تأکید بر اینکه میانگین مرکز ثقل داده‌ها است و به سمت داده‌ای دورافتاده می‌رود). در این موارد انحراف استاندارد (انحراف معیار) نیز معیار مناسبی نیست چرا که با استفاده از واریانس به دست می‌آید که واریانس نیز از جنس میانگین است (میانگین مجذور فاصله‌ها تا میانگین). در کار در کلاس صفحه ۳۵ به این مطلب پرداخته شده است.

													معیارهای گرایش به مرکزی		معیارهای پراکندگی		
متغیر	داده‌ها												میانگین	میانه	<i>IQR</i>	<i>SD</i>	دامنه
سن (سال)	۱۷	۱۸	۱۶	۱۷	۱۵	۱۹	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۵	۱۹	۱۶/۸۳	۱۷	۱۸ – ۱۵/۵=۲/۵	۱/۳۴	۱۹ – ۱۵=۴
میزان تماشای تلویزیون	۴	۲۹	۴	۶	۷	۶/۵	۷	۸	۶	۳۰	۴	۵	۹/۷۱	۶/۲۵	۷/۵ – ۴/۵=۳	۸/۵۵	۳۰ – ۴=۲۶

با توجه به توزیع داده‌ها برای متغیر «سن» میانگین و انحراف استاندارد (انحراف معیار) معیارهای مناسبی هستند چون داده دورافتاده مشاهده نمی‌کنیم؛ اما برای «میزان تماشای تلویزیون» میانه و دامنه میان چارکی معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی مناسبی هستند؛ زیرا چند داده دورافتاده وجود دارد. داده‌های ۲۹ و ۳۰ فاصله زیادی از میانگین دارند و مجذور این فاصله‌ها باعث بزرگ شدن واریانس و به تبع آن بزرگ شدن انحراف استاندارد (انحراف معیار) شده است. در واقع میانگین (۹/۷۱) نماینده مناسبی برای داده‌های «میزان تماشای تلویزیون» نیست و به سمت داده‌های دورافتاده رفته است. در قسمت ث. کار در کلاس صفحه ۳۶ اشاره می‌شود که اگر میانگین و انحراف استاندارد معیارهای مناسبی برای توصیف داده‌ها باشند می‌توان از نموداری که با این دو معیار رسم می‌شود داده‌ها را خلاصه و توصیف کرد. در این کار در کلاس فقط برای متغیر سن می‌توان از این نمودار استفاده کرد که مقادیر شکل الف منطبق با داده‌های متغیر سن است. در این کار در کلاس همچنین تأکید می‌شود که اگر داده دورافتاده داشته باشیم نمودار حاصل از میانگین و انحراف استاندارد (انحراف معیار) نمودار مناسبی نیست و به همین دلیل است که برای متغیر کمی مطمئن‌ترین نمودار، نمودار جعبه‌ای است.



نمودار جعبه‌ای به خوبی نشان می‌دهد که داده‌ها در کدام قسمت پراکنده‌تر و کجا فشرده‌ترند. در نمودار جعبه‌ای میزان تماشای تلویزیون ۷۵ درصد داده‌ها در بازه ۴ تا ۷/۵ به صورت فشرده قرار گرفته‌اند و ۲۵ درصد داده‌ها به صورت پراکنده‌تر در بازه ۷/۵ تا ۳۰ قرار دارند.

در کار در کلاس صفحه ۳۷ تأکید می‌شود که برای متغیرهای کمی هم گزارش معیار گرایش به مرکز و هم گزارش معیار پراکندگی لازم است. در این کار در کلاس همچنین اهمیت انتخاب درست معیار گرایش به مرکز نشان داده شده است.

در بخش الف) دو نمودار جعبه‌ای مربوط به دو شرکت بر روی یک محور رسم می‌شود تا دانش‌آموزان بتوانند به خوبی آنها را با هم مقایسه کنند.



■ حقوق تقریباً ۵۰٪ کارکنان شرکت دوم کمتر از کمترین حقوق کارکنان شرکت اول است. (درست است؛ زیرا میانه حقوق کارکنان شرکت دوم ۱ میلیون تومان و برابر با کمینه حقوق کارکنان شرکت اول است.)

