بسم الله الرحمن الرحیم

اَللّٰهُمَّ صَلِّ عَلیٰ مُحَمَّدٍ وَ آلِ مُحَمَّدٍ وَ عَجِّلْ فَرَجَهُمْ

راهنمای هنرآموز
ریاضی (۳)

کلیهٔ رشته‌های شاخهٔ فنی و حرفه‌ای ـ گروه صنعت

پایهٔ دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: راهنمای هنرآموز ریاضی (۳) ـ ۲۱۲۷۶۰

پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش

شناسه افزوده برنامه‌ریزی وتألیف: ناصربروجردیان، شهرناز بخشعلی‌زاده، نرگس یافتیان، زین‌العابدین دهقانی ابیانه، امیرحسین آشنا، محمدرضا حقیقی و زیبا فانی (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
ناصر بروجردیان، شهرناز بخشعلی‌زاده، نرگس یافتیان، زین‌العابدین دهقانی ابیانه، زیبا فانی و امیرحسین آشنا(اعضای گروه تألیف)

مدیریت آماده‌سازی هنری: ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

شناسه افزوده آماده‌سازی: جواد صفری(مدیر هنری) ـ زهره بهشتی‌شیرازی (صفحه‌آرا)

نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهرشمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش‌وپرورش (شهیدموسوی)
تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد‌پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹،
وب‌گاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir

ناشر : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن :۵ ـ ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰
صندوق پستی: ۱۳۹ـ ۳۷۵۱۵

چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ اول ۱۳۹۸

شابک ۷ – ۳۴۱۳ – ۰۵ – ۹۶۴ – ۹۷۸ ISBN 978 – 964 – 05 – 3413–7

دست توانای معلم است که چشم‌انداز آینده ما را ترسیم می‌کند.

امام خمینی «قُدِّسَ سِرُّهُ»

فهرست

سخنی با هنرآموز

از الزامات اجرای برنامه درسی، وجود محتوای آموزشی جهت تحقق نیازهای فردی و اجتماعی و اهداف نظام تعلیم و تربیت می‌باشد. با توجه به تغییرات نظام آموزشی که حول محور سند تحول بنیادین آموزش و پرورش انجام شد چرخش‌های جدیدی از وضع موجود به مطلوب صورت پذیرفت. از جمله به نقش معلم از آموزش‌دهنده صرف، به مربی، اسوه و تسهیل‌کننده یادگیری و نقش دانش‌آموز از یادگیرنده منفعل به فراگیرنده فعال، تربیت‌جو و مشارکت‌پذیر و نقش محتوا از کتاب درسی به‌عنوان تنها رسانه آموزشی به برنامه محوری و بسته یادگیری (آموزشی) نام برد. بسته یادگیری شامل رسانه‌های متنوعی از جمله کتاب درسی دانش‌آموز، کتاب همراه دانش‌آموز/ هنرجو، کتاب راهنمای تدریس معلم/ هنرآموز، نرم‌افزارهای آموزشی، فیلم آموزشی و پوستر و .... می‌باشد که با هم در تحقق اهداف یادگیری نقش ایفا می‌کنند. کتاب راهنمای هنرآموز جهت ایفای نقش تسهیل‌گری، انتقال‌دهنده و مرجعیت هنرآموز در نظام آموزشی برای هر کتاب درسی طراحی و تدوین شده است. در این رسانه سعی شده روش تدریس کلی و جلسه به جلسه به همراه تجهیزات، ابزارها و مواد مصرفی مورد نیاز هر جلسه، نکات مربوط به ایمنی و بهداشت فردی و محیطی آورده شود. همچنین نمونه طرح درس، تبیین پیچیدگی‌های یادگیری هنرجویان، هدایت و مدیریت کارگاه و کلاس در هنرستان، راهنمایی و پاسخ فعالیت‌های یادگیری و تمرین‌ها، بیان شاخص‌های اصلی جهت ارزشیابی شایستگی و ارائه بازخورد، اشاره به اشتباهات و مشکلات رایج در یادگیری هنرجویان و روش سنجش و نمره‌دهی، نکات آموزشی شایستگی‌های غیرفنی، ایمنی، بهداشت و ارگونومی، منابع مطالعاتی، نکات مهم در فرایند اجرا و آموزش در محیط یادگیری، بودجه‌بندی زمانی و صلاحیت‌های حرفه‌ای و تخصصی هنرآموزان و دیگر موارد آورده شده است.

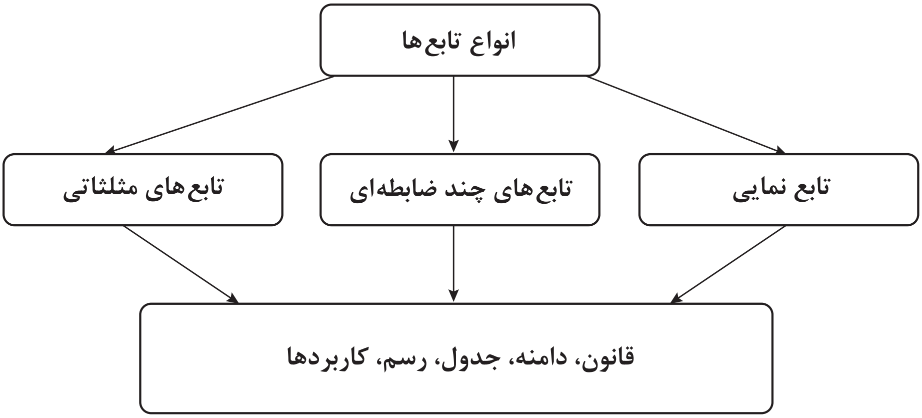
امید است شما هنرآموزان گرامی با دقت و سعه صبر در راستای تحقق اهداف بسته آموزشی که با کوشش و تلاش مؤلفین گرانقدر تدوین و تألیف شده موفق باشید.

دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش

فصل اول

کاربرد برخی تابع‌ها در زندگی روزمره

نقشه مفهومی فصل اوّل



اهداف کلی پودمان

۱ درک تابع چند ضابطه‌ای
۲ محاسبه مقدارهای تابع چندضابطه‌ای در نقاط داده شده از دامنهٔ آن
۳ رسم تابع‌های چندضابطه‌ای ساده (معادله‌های خط و درجهٔ دوم)
۴ مدل‌سازی و حل مسائل آشنا با استفاده از انواع تابع‌های چندضابطه‌ای
۵ درک رفتار تناوبی تابع‌های $\sin x$ و $\cos x$
۶ رسم تابع‌های مثلثاتی به کمک انتقال نمودار تابع‌های $\sin x$ و $\cos x$ دربارهٔ $[0,2\pi]$
۷ محاسبهٔ مقدار تابع‌های مثلثاتی در نقاط دامنه
۸ برحسب رادیان بودن متغیر تابع‌های مثلثاتی
۹ برقراری ارتباط بین حرکت روی دایره و نمودار تابع‌های $\sin x$ و $\cos x$
۱۰ مدل‌سازی و حل مسائل آشنا با استفاده از انواع تابع‌های مثلثاتی
۱۱ درک تابع‌های نمایی
۱۲ تشخیص رفتار صعودی یا نزولی تابع‌های نمایی
۱۳ محاسبه مقدار تابع نمایی
۱۴ مدل‌سازی و حل مسائل آشنا با استفاده از انواع تابع‌های نمایی