■ اگر نرگس سطح تحصیلات و تجربه متوسطی داشته باشد و این دو شرکت افراد را براساس شایستگی‌هایشان انتخاب کنند، شرکت اول برای او مناسب است. (درست است؛ زیرا یک کارمند متوسط در شرکت یک وضعیت بهتری نسبت به شرکت دو خواهد داشت؛ زیرا میانه این شرکت بیشتر از میانه شرکت دو است.)

■ در شرکت دوم، میانگین معیار گرایش به مرکز مناسبی است. (نادرست است؛ زیرا داده دورافتاده داریم و توزیع داده‌ها متقارن نیست بنابراین میانه معیار گرایش به مرکز مناسبی است.)

نکته مهم اینکه همان‌طور که مریم با یک پرسش تعیین‌کننده و بجا اشاره کرده است اگر معیار گرایش به مرکز نیز گزارش می‌شد حتی با انحراف استاندارد داده‌های شرکت دوم (بیش از ۴) نیز می‌توانستیم بفهمیم که در این شرکت حقوق افراد بسیار پراکنده توزیع شده است.

در کار در کلاس دوم صفحه ۳۷ دانش‌آموزان باید به این نکته توجه کنند که برای متغیرهای کیفی هم گزارش تعداد و هم گزارش درصد اهمیت دارد و گزارش ناقص نتایج می‌تواند گمراه‌کننده باشد. در این کار در کلاس «قبولی در ۱۵ دانشگاه برتر کشور» (قبول شدن/ قبول نشدن) یک متغیر کیفی است و مدرسه اول که قبلاً تعداد قبولی‌هایش ۱ نفر بوده و با تغییر رویکرد آموزشی ۳ نفر شده است ۲۰۰٪ افزایش داشته و

مدرسه دوم که تعداد قبولی‌هایش قبلاً ۷۰ نفر بوده و با تغییر رویکرد آموزشی ۸۴ نفر شده است ۲۰٪ افزایش داشته است. در این مثال دانش‌آموزان متوجه می‌شوند که به درصد اکتفا نکنند و حتماً در مورد این نوع متغیرها همیشه پرسش‌های تعیین‌کننده‌ای در مورد تعداد بپرسند.

در کار در کلاس صفحه ۳۹ بر یکپارچگی چرخه حل مسائل با آمار و اهمیت کارگروهی و استفاده از نظر افراد متخصص و بومی در تمامی گام‌های چرخه تأکید می‌شود.

*** نکته مهم** در این بخش این است که دانش‌آموزان بدانند برای نقد و بررسی نتایجی که روزانه در رسانه‌ها و دنیای واقعی با آن برخورد می‌کنند نه تنها به بخش نتایج که به تمامی گام‌هایی که می‌تواند نتایج را تحت تأثیر قرار دهد می‌بایست نگاهی پرسشگر و نقادانه داشته باشند.

در پرسش ۱ این کار در کلاس نشان داده می‌شود که مشورت با افراد بومی چگونه می‌توانست به ما کمک کند بدانیم بیشتر ساکنین این منطقه چند ساله هستند و چه نیازهایی دارند.

در این کار در کلاس در پرسش ۲ قسمت الف. در گام اول مسئله به صورت دقیق و شفاف تعریف نشده است. این مسئله می‌تواند تمامی گام‌های دیگر را تحت تأثیر قرار دهد. در قسمت ب. در گام طرح و برنامه‌ریزی واحد اندازه‌گیری تعیین نشده است و داده‌ها با واحدهای مختلفی گردآوری شده‌اند. اگر واحدها قابل تبدیل به یکدیگر باشند می‌توان در گام سازمان‌دهی داده‌ها مشکل را حل کرد اما گاهی اگر در گام طرح و برنامه‌ریزی در مورد شکل اندازه‌گیری تصمیم‌گیری نشده باشد، اطلاعات بسیاری از دست می‌رود؛ مثلاً وقتی که برخی داده‌ها به صورت کیفی و برخی کمی گردآوری شده باشند. در قسمت پ. در گام داده‌ها، داده‌ها به درستی پاک‌سازی نشده‌اند؛ دور افتاده بودن داده‌ها لزوماً به معنای اشتباه بودن آنها نیست و گاهی اتفاقاً اطلاعات بسیار مهمی در آنها نهفته است. حذف داده‌های دور افتاده نتایج و تفسیر نتایج را کاملاً تحت تأثیر قرار می‌دهد. در قسمت ت. مسئله برای تمامی گروه توضیح داده نشده است و گروه به صورت یکپارچه در جریان اهداف اصلی مطالعه نیست و این اشکال سمت و سوی اجرای کار را به صورت کلی از اهداف دور می‌کند. در قسمت ث. گروه اجراکننده می‌خواهند نتایج را طبق سلیقه یا صلاحدید خود گزارش کنند. مثلاً اگر میانه معیار گرایش به مرکز بهتری است آنها بنا به مصلحت می‌خواهند میانگین گزارش کنند. این کار تفسیر نتایج و شکل نتیجه‌گیری و در نهایت تصمیمات حاصل از نتایج را کاملاً تحت تأثیر قرار می‌دهد. در قسمت ج. متخصصین آمار بدون دانش و شناخت زمینه و بستر موضوع مورد بررسی به تحلیل نتایج می‌پردازند. بدین ترتیب گام بحث و نتیجه‌گیری که نیازمند این شناخت است و به ارائه ایده‌ها و پیشنهادها می‌انجامد به خوبی انجام نمی‌شود.