پیش‌نیازها

- آشنایی با مختصات نقطه و نمایش آن در صفحه مختصات
- آشنایی با مفهوم رابطه بین کمیت‌ها
- آشنایی با مفهوم تابع
- آشنایی با مفهوم متغیر در یک تابع
- آشنایی با قانون و دامنه یک تابع
- آشنایی با بازنمایی‌های مختلف تابع (به ویژه بازنمایی جدولی و نموداری)
- توانایی محاسبه مقدار تابع در یک نقطه از دامنه آن، با استفاده از قانون تابع و نمودار آن
- آشنایی با نمایش بازه‌ای زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی
- مهارت رسم نمودار با نقطه‌یابی
- مهارت رسم نمودار توابع در دامنه‌های مختلف
- آشنایی با زاویه چرخش
- آشنایی با نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های دلخواه
- آشنایی با واحدهای اندازه‌گیری زاویه، به ویژه رادیان
- آشنایی با شیب خط
- توانایی به‌دست آوردن شیب یک خط به کمک نسبت‌های مثلثاتی آن
- آشنایی با اعداد توان‌دار

بخش اول: تابع‌های چندضابطه‌ای

اهداف بخش

۱ درک تابع چند ضابطه‌ای
۲ محاسبه مقدارهای تابع چندضابطه‌ای در نقاط داده شده از دامنهٔ آن
۳ رسم تابع‌های چندضابطه‌ای ساده (معادله‌های خط و درجهٔ دوم)
۴ مدل‌سازی و حل مسائل آشنا با استفاده از انواع تابع‌های چندضابطه‌ای

واژه‌های کلیدی: قانون تابع، دامنه تابع، تعریف تابع

نگاه کلی به بخش

هدف این بخش آموزش تابع‌های چندضابطه‌ای است. نکته اصلی در تابع‌های چندضابطه‌ای وجود قانون‌های متعدد برای محاسبه مقدار تابع در نقاط مختلف از دامنه تابع است. همین نکته که قانون واحدی برای محاسبه مقدار تابع وجود ندارد در شروع اینِ بخش به‌صورت یک پرسش از طرف یکی از هنرجویان مطرح شده است. احتمالاً هنرجویان ممکن است تغییر قانون تابع را به عنوان روشی برای تعریف قابل قبول یک تابع نپذیرند و در این مورد سؤالاتی در ذهن آنها ایجاد شود. روش عمومی‌آموزش در این کتاب، طرح سؤال و ایجاد انگیزه و سعی در پاسخگویی به سؤال و نهایتاً رسیدن به آموزش مطلب مورد نظر است. پس از طرح این سؤال فعالیتی مطرح می‌شود که انجام آن موجب ساخته شدن یک تابع چندضابطه‌ای در یک زمینه طبیعی می‌شود. با این روش قابل قبول بودن تابع‌های چندضابطه‌ای توجیه می‌شود و با مثال‌ها و کاردرکلاس‌ها روی این مفهوم تمرین می‌شود.

ورود به مطلب

به شکل‌های متفاوتی می‌توان وارد مفهوم تابع‌های چندضابطه‌ای شد. بهترین حالت، طرح مسئله‌ای است که حل آن نیازمند استفاده از تابع‌های چندضابطه‌ای باشد. به هنگام حل این مسئله، هنرجو خودش این مفهوم را برای خودش می‌سازد و شما آن را نامگذاری می‌کنید.
راه مستقیم‌تر آن است که در یک دامنهٔ خاص در دو قسمت از آن دو خط متفاوت رسم کنید که نمودار یک تابع باشد و از هنرجویان پرسش کنید آیا این، نمودار یک تابع است؟ قانون این تابع چیست؟

راه دیگر طرح پرسش نسبت به قانون یک تابع است. آیا یک تابع می‌تواند چند قانون متفاوت داشته باشد؟ جواب طبیعی به این سؤال منفی است. ولی شما پرسش را اصلاح کنید و تفاوت قانون را در ناحیه‌های مختلف مطرح کنید. با ادامه روند این پرسش و پاسخ‌ها و هدایت هنرجویان به جواب‌های صحیح و رفع بدفهمی‌های احتمالی نسبت به مفهوم تابع، شما خواهید توانست این مفهوم را آموزش دهید.

فعالیت آموزشی

این بخش با طرح سؤال از طرف یکی از هنرجویان آغاز می‌شود که به دلیل نبود قانون ثابت برای محاسبه هزینه گاز، درباره تابع بودن هزینه گاز نسبت به گاز مصرفی دچار مشکل شده است. نهایتاً معلم راهنمایی می‌کند که در تعریف تابع وجود قانون ثابت مورد نظر نیست و انجام فعالیت(۱) خواسته شده است.

حل فعالیت (۱)

۱ $D_f=[۰\ ,۵۰۰]$

۲ جدول تکمیل شده:

مصرف برق در ماه	۰	۵	۱۰	۷۰	۱۰۰	۲۰۰	۵۰۰
هزینهٔ برق مصرفی(تومان)	۰	۰	۰	۳۵۰۰	۱۲۰۰۰۰	۲۴۰۰۰	۶۰۰۰۰

۳ الف) برای $۰\leq x<۱۰$ ضابطه: $f(x)=۰$.

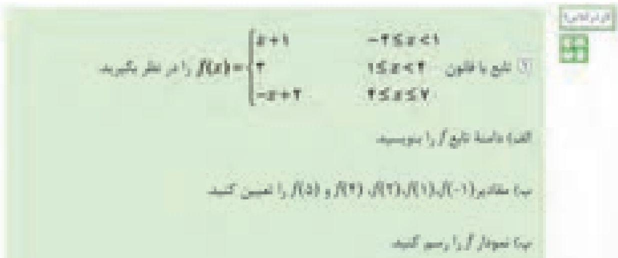
ب) برای $۱۰\leq x<۱۰۰$ ضابطه: $f(x)=۵۰x$.

پ) برای $۱۰۰\leq x\leq۵۰۰$ ضابطه: $f(x)=۱۲۰x$.

۴ $f(۳۷)$ هزینهٔ مصرف ۳۷ کیلووات برق می‌باشد و $f(۳۷)=۵۰\times۳۷=۱۸۵۰$.

$f(۱۲۰)$ هزینهٔ مصرف ۱۲۰ کیلووات برق می‌باشد و $f(۱۲۰)=۱۲۰\times۱۲۰=۱۴۴۰۰$.

پس از این فعالیت و جمع‌بندی آن، مفهوم تابع چندضابطه‌ای ارائه می‌شود و در مثال‌هایی این مفهوم توضیح داده می‌شود. سپس به کاردرکلاس(۱) می‌رسیم.

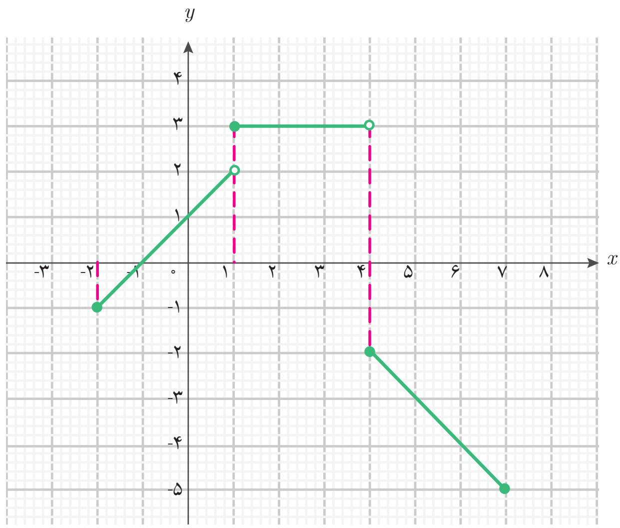


حل کار در کلاس (۱)

۱ الف) دامنه $D_f=[-۲,۷]$

ب) $f(-۱)=۰$ ، $f(۱)=۳$ ، $f(۲)=۳$ ، $f(۴)=-۲$ ، $f(۵)=-۳$

پ) نمودار تابع:



۲ دامنه $D_f=[۰,۱۰۰]$

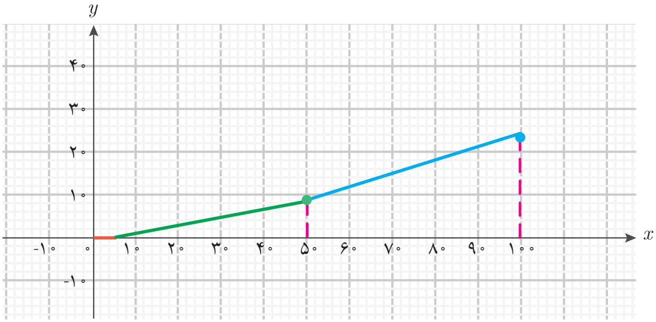
ضابطه :

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & ۰\le x<۵ \\ ۲۰۰(x-۵) & ۵\le x\le ۵۰ \\ ۹۰۰۰+۳۰۰(x-۵۰) & ۵۰<x\le ۱۰۰ \end{cases}$$

که سادهٔ شدهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & ۰\le x<۵ \\ ۲۰۰x-۱۰۰۰ & ۵\le x<۵۰ \\ ۳۰۰x-۶۰۰۰ & ۵۰\le x\le ۱۰۰ \end{cases}$$

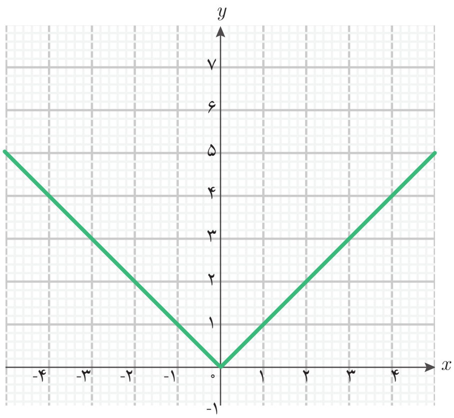
برای رسم بهتر نمودار این تابع بهتر است $\dfrac{f(x)}{۱۰۰۰}$ را رسم کنیم. نمودار $\dfrac{f(x)}{۱۰۰۰}$ به شکل صفحه بعد است.



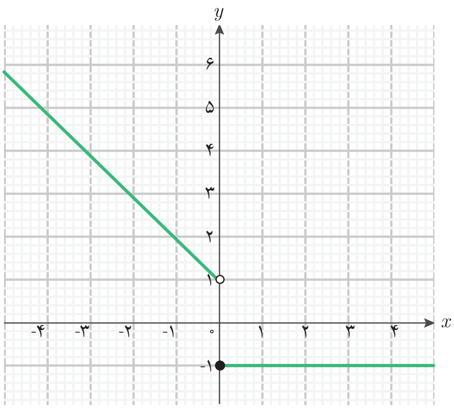
حل مسائل

۱ مهارت‌ها و فرایندها : استدلال، بازنمایی

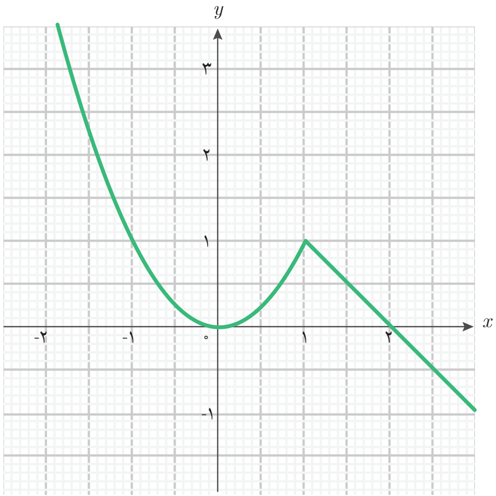
$$f(x)=\begin{cases}-x & x<0\\ x & 0\leq x\end{cases}$$



$$g(x)=\begin{cases}-x+1 & x<0\\ -1 & 0\leq x\end{cases}$$



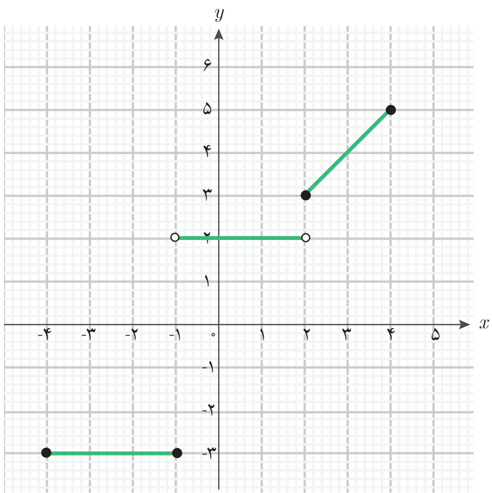
$$k(x)=\begin{cases} x^{۲} & x<۱ \\ -x+۲ & ۱\le x \end{cases}$$



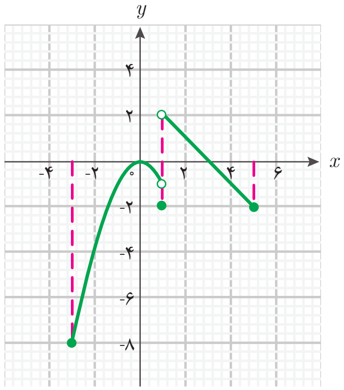
۲ مهارت‌ها و فرایندها : بازنمایی، استدلال

با توجه به نمودار داده شده، در بازه [۱-,۴-] قانون تابع به‌صورت $f(x)=-۳$ (تابع ثابت) است. در بازه (۱,۲-) قانون تابع به‌صورت $f(x)=۲$ (تابع ثابت) می‌باشد. در بازه [۲,۴]، قانون تابع به‌صورت $f(x)=x+۱$ می‌باشد. برای پیدا کردن قانون تابع خطی کافیست از روی نمودار، شیب خط مشخص شود و با امتداد دادن خط محل برخورد آن با محور عرض‌ها مشخص شود.

$$f(x)=\begin{cases} -۳ & -۴\le x\le -۱ \\ ۲ & ۱<x<۲ \\ x+۱ & ۲\le x\le ۴ \end{cases}$$



۳ مهارت‌ها و فرایندها : بازنمایی‌ها، استدلال



الف) دامنه تابع g، $[-۳, ۵]$ می‌باشد.

ب) با توجه به اینکه ۲- در بازه $[-۳, ۱)$ است، و در این بازه، قانون تابع به‌صورت $g(x)=-x^۲$ است داریم:

$g(-۲)=-(-۲)^۲=-۴$

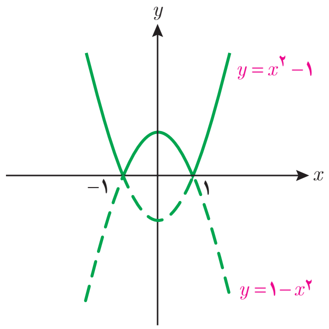
برای محاسبه مقدار تابع در $x=۱$، در این نقطه، قانون تابع به‌صورت $g(x)=-۲$ است. پس $g(۱)=-۲$.

چون ۳ در بازه $[۱, ۵]$ قرار دارد، و قانون تابع روی این بازه به‌صورت $g(x)=-x+۳$ است، نتیجه می‌شود:

$g(۳)=-(۳)+۳=۰$

پ) در بازه $[-۳, ۱)$، قانون تابع به‌صورت $g(x)=-x^۲$ است و نمودار آن را در این بازه رسم می‌کنیم. در $x=۱$، قانون تابع به‌صورت $g(x)=-۲$ و نمودار آن، نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$ است. در بازه $(۱, ۵]$، قانون تابع به‌صورت $g(x)=-x+۳$ است و نمودار آن قسمتی از خط است که آن را در این بازه رسم می‌کنیم.