حل تمرین درس سوم

۱ به نظر می‌رسد کودکانی که زبان مادری‌شان فارسی نیست در مقطع دبستان مشکلات بیشتری برای یادگیری مفاهیم درسی دارند. با انتخاب یک جامعه آماری محدود (از نظر پایه تحصیلی، جنسیت، منطقه،

زبان مادری و...) و انتخاب متغیر تصادفی مناسب این مسئله را به صورت دقیق و شفاف بیان کنید.

پاسخ: بررسی معدل نیم سال اول دانش آموزان دختر کرد زبان پایه اول دبستان مدرسه ای در سنجند (مقایسه آن با مدرسه ای مشابه در شهری مشابه از نظر اجتماعی - اقتصادی با گویش فارسی یا مقایسه آن با متوسط معدل دانش آموزان دختر پایه اول کل کشور) (هر پاسخ دیگری که با متغیری قابل اندازه گیری و جامعه آماری مشخص به حل این مسئله برسد قابل قبول است).

۲ با توجه به تأثیر شیوه های مختلف حمل و نقل بر محیط زیست می خواهیم در یک کلاس ۲۸ نفره با انتخاب تصادفی ۹ نفر از دانش آموزان، از آنها بپرسیم در هفته گذشته بیشتر به کدام یک از شیوه های زیر به مدرسه آمده اند؟

■ پیاده یا با دوچرخه

■ با وسایل حمل و نقل عمومی

■ با سرویس مدرسه یا خودرو شخصی

الف) در این مطالعه جامعه آماری، نمونه آماری، اندازه جامعه و اندازه نمونه را مشخص کنید.

پاسخ: جامعه آماری: تمامی دانش آموزان این کلاس؛ نمونه آماری: ۹ دانش آموزی که به تصادف انتخاب شده اند؛ اندازه جامعه: ۲۸؛ اندازه نمونه: ۹.

ب) با چه روشی می توان داده های این مطالعه را گردآوری کرد؟ چه مشکلاتی ممکن است در جمع آوری این داده ها رخ دهد؟

پاسخ: می توانیم با طراحی یک پرسش نامه داده ها را گردآوری کنیم. ممکن است برخی دانش آموزان پیاده به مدرسه بیایند ولی با اتوبوس برگردند. قبل از گردآوری داده ها باید به این مسائل فکر کنیم.

پ) متغیر تصادفی مورد بررسی این مطالعه چیست؟ نوع متغیر و مقیاس اندازه گیری را مشخص کنید.
پاسخ: شیوه حمل و نقل؛ با توجه به اینکه شیوه های حمل و نقل در این مسئله بر اساس تأثیر آنها بر محیط زیست طبقه بندی شده اند (از سازگارترین با محیط زیست تا زیان بارترین برای محیط زیست) این متغیر کیفی ترتیبی است.

ت) چه نمودارها و چه آماره هایی برای گزارش نتایج این مطالعه مناسب اند؟

پاسخ: می توانیم از نمودار میله ای یا دایره ای و از تعداد و درصد برای گزارش نتایج استفاده کنیم.

ج) آیا می توانیم این نتایج را به شیوه رفت و آمد دانش آموزان این کلاس به کل سال تحصیلی تعمیم دهیم (مثلاً به فصل های مختلف یا زمان برگزاری آزمون های پایان نیم سال)؟ توضیح دهید.