۴ مهارت‌ها و فرایندها : استدلال، بازنمایی



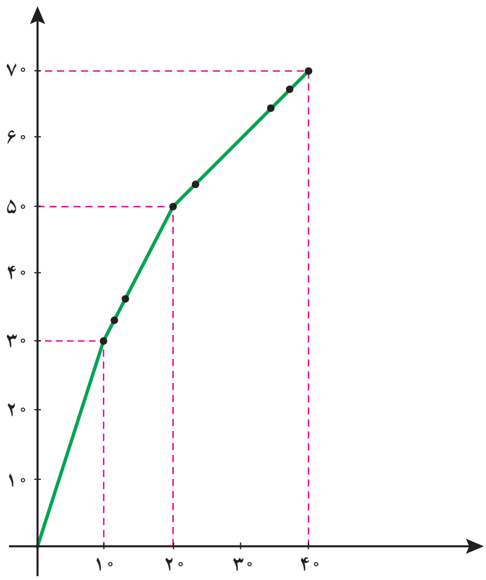
در بازه $(-\infty,-۱]$ قانون تابع به‌صورت $f(x)=x^۲-۱$ است، نمودار آن را در این بازه رسم می‌کنیم. (برای این منظور می‌توان نمودار تابع $y=x^۲$ را یک واحد به پایین منتقل کرده و سپس بخشی از نمودار که در بازهٔ $(-\infty,-۱]$ است را در نظر گرفت. مانند بالا در بازه $(-۱,۱)$ قانون تابع به‌صورت $f(x)=۱-x^۲$ است، نمودار آن را در این بازه رسم می‌کنیم. برای این منظور می‌توان نمودار تابع $f(x)=-x^۲$ را یک واحد به بالا منتقل کنیم و سپس بخشی از نمودار را که در بازهٔ $(-۱,۱)$ قرار دارد را در نظر گرفت. در بازهٔ $[۱,+\infty)$ قانون تابع به‌صورت $f(x)=x^۲-۱$ که برای قسمت اول آن را رسم کرده‌ایم، حال بخشی از آن را انتخاب می‌کنیم که در بازه $[۱,+\infty)$ قرار داشته باشد.

۵ مهارت‌ها و فرایندها : حل مسئله، پیوندها و اتصالات، استدلال

اگر x تعداد کارت‌های خریداری شده و $f(x)$ هزینه پرداخت شده بر حسب هزارتومان باشد؛ با توجه به جدول داده شده داریم:

$$f(x)=\begin{cases}۳x & ۰\leq x\leq ۱۰\\ ۳۰+۲(x-۱۰) & ۱۱\leq x\leq ۲۰\\ ۵۰+(x-۲۰) & ۲۱\leq x\leq ۴۰\end{cases}$$

دامنهٔ این تابع مجموعهٔ $\{۰,۱,۲,...,۴۰\}$ است. اگر دامنهٔ این تابع را به‌صورت بازهٔ $[۰,۴۰]$ در نظر بگیریم، نمودار آن به شکل زیر است. البته، دامنهٔ این تابع مجموعه‌ای گسسته است و نمودار واقعی آن به‌صورت تعدادی نقطهٔ گسسته از نمودار زیر است که برخی نقاط آن در شکل زیر مشخص شده است.



۶ مهارت‌ها و فرایندها : حل مسئله، پیوند و اتصالات

با توجه به اینکه t زمان سپری شده پس از تزریق انسولین بر حسب ساعت می‌باشد و با توجه به اینکه زمان تزریق ساعت ۷ صبح بوده است، داریم :

الف) در ساعت ۸ صبح، یک ساعت از زمان تزریق گذشته است و در نتیجه $t=۱$. با توجه به قانون تابع می‌توان گفت:

$f(۱)=۴۰\times۱+۱۰۰=۱۴۰$ به عبارت دیگر سطح انسولین پس از یک ساعت از تزریق ۱۴۰ می‌باشد.

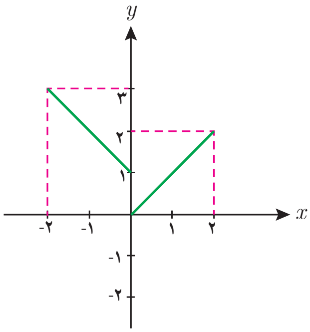
ب) در ساعت ۱۱ صبح، سه ساعت از زمان تزریق گذشته است، بنابراین t=۴ و باید طبق ضابطهٔ دوم تابع عمل کنیم و داریم : f(۴) =۲۲۰

پ) در ساعت ۴ بعد از ظهر، نه ساعت از زمان تزریق گذشته است، بنابراین t=۹ و باید طبق ضابطهٔ سوم تابع عمل کنیم و داریم : f(۹)=-۸۰×۹+۸۶۰=۱۴۰

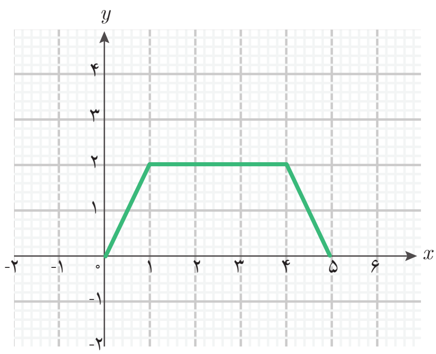
ت) در ساعت ۶ بعد از ظهر، یازده ساعت از زمان تزریق گذشته است، بنابراین t=۱۱ و باید طبق ضابطهٔ چهارم تابع عمل کنیم و داریم: f(۱۱)=۶۰

۷ مهارت‌ها و فرایندها: حل مسئله، بازنمایی‌های چندگانه، استدلال کردن، پرورش تفکر بصری

توابع بسیاری را می‌توان مثال زد که به‌طور نمونه در زیر یک مورد آمده است :



۸ مهارت‌ها و فرایندها : حل مسئله، بازنمایی‌های چندگانه، استدلال کردن



وضعیت‌های مختلفی از زندگی روزمره را می‌توان مثال زد. به‌طور نمونه می‌توان گفت:

اگر محور xها زمان سپری شده بر حسب ساعت و محور yها فاصله هنرجو (برحسب کیلومتر) تا منزل یکی از دوستان او باشد، می‌توان گفت: هنرجویی صبح از منزل خارج می‌شود تا به منزل دوست خود برود. پس از یک ساعت که به‌طور یکنواخت راه رفته است با طی ۲ ساعت به خانه دوست خود می‌رسد. ۳ ساعت در منزل دوست خود می‌ماند و سپس به خانه باز می‌گردد و پس از یک ساعت به منزل می‌رسد.

۹ مهارت‌ها و فرایندها: حل مسئله، بازنمایی‌های چندگانه، استدلال کردن، پرورش تفکر بصری

مطابق با آخرین مصوبه وزیر نیرو، تعرفه‌های برق و شرایط عمومی‌آنها برای کلیه مشترکین تحت پوشش شرکت‌های برق منطقه‌ای و توزیع نیروی برق برای اجرا از تاریخ ۹۵/۵/۱ به شرح زیر است :

۱ـ۱ـ تعرفه مناطق عادی و ماه‌های غیرگرم مناطق گرمسیر

متوسط انرژی مصرفی ماهانه (کیلووات ساعت در ماه)	قیمت پایه هر کیلو وات ساعت (ریال)
۰ تا ۱۰۰	۴۵۰
مازاد بر ۱۰۰ تا ۲۰۰	۵۳۵
مازاد بر ۲۰۰ تا ۳۰۰	۱۱۲۵
مازاد بر ۳۰۰ تا ۴۰۰	۲۰۳۵
مازاد بر ۴۰۰ تا ۵۰۰	۳۳۴۵
مازاد بر ۵۰۰ تا ۶۰۰	۳۹۳۶
مازاد بر ۶۰۰	۴۴۴۶

۱ ـ ۲ـ تعرفه ماه‌های گرم در مناطق گرمسیر ۱

متوسط انرژی مصرفی ماهانه (کیلووات ساعت در ماه)	قیمت پایه هر کیلو وات ساعت (ریال)
۰ تا ۱۰۰۰	۱۵۰
مازاد بر ۱۰۰۰ تا ۱۵۰۰	۱۶۶
مازاد بر ۱۵۰۰ تا ۲۰۰۰	۱۸۰
مازاد بر ۲۰۰۰ تا ۳۵۰۰	۷۵۰
مازاد بر ۳۵۰۰ تا ۴۵۰۰	۱۳۵۱
مازاد بر ۴۵۰۰ تا ۶۰۰۰	۱۷۳۶
مازاد بر ۶۰۰۰	۲۰۲۵

تعرفه شماره ۱ : مصارف خانگی

۱ـ۳ـ تعرفه ماه‌های گرم در مناطق گرمسیر ۲

متوسط انرژی مصرفی ماهانه (کیلووات ساعت در ماه)	قیمت پایه هر کیلو وات ساعت (ریال)
۰ تا ۱۰۰۰	۳۳۰
مازاد بر ۱۰۰۰ تا ۱۵۰۰	۷۵۰
مازاد بر ۱۵۰۰ تا ۲۰۰۰	۱۲۷۵
مازاد بر ۲۰۰۰ تا ۳۵۰۰	۱۵۷۵
مازاد بر ۳۵۰۰ تا ۴۵۰۰	۱۸۷۶
مازاد بر ۴۵۰۰ تا ۶۰۰۰	۲۰۲۵
مازاد بر ۶۰۰۰	۲۱۷۶

۱ـ۴ـ تعرفه ماه‌های گرم در مناطق گرمسیر ۳

متوسط انرژی مصرفی ماهانه (کیلووات ساعت در ماه)	قیمت پایه هر کیلو وات ساعت (ریال)
۰ تا ۱۰۰۰	۹۷۵
مازاد بر ۱۰۰۰ تا ۱۵۰۰	۹۷۶
مازاد بر ۱۵۰۰ تا ۲۰۰۰	۱۷۳۶
مازاد بر ۲۰۰۰ تا ۳۵۰۰	۱۸۳۶
مازاد بر ۳۵۰۰ تا ۴۵۰۰	۲۰۲۵
مازاد بر ۴۵۰۰ تا ۶۰۰۰	۲۱۷۶
مازاد بر ۶۰۰۰	۲۳۳۵

۱ـ۵ـ تعرفه ماه‌های گرم در مناطق گرمسیر ۴

متوسط انرژی مصرفی ماهانه (کیلووات ساعت در ماه)	قیمت پایه هر کیلو وات ساعت (ریال)
۰ تا ۱۰۰	۳۶۱
مازاد بر ۱۰۰ تا ۲۰۰	۴۲۱
مازاد بر ۲۰۰ تا ۳۰۰	۷۵۰
مازاد بر ۳۰۰ تا ۴۰۰	۱۲۰۰
مازاد بر ۴۰۰ تا ۵۰۰	۱۷۲۶
مازاد بر ۵۰۰ تا ۶۰۰	۲۲۵۱
مازاد بر ۶۰۰	۲۷۰۱

حداکثر بهای پرداختی بدون احتساب اضافه پرداختی و تخفیف بند ۱ـ۱ شرایط اختصاصی به ازای هر کیلووات ساعت به‌طور متوسط در مناطق عادی و ماه‌های غیر گرم مناطق گرمسیر ۱۶۵۰ ریال و در ماه‌های گرم مناطق گرمسیر ۱۶۵۰ ریال می‌باشد.

شرایط اختصاصی مربوط به مصارف خانگی

۱ـ۱ـ به‌منظور تشویق مشترکین برای جابه‌جایی مصرف از ساعات اوج بار، پس از محاسبه بهای برق مصرفی براساس جداول فوق، اضافه پرداختی مصارف اوج بار و تخفیف مصارف غیر اوج بار برای آن دسته از مشترکینی که دارای لوازم اندازه‌گیری چند زمانه می‌باشند به شکل زیر محاسبه می‌شود :

کل مصرف اوج بار در دوره × ۴۵۰ ریال = اضافه پرداختی مصارف اوج بار

تخفیف مصارف غیر اوج بار =
- **(برای مشترکینی که دارای لوازم اندازه‌گیری سه‌زمانه می‌باشند) کل مصرف کم‌باری در دوره × ۳۳۵ ریال**
- **(برای مشترکینی که دارای لوازم اندازه‌گیری دوزمانه می‌باشند) کل مصرف غیر اوج بار در دوره × ۹۰ ریال**

تبصره : ارقام فوق برای ماه‌های گرم مناطق گرمسیر ۱ با ضریب یک سوم و مناطق گرمسیر ۲ و ۳ و ۴ با ضریب دو سوم محاسبه می‌شود.

۱ـ۲ـ بهای برق مشترکین جانباز ۲۵ درصد و بیشتر در مناطق عادی و گرمسیر به ترتیب با کسر ۸۰ و ۱۰۰ کیلو وات ساعت از متوسط مصرف ماهانه انرژی برق آنها محاسبه می‌گردد.
۱ـ۳ـ به تشخیص هیئت مدیره شرکت می‌توان برای خانوارهایی که در یک واحد مسکونی زندگی می‌کنند کد خانوار به شرح زیر در نظر گرفت :

$$\frac{\text{مصرف ماهانه قرائت شده}}{\text{کد خانوار}} = \text{متوسط مصرف ماهانه مبنای صدور صورت‌حساب برای هر یک از خانوارها}$$

تعداد خانوار ساکن در یک واحد مسکونی = کد خانوار (حداکثر برابر ۵)

۱ـ۴ـ بهای برق ماهانه با فروش برای مصارف روستایی براساس جدول تعرفه‌های خانگی بر حسب مورد، محاسبه و دریافت می‌گردد. مصرف هر مشترک به شرح زیر تعیین می‌شود :
تعداد مشترک در کل مصرف ماهانه کنتور اشتراکی = متوسط مصرف مشترک
تبصره ۱: به منظور تأمین هزینه‌های اداری برق روستا شرکت به ازای هر مشترک مبلغ ۲۲۲۰ ریال از مبلغ صورت‌حساب کسر می‌نماید.
تبصره ۲ : شورای اسلامی روستا (نگهدارنده شبکه برق) مکلف است بهای برق تحویلی به مشترکین را بر حسب مورد براساس تعرفه‌های مربوطه (۱، ۲، ۳، ۴، ۵) محاسبه و از مصرف‌کنندگان دریافت نماید.
۱ـ۵ـ دوره زمانی و محدوده تحت پوشش مناطق گرمسیر ۳، ۲، ۱ و ۴ طبق جدول صفحه بعد تعیین می‌شود :