پاسخ: خیر؛ زیرا ممکن است شیوه رفت و آمد دانش آموزان در فصل های مختلف یا زمان برگزاری آزمون های پایان نیم سال این طور نباشد و تغییر کند.

ث) اگر ۹ نفر دیگر از این کلاس را به تصادف انتخاب می کردیم، آیا لزوماً نتایج مشابهی حاصل می شد؟ توضیح دهید.

پاسخ : خیر؛ ممکن است نتایج متفاوتی حاصل شود (لازم است در اینجا به این نکته که در پایه دهم آمده بود اشاره شود که پارامتر جامعه (تعداد و درصد در کل کلاس) مقدار ثابتی است ولی آماره نمونه (تعداد و درصد در افرادی که در نمونه قرار گرفته‌اند) متأثر از نمونه‌گیری است و تغییر می‌کند).

۳ در هر یک از موارد زیر علت عدم تناسب جامعه آماری با نمونه‌های انتخاب شده را توضیح دهید. برای بهبود نمونه‌گیری چه پیشنهادی دارید؟ انتخاب نادرست نمونه در هر یک از موارد چگونه بر نتایج تأثیر می‌گذارد؟

الف) مسئله : بررسی میزان رضایت شغلی در بین کارمندان یک کارگاه شبانه‌روزی
نمونه : انتخاب تصادفی تعدادی از مدیران ارشد شیفت روز

پاسخ : جامعه آماری تمامی کارمندان در تمامی شیفت‌ها هستند. اما در نمونه فقط مدیران ارشد شیفت روز شانس حضور دارند. این نمونه‌گیری نتایج را تحت تأثیر قرار می‌دهد و ممکن است میزان رضایت این افراد نسبت به کارمندان ساده شیفت شب بالاتر باشد و نتایج گمراه‌کننده شود. باید از لیست تمامی کارمندان همه شیفت‌ها به صورت تصادفی افرادی را انتخاب کنیم.

ب) مسئله : نظرسنجی از مادران یک شهر در مورد میزان رضایتشان از برنامه‌های کودک تلویزیون

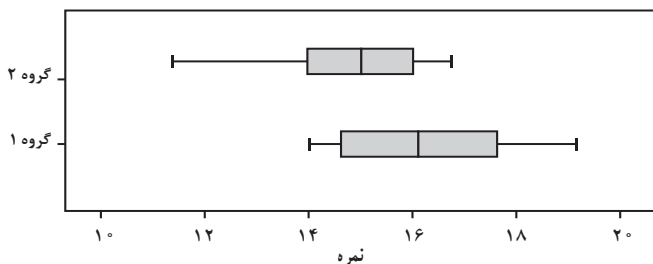
نمونه : انتخاب تصادفی برخی منازل از تمامی مناطق آن شهر و مراجعه بین ساعت ۸ تا ۱۰ صبح
پاسخ : در این شیوه نمونه‌گیری مادران شاغل شانس حضور ندارند و این مشکل می‌تواند نتایج را تحت تأثیر قرار دهد. گردآوری داده‌ها را می‌توان به عصرها یا ساعات مختلفی از شبانه‌روز موکول کرد. (پیشنهادهای دانش‌آموزان می‌بایست مورد بحث و بررسی قرار گیرد و توسط دیگر دانش‌آموزان نقد شود. هر پیشنهادی که به تمامی افراد جامعه شانس حضور برابر دهد قابل قبول است.)
پ) مسئله : نظرسنجی از دانش‌آموزان پایه دوازدهم منطقه دو بوشهر درباره اینکه به صورت متوسط چند ساعت در روز را به انجام تکالیف مدرسه اختصاص می‌دهند.

نمونه : دختران پایه دوازدهم یک مدرسه از این منطقه که به صورت داوطلبانه در این مطالعه مشارکت کرده‌اند.
پاسخ : فقط دختران مورد بررسی قرار گرفته‌اند. داوطلبان مشارکت ممکن است دانش‌آموزانی باشند که تکالیف خود را مرتب انجام می‌دهند و این نوع نمونه‌گیری می‌تواند ما را از نتایج واقعی منحرف کند. می‌توان لیستی از دانش‌آموزان (دختران و پسران) مدارس این منطقه تهیه کرد و به صورت تصادفی افرادی را انتخاب کرد.