منطقه	محدوده تحت پوشش	مدت (ماه)	دوره زمانی
گرمسیر (۲)	کلیه شهرستان‌های استان خوزستان، بوشهر و هرمزگان و شهرستان‌های چابهار و کارک و شهرستان دهلران	۹	اول فروردین تا پایان آذر
	شهرستان‌های دوگنبدان و لیکک	۷	شانزدهم فروردین تا پانزدهم آبان
	شهرستان‌های لامرد، مهره جیرفت، کهنوج، قلعه گنج، عنبرآباد، رودبار جنوب، قوچان و بخش لاریاب	۷	اول فروردین تا پایان مهر
	شهرستان‌های مهران، نورشهر، آبادان و شهرستان‌های نیک شهر	۶	اول اردیبهشت تا پایان مهر
	شهرستان لارستان، عنج و گولش	۵	اول خرداد تا پایان مهر
	شهرستان‌های ایرانشهر و سریار، کارزین و فراشبند	۴	اول خرداد تا پایان مرداد
	شهرستان گنبد	۳	اول تیر تا پایان شهریور
	شهرستان‌های کازرون، خشت و کمارج، جهرم، داراب و زرین دشت	۲	مرداد و شهریور
	شهرستان‌های ماهدشت، چرام، ارزون، شاهمران، بم، فهرج، زابل، رهک، هیرمند و نیمروز	۶	اول اردیبهشت تا پایان مهر
	شهرستان ایذه	۳	اردیبهشت، خرداد و مهر
	شهرستان‌های ایرانشهر، شیراز، قیر، کارزین و فراشبند	۳	اردیبهشت، شهریور و مهر
	شهرستان‌های کازرون، خشت و کمارج، جهرم، داراب و زرین دشت	۲	خرداد و تیر
	شهرستان لارستان، خنج و گرنی	۱	اردیبهشت
گرمسیر (۳)	شهرستان‌های گیلانغرب، سرپل‌ذهاب، قصر شیرین، روستاهای سرقلعه و جمگران	۳	اول اردیبهشت تا پایان مهر
	استان قم	۴	اول خرداد تا پایان شهریور
	شهرستان‌های گنبد، کلاله، مینو دشت و آق قلا	۳/۵	اول خرداد تا ۱۵ شهریور
	شهرستان طبس	۳	اول خرداد تا پایان مرداد
	شهرستان پل دختر	۳	اول تیر تا پایان شهریور
	شهرستان ممسنی و نورباف	۲	تیر و مرداد

گرمسیر (۴)	شهرستان و سلم	۶	اول خرداد تا پایان شهریور
	کلیه شهرستان‌های استان گلستان به استثنای شهرستان‌های (گنبد، کلاله، مینودشت و آق قلا)	۳/۵	اول خرداد تا ۱۵ شهریور
	شهرستان‌های حصرآباد، پارس آباد، اسلاندوز و پله‌سوار و ارگه	۳	اول تیر تا پایان شهریور
	شهرستان‌های بافق و میرجاوه	۳	اول خرداد تا پایان مرداد
	کلیه شهرهای استان گیلان به استثناء (ماسوله، دیلمان و جیرنده)، کلیه شهرستان‌های استان مازندران به استثناء (بلده، رینه، مجوره، محمودآباد، کیاسر، مرزن آباد، کلاردشت و آلاشت)	۳	۱۵ خرداد تا ۱۵ شهریور
	شهرستان‌های گرمسار، کاشان، آران و بیدگل، خور و بیابانک، ساوه و زرند، یزد، شلگر، میبد، اردکان، فسا و سیروان	۲	اول تیر تا پایان مرداد
	شهرستان طبس	۲	اردیبهشت و شهریور
	شهرستان ممسنی (نورآباد)	۲	خرداد و شهریور

۱ـ۶ـ در مناطق گرمسیر؛ در صورت‌حساب‌هایی که دورهٔ مصرف آنها شامل ایام گرم و غیرگرم می‌باشد، انرژی مصرفی براساس نسبت ضرایب جدول زیر محاسبه می‌شود.

منطقه گرمسیر	ضریب ایام گرم	ضریب ایام غیر گرم
منطقه گرمسیر یک	۴	۱
منطقه گرمسیر دو	۳	۱
منطقه گرمسیر سه	۲	۱
منطقه گرمسیر چهار	۱/۳	۱

با توجه به جداول داده شده می‌توان تابع چند ضابطه‌ای هزینه مصرف برق برحسب میزان مصرف برق در ماه را در هر منطقه از کشور نوشت.

بخش دوم: تابع‌های مثلثاتی

اهداف بخش

۱ درک رفتار تناوبی تابع‌های $\sin x$ و $\cos x$

۲ رسم تابع‌های مثلثاتی به کمک انتقال نمودار تابع‌های $\sin x$ و $\cos x$ در بازهٔ $[0,2\pi]$

۳ محاسبهٔ مقدار تابع‌های مثلثاتی در نقاط دامنه

۴ برحسب رادیان بودن متغیر تابع‌های مثلثاتی

۵ برقراری ارتباط بین حرکت روی دایره و نمودار تابع‌های $\sin x$ و $\cos x$

۶ مدل‌سازی و حل مسائل آشنا با استفاده از انواع تابع‌های مثلثاتی

واژه‌های کلیدی: مختصات نقطه، زاویه چرخش، نسبت مثلثاتی

نگاه کلی به بخش

هدف این بخش، آشنایی با تابع‌های مثلثاتی است. در این بخش برای رسیدن به تابع‌های مثلثاتی، مانند سال قبل، از زمینه حرکت چرخ‌وفلک استفاده شده است. در اینجا، رابطهٔ دو کمیت زاویهٔ چرخش یک کابین و ارتفاع کابین از سطح زمین مورد پرسش قرار می‌گیرد و در یک فعالیت به این پرسش پاسخ داده می‌شود. نتیجه این فعالیت یافتن یک تابع مثلثاتی است و در ادامه، تابع‌های مثلثاتی اساسی $\sin x$ و $\cos x$ با جزئیات بیشتر از لحاظ نموداری و رفتارهای صعودی و نزولی، مورد بررسی قرار می‌گیرند. همچنین، ارتباط بین نمودار این تابع‌های اساسی و حرکت روی محیط یک دایره توضیح داده می‌شود.

ورود به مطلب

بهترین شروع تابع‌های مثلثاتی، ارائه یک زمینه مناسب است که در آن دو کمیت مرتبط حضور داشته باشند که در قانون تابع توصیف‌کننده این رابطه، نسبت‌های مثلثاتی به‌کار رفته باشد. در کتاب از زمینه حرکت چرخ‌وفلک و کمیت‌های زاویهٔ چرخش و ارتفاع از سطح زمین استفاده شده است. پس از یافتن تابع مثلثاتی توصیف نموداری تابع و تغییرات مقادیر تابع و هم‌زمان تفسیر معنای آن در زمینه ارائه شده می‌تواند آموزش مناسبی از تابع‌های مثلثاتی باشد.

فعالیت آموزشی

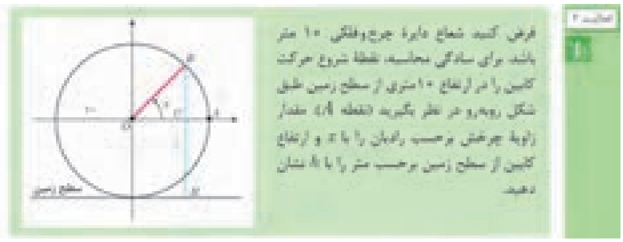
در ابتدای این بخش، سؤالی توسط یک هنرجو مطرح می‌شود که پاسخ آن در فعالیت(۲) به‌دست می‌آید.

اهداف موضوعی:

- درک مفهوم تابع مثلثاتی.

فرایندها:

- مدل‌سازی.
- پیوندها و اتصالات (ریاضی و خارج ریاضی).



فرض کنید شعاع دایرهٔ چرخ‌وفلکی ۱۰ متر باشد. برای سادگی محاسبه، نقطهٔ شروع حرکت کابین را در ارتفاع ۱۰ متری از سطح زمین طبق شکل روبه‌رو در نظر بگیرید (نقطهٔ A). مقدار زاویهٔ چرخش برحسب رادیان را با x و ارتفاع کابین از سطح زمین برحسب متر را با h نشان دهید.