۴ «مطالعات دانشمندان علوم اعصاب نشان می‌دهد که مغز انسان برای انجام هم‌زمان چند فعالیت ساخته نشده است و هر بار که ما گمان می‌کنیم مشغول انجام دادن چند کار به صورت هم‌زمان هستیم در واقع مغز ما دارد با سرعت از کاری به کار دیگر می‌پرد. مغز انسان تشنه خبرها و اتفاقات جدید است. وقتی مشغول مطالعه و یادگیری هستیم و ناگهان صدای دریافت یک پیام را از تلفن خود می‌شنویم مغز ما، که بی‌تابانه منتظر کشف آن اطلاع جدید است، دیگر روی یک کار متمرکز نیست. این مطالعات نشان

می‌دهد که مثلاً اگر دانش‌آموزی هنگام مطالعه و یادگیری، هم‌زمان تلویزیون تماشا کند یا گفت‌وگویی را در یک شبکه اجتماعی دنبال کند، مطالب درسی به‌جای اینکه به قسمت حقایق و ایده‌ها برود به قسمت مهارت‌ها فرستاده می‌شود.»

سعید و سهراب پس از خواندن این مطلب در نشریه مدرسه تصمیم گرفتند نمره عملکرد تحصیلی ۲۵ دانش‌آموز پایه دوازدهم مدرسه را که هنگام مطالعه، تلفن همراه خود را در حالت بی‌صدا قرار می‌دهند (گروه یک) با ۲۵ دانش‌آموز پایه دوازدهم دیگر که این کار را نمی‌کنند (گروه دو) مقایسه کنند. نتایج این مطالعه به این شرح است:



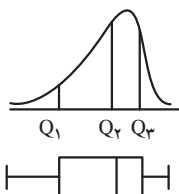
الف) از مقایسه میانه گروه یک با چارک سوم گروه دو چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
پاسخ: نیمی از دانش‌آموزان گروه یک عملکرد بهتری نسبت به ۷۵ درصد دانش‌آموزان گروه دو داشته‌اند.

ب) پراکندگی دو گروه را با استفاده از دامنه تغییرات و دامنه میان چارکی مقایسه کنید.
پاسخ: دامنه تغییرات گروه دو بیشتر از گروه یک و دامنه میان چارکی گروه یک بیشتر از گروه دو است.

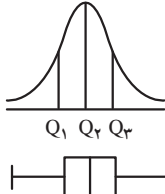
پ) از مقایسه کینه گروه یک با چارک اول گروه دوم چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
پاسخ: تمامی دانش‌آموزان گروه یک عملکرد بهتری نسبت به ۲۵ درصد دانش‌آموزان گروه دو دارند.

ت) در کدام گروه گزارش میانگین و انحراف معیار می‌تواند گمراه‌کننده باشد؟
پاسخ: به نظر می‌رسد گروه دو داده یا داده‌های دورافتاده کوچکی دارد (کشیدگی یک چهارم اول نمودار). به همین دلیل گزارش میانگین و انحراف استاندارد (معیار) برای این گروه مناسب نیست. در این قسمت برای درک بهتر دانش‌آموزان می‌توان به شکل‌های زیر و چگونگی تأثیر توزیع داده‌ها بر نمودار جعبه‌ای اشاره کرد.

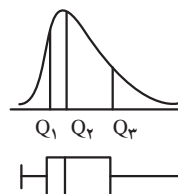
Left-Skewed



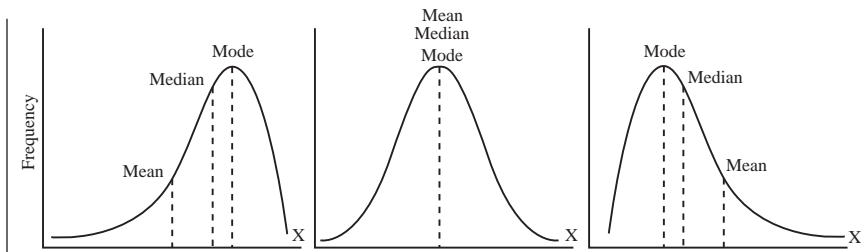
Symmetric



Right-Skewed



ث) در کدام گروه مقدار میانگین و میانه به هم نزدیکتر هستند؟
 پاسخ: به نظر می‌رسد در گروه یک توزیع داده‌ها متقارن‌تر است و در نتیجه میانگین و میانه نزدیک‌تر هستند. در این قسمت برای درک بهتر دانش‌آموزان می‌توان به شکل‌های زیر و چگونگی تأثیر توزیع داده‌ها بر معیارهای گرایش به مرکز اشاره کرد.



ج) نتایج این مطالعه را به چه جامعه‌ای می‌توان تعمیم داد؟
 پاسخ: دانش‌آموزان پایه دوازدهم مدرسه سعید و سهراب
 ۵ در یک نظرسنجی از ۱۵ دانش‌آموز علوم انسانی پایه یازدهم یک مدرسه پرسیده‌ایم به نظر آنها چند ساعت آموزشی در ماه برای برگزاری جلسات نقد کتاب یا فیلم مناسب است. داده‌های جمع‌آوری شده به این شرح است:

۱۲ ۱۴ ۲۰ ۲۲ ۱۸ ۲۰ ۰ ۴ ۶ ۱۳ ۱۲ ۱۰ ۱۲ ۱۰ ۱۶

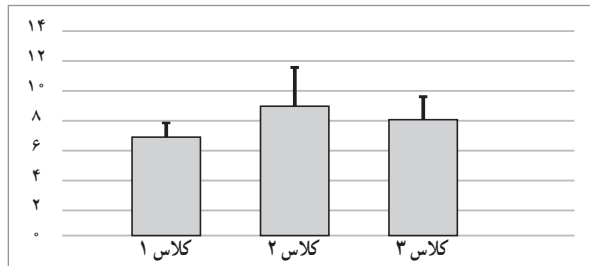
الف) این داده‌ها را طوری تغییر دهید که میانگین و انحراف معیار بیشتر شود اما میانه، چارک اول و چارک سوم تغییر نکند.

پاسخ: پس از مرتب کردن داده‌ها متوجه می‌شویم که مثلاً اگر به جای بزرگ‌ترین داده (۲۲)، عددی مانند ۳۲ بگذاریم میانگین و انحراف استاندارد بزرگ‌تر می‌شوند ولی میانه و چارک‌ها تغییر نمی‌کنند.

ب) فرض کنید می‌خواهیم دو نفر دیگر به این نمونه اضافه کنیم. داده‌های این دو نفر را طوری انتخاب کنید که میانگین و میانه تغییر نکند.

پاسخ: میانگین این داده‌ها $12/6$ است. با توجه به مفهوم مرکز نقل برای میانگین، اگر دو عدد با فاصله‌های برابر (یکی کمتر و دیگری بیشتر از میانگین) به داده‌ها اضافه شود میانگین تغییر نخواهد کرد. اگر بخواهیم میانه نیز تغییر نکند نباید عددی بین میانگین ($12/6$) و میانه (۱۲) قرار گیرد. مثلاً دو عدد $11/6$ و $13/6$ مناسب‌اند.

۶ با توجه به تأثیر کمیت و کیفیت خواب بر یادگیری، ندا و آوا در مطالعه‌ای با بررسی تمامی دانش‌آموزان سه کلاس پایه دهم میانگین ساعت خواب این دانش‌آموزان را در هفته گذشته بر حسب ساعت ثبت کردند. آنها پس از گردآوری داده‌ها و بررسی درستی آن، نتایج را به صورت نمودارهای زیر نمایش دادند. (در این نمودارها بلندی مستطیل نشان‌دهنده میانگین و میله خط نشان‌دهنده انحراف معیار است.)



الف) چه عواملی ممکن است هنگام گردآوری داده‌ها نتایج را از واقعیت دور کند؟ (هنگامی که از دانش‌آموزان راجع به میانگین ساعت خوابشان در هفته گذشته می‌پرسیم آیا آنها می‌توانند به درستی به یاد آورند که هر شب چند ساعت خوابیده‌اند تا بتوانند میانگین را به درستی اعلام کنند؟ برای حل این مشکل چه راهکاری پیشنهاد می‌کنید؟)

پاسخ: فراموش کردن ساعت‌های خواب می‌تواند بر نتایج تأثیر بگذارد. بهتر است پرسش‌نامه‌ای تهیه کنیم و از آنها بخواهیم در طول هفته هر شب میزان خواب خود را یادداشت کنند.