حل فعالیت (۲)

۱ در نقطهٔ ابتدای حرکت که زاویهٔ چرخش صفر است، ارتفاع ۱۰ متر است.

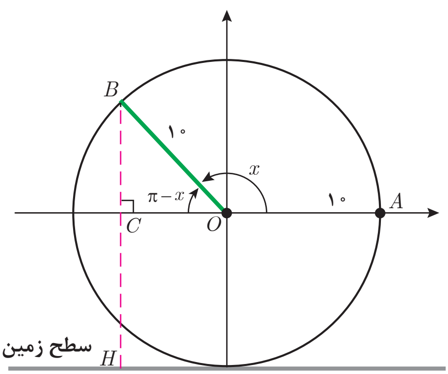
۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCB با استفاده از تعریف سینوس زاویه‌های تند داریم:

$$BC = 10\sin x$$

۳ $h = BC + CH = 10\sin x + 10$

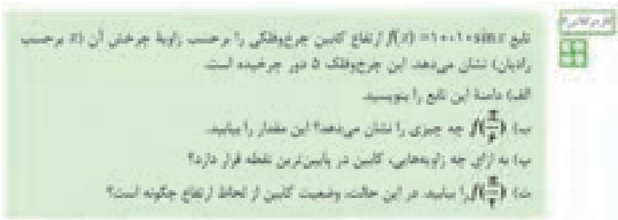
۴ در این حالت داریم:

$$h = BH = BC + CH = 10\sin(\pi - x) + 10 = 10 + 10\sin x$$



پس از این فعالیت نمونه‌ای از تابع‌های مثلثاتی ساخته شده است. دامنهٔ این تابع‌ها بستگی به موقعیت و وضعیتی دارد که این تابع‌ها برای توصیف آنها ساخته می‌شوند. بنابراین، در مورد هر تابع مثلثاتی باید جداگانه دامنهٔ آنها را مورد بررسی قرار داد. نکتهٔ مهم در تابع‌های مثلثاتی آن است که طبق قرارداد، متغیر آنها زاویه‌ای بر حسب رادیان است.

پس از ذکر مثال‌هایی به عنوان تمرین و تثبیت یادگیری، کار درکلاس(۲) مطرح می‌شود.


کار در کلاس

تابع $f(x)=10+10\sin x$ ارتفاع کابین چرخ‌وفلکی را برحسب زاویهٔ چرخش آن (x برحسب رادیان) نشان می‌دهد. این چرخ‌وفلک ۵ دور چرخیده است.

الف) دامنهٔ این تابع را بنویسید.

ب) $f(\frac{\pi}{6})$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟ این مقدار را بیابید.

پ) به ازای چه زاویه‌هایی، کابین در پایین‌ترین نقطه قرار دارد؟

ت) $f(\frac{\pi}{6})$ را بیابید. در این حالت وضعیت کابین از لحاظ ارتفاع چگونه است؟

حل کاردرکلاس (۲)

الف) از آنجا که چرخ‌وفلک ۵ دور چرخیده است و به ازای هر دور، زاویه چرخش 2π رادیان بیشتر می‌شود، دامنهٔ این تابع عبارت است از: $D=[0,10\pi)$

ب) $f(\frac{\pi}{6})$ ارتفاع کابین در زاویهٔ چرخش $\frac{\pi}{6}$ را نشان می‌دهد. $f(\frac{\pi}{6})=15$.

پ) در زاویه‌های $\frac{3\pi}{2}, 2\pi+\frac{3\pi}{2}, 4\pi+\frac{3\pi}{2}, 6\pi+\frac{3\pi}{2}, 8\pi+\frac{3\pi}{2}$ کابین در سطح زمین قرار می‌گیرد و ارتفاع صفر است.

ت) $f(\frac{\pi}{6})=20$، در این حالت، کابین در بالاترین ارتفاع قرار دارد.

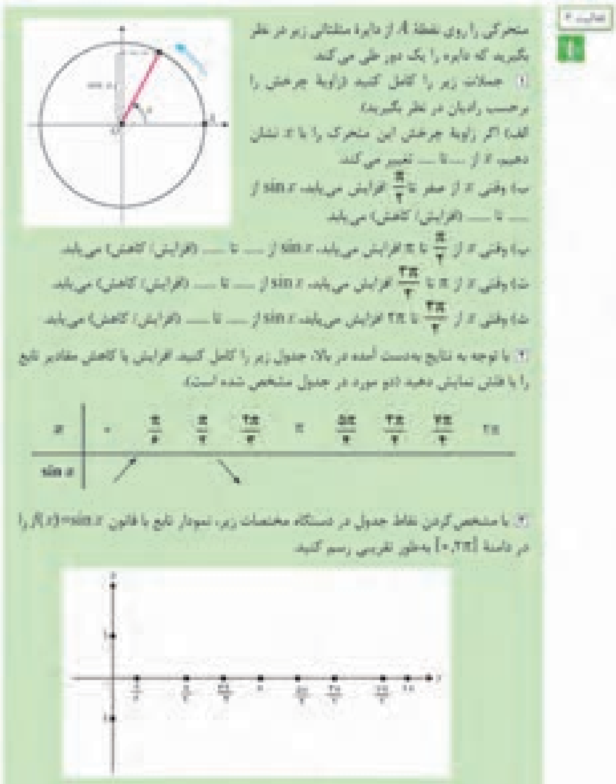
در ادامه تابع مهم $\sin x$ مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا در فعالیت (۳) رفتار این تابع بررسی می‌شود.

اهداف موضوعی:

- شناخت رفتار (صعودی/ نزولی) تابع $\sin x$.
- آشنایی با جدول تغییرات تابع $\sin x$.
- کسب مهارت رسم نمودار تقریبی تابع $\sin x$ از طریق نقطه‌یابی.

فرایندها:

- پیوندها و اتصالات (ریاضی و خارج ریاضی).
- بازنمایی‌ها.



۱

الف) از آنجا که متحرک فقط یک دور دایره را طی می‌کند، x از صفر تا ۲π تغییر می‌کند.

ب) وقتی x از صفر تا $\frac{\pi}{۲}$ افزایش می‌یابد $\sin x$ از صفر تا ۱، افزایش می‌یابد.

پ) وقتی x از $\frac{\pi}{۲}$ تا π افزایش می‌یابد $\sin x$ از ۱ تا ۰، کاهش می‌یابد.

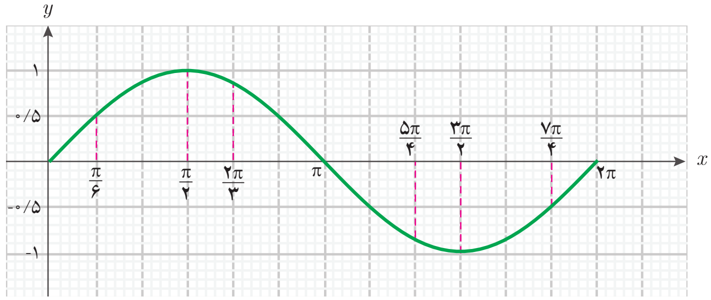
ت) وقتی x از π تا $\frac{۳\pi}{۲}$ افزایش می‌یابد $\sin x$ از ۰ تا ۱ـ، کاهش می‌یابد.

ث) وقتی x از $\frac{۳\pi}{۲}$ تا ۲π افزایش می‌یابد $\sin x$ از ۱ـ تا ۰، افزایش می‌یابد.

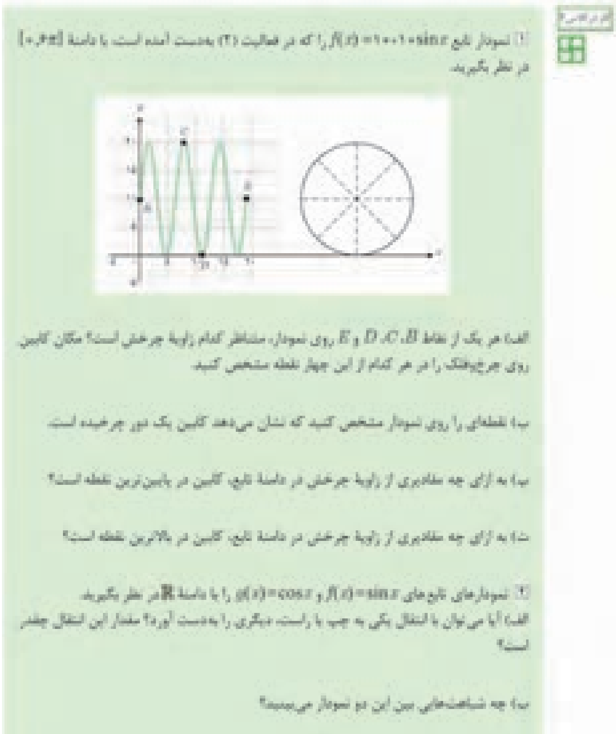
۲

x	۰		$\frac{\pi}{۶}$		$\frac{\pi}{۲}$		$\frac{۲\pi}{۳}$		π		$\frac{۵\pi}{۴}$		$\frac{۳\pi}{۲}$		$\frac{۷\pi}{۴}$		۲π
$\sin x$	۰	$\nearrow$	$\frac{۱}{۲}$	$\nearrow$	۱	$\searrow$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\searrow$	۰	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\searrow$	۱ـ	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\nearrow$	۰

۳ نمودار :



در ادامه، نمودار تابع $\sin x$ در دامنه‌های دیگر نیز توضیح داده می‌شوند. در مثال‌ها توضیحات مشابه دربارهٔ تابع $\cos x$ نیز ارائه می‌شود. نهایتاً در کار در کلاس (۳) آن تابع مثلثاتی که ارتفاع کابین یک چرخ‌وفلک را بر حسب زاویهٔ چرخش بیان می‌کرد مورد بررسی قرار می‌گیرد.



۱ نمودار تابع $f(x)=۱۰+۱۰\sin x$ را که در فعالیت (۲) بدست آمده است با دامنهٔ $[۰,۶\pi]$ در نظر بگیرید.

الف) هر یک از نقاط B، C، D و E روی نمودار، متناظر کدام زاویهٔ چرخش است؟ مکان کابین روی چرخ‌وفلک را در هر کدام از این چهار نقطه مشخص کنید.

ب) نقطه‌ای را روی نمودار مشخص کنید که نشان می‌دهد کابین یک دور چرخیده است.

پ) به ازای چه مقادیری از زاویهٔ چرخش در دامنهٔ تابع، کابین در پایین‌ترین نقطه است؟

ت) به ازای چه مقادیری از زاویهٔ چرخش در دامنهٔ تابع، کابین در بالاترین نقطه است؟

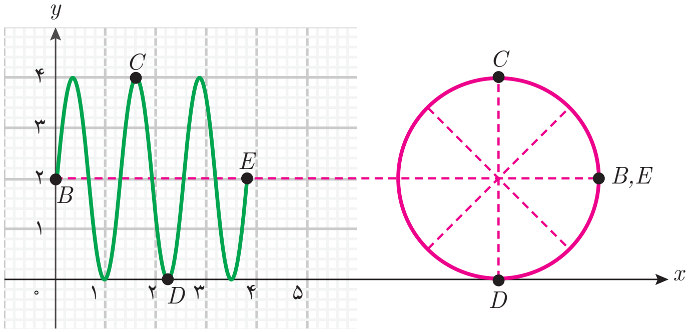
۲ نمودارهای تابع‌های $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید.

الف) آیا می‌توان با انتقال یکی به چپ یا راست، دیگری را بدست آورد؟ مقدار این انتقال چقدر است؟

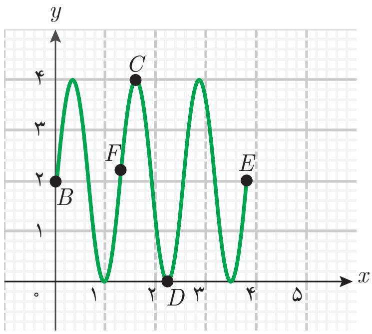
ب) چه شباهت‌هایی بین این دو نمودار می‌بینید؟

حل کار درکلاس (۳)

۱ الف) B : متناظر صفر رادیان، C : متناظر $۲\pi+\frac{\pi}{۲}$ ، D : متناظر $۲\pi+\frac{۳\pi}{۲}$ و E : متناظر ۶π



ب) نقطهٔ F



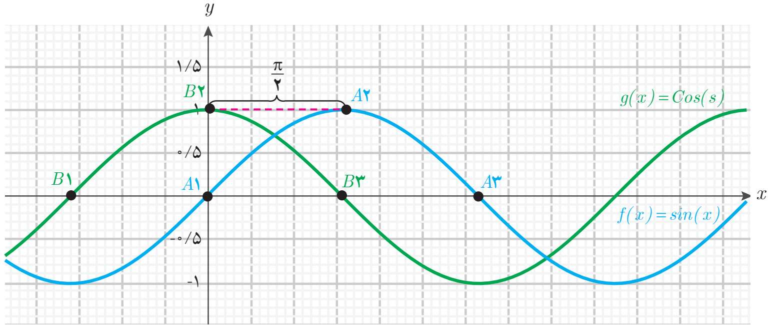
پ) در زاویه‌های $\frac{۳\pi}{۲},۲\pi+\frac{۳\pi}{۲},۴\pi+\frac{۳\pi}{۲}$

ت) در زاویه‌های : $\frac{\pi}{۲},۲\pi+\frac{\pi}{۲},۴\pi+\frac{\pi}{۲}$

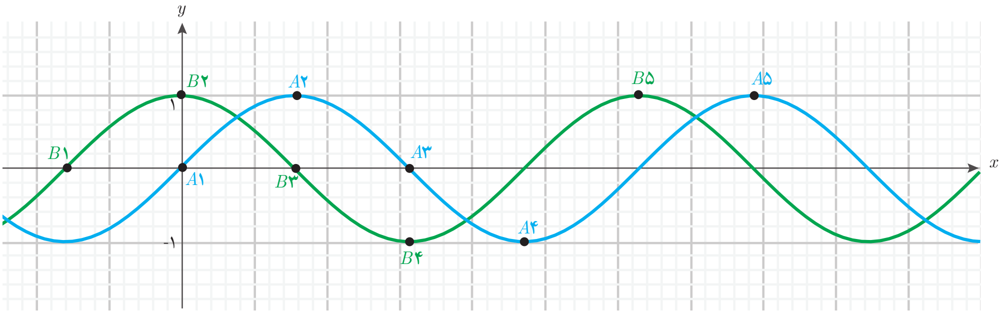
۲ الف) بله، می‌توان نمودار تابع $\sin x$ را به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ موازی محور xها، به سمت چپ انتقال داد، در این صورت برای نمونه نقاط $A۱$، $A۲$ و $A۳$ روی نقاط $B۱$، $B۲$ و $B۳$ از نمودار $\cos x$ قرار می‌گیرند و نهایتاً دو نمودار بر هم منطبق می‌شوند.

درستی این مطلب به دلیل درستی تساوی