ب) نوع متغیر و مقیاس اندازه‌گیری مورد بررسی در این مطالعه را مشخص کنید.

پاسخ: کمی، نسبتی

ت) با استفاده از اطلاعات نمودارها، نتایج را به صورت تقریبی در جدول زیر بنویسید.

	کلاس ۱	کلاس ۲	کلاس ۳
میانگین	۷	۹	۸
انحراف معیار	۱	۲/۵	۱/۵

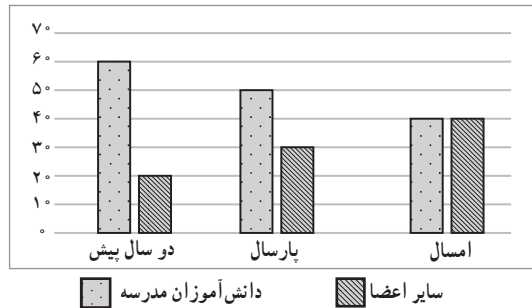
ث) چه عواملی می‌تواند نتایج این مطالعه را تحت تأثیر قرار دهد؟ چگونه می‌توانیم با بیان مسئله‌ای جدید پاسخ دقیق‌تری برای این مسئله پیدا کنیم؟

پاسخ: ممکن است یکی از کلاس‌ها در زمان انجام این مطالعه آزمونی داشته که میزان خواب دانش‌آموزان آن کلاس را تحت تأثیر قرار دهد. بهتر است از این نظر هماهنگی بین کلاس‌ها برقرار باشد یا اینکه مطالعه در زمان طولانی‌تری (چند هفته) انجام شود.

ج) چه کسانی می‌توانند در اجرای بهتر این مطالعه به ما کمک کنند؟ چگونه؟

پاسخ: متخصصین اختلالات خواب، روان‌شناسان، والدین و مشاوران آموزشی می‌توانند در اندازه‌گیری و طراحی یک پرسش‌نامه مناسب و اجرا به ما کمک کنند.

✓ مدرسه‌ای به منظور ترویج فرهنگ کتاب‌خوانی از دو سال پیش به غیر از دانش‌آموزان مدرسه، از خارج از مدرسه نیز عضو می‌پذیرد. نمودار میله‌ای زیر نشان‌دهنده روند تغییرات فراوانی اعضای جدید کتابخانه در دو گروه مذکور است.



الف) سال گذشته چند نفر از خارج مدرسه عضو کتابخانه شده‌اند؟

پاسخ: ۳۰ نفر

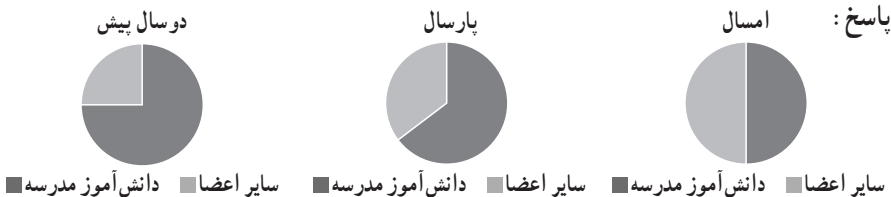
ب) با توجه به روند این تغییرات، پیش‌بینی می‌کنید سال آینده چه تعداد از دانش‌آموزان این مدرسه عضو

کتابخانه شوند؟

پاسخ: ۳۰ نفر

ت) با استفاده از نمودارهای میله‌ای داده شده، برای هریک از این سه سال یک نمودار دایره‌ای جداگانه

رسم کنید.

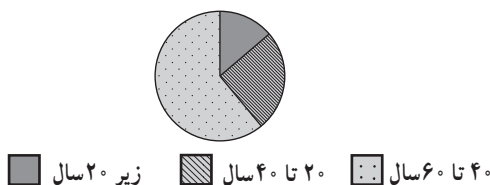


ث) به نظر شما چه عواملی موجب این روند تغییرات شده است؟

پاسخ: هر پاسخی از دانش‌آموزان که بتواند نتایج را توجیه کند پذیرفته است. مثلاً شلوغی فضای کتابخانه با افرادی ناآشنا، تمایل کتابخانه به ثبت‌نام افراد خارج از مدرسه به دلیل حق عضویت بیشتر یا کمک‌های آنها به کتابخانه و یا اینکه به مرور زمان با افزایش اعضای خارج مدرسه کتاب‌ها از سلاقی دانش‌آموزان دور شده است.

۸ نتیجه مطالعه‌ای فراوانی بازدیدکنندگان از یک سالن نمایش را در گروه‌های مختلف سنی در نمودار دایره‌ای زیر نمایش داده است. (در این نمودار ۵۴ درجه مربوط به گروه سنی زیر ۲۰ سال، ۹۰ درجه

مربوط به گروه سنی ۲۰ تا ۴۰ سال و مابقی مربوط به گروه سنی ۴۰ تا ۶۰ سال است)



الف) با توجه به این نمودار، چند درصد افراد بازدیدکننده بین ۴۰ تا ۶۰ سال سن دارند؟

پاسخ: ۶۰ درصد

ب) مسئول فروش بلیت این سالن پس از مشاهده نتایج، آن را غیر واقعی دانست و گفت: «بیشتر بازدیدکنندگان این سالن کمتر از ۴۰ سال دارند.» از موارد زیر کدام می‌توانند نتایج این مطالعه را بدین شکل از واقعیت دور کرده باشند؟ توضیح دهید.

- ✓ بسیاری از افراد کمتر از چهل سال تمایلی به پاسخ‌گویی به سؤالات پرسشگر نداشته‌اند.
- ✓ گردآوری داده‌ها در ساعات اداری انجام شده است و بازنشستگان بیشتری در نمونه قرار گرفته‌اند.
- ✗ هنگام گردآوری داده‌ها، دانش‌آموزان بسیاری از طرف مدرسه برای بازدید حضور داشته‌اند.
- ۹ جدول زیر نشان دهندهٔ تعداد تصادف خودروها و سرعت حرکت آنها در زمان تصادف است.

تعداد خودروهای تصادف کرده	۱۰	۲۰	۴۰	۷۰	۱۵۰	۲۴۰	۳۵۰	۴۵۰	۲۱۰	۱۳۰	۴۰
(کیلومتر در ساعت) سرعت	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{1}{150}$	$\frac{1}{240}$	$\frac{1}{350}$	$\frac{1}{450}$	$\frac{1}{210}$	$\frac{1}{130}$	$\frac{1}{40}$

همان‌طور که دیده می‌شود، تعداد تصادف خودروهایی که سرعتشان بیش از ۹۰ کیلومتر در ساعت بوده، کمتر است. پس: «هرچه سریع‌تر بروید، مطمئن‌تر و امن‌تر است.»

نتیجه‌گیری بالا چه اشکالی دارد؟ چرا این تصور ایجاد شده است؟

پاسخ: این نتیجه‌گیری صحیح نیست. زیرا نمی‌دانیم که در هر سرعت چند خودرو با آن سرعت حرکت کرده است. مثلاً اگر ۱۰ خودرو با سرعت بین ۱۱۰ تا ۱۲۰ حرکت کرده باشد، این نتایج نشان می‌دهد که صد درصد آنها تصادف داشته‌اند. برای تحلیل صحیح داده‌ها نباید فراوانی گزارش شود بلکه باید نسبت تعداد تصادف‌های هر دسته به تعداد خودروهایی که با سرعت آن دسته حرکت می‌کرده‌اند گزارش شود. (این اطلاعات در این مسئله موجود نیست.)

پروژه

انجام پروژه توسط دانش‌آموزان به صورت گروه‌های چند نفره از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و دانش‌آموزان مفاهیم و نکاتی را که در این درس آموخته‌اند در قالب انجام پروژه به خوبی درک خواهند کرد. انجام پروژه گروهی با موضوعی که دانش‌آموزان به آن علاقه‌مند هستند «توانایی نقد و بررسی نتایج مطالعهٔ دیگر گروه‌ها» را در آنها تقویت می‌کند. دانش‌آموزان با کارگروهی می‌آموزند که لزوماً پاسخ‌یکتایی برای حل هر مسئله وجود ندارد و می‌توان به شیوه‌های مختلف به راهی برای حل مسئله فکر کرد. انجام پروژه با هدایت معلم به دانش‌آموزان کمک می‌کند در تمامی گام‌های چرخهٔ حل مسئله به اهداف نخستین کار ببنندیشند و به محدودیت‌های انجام پروژه واقف باشند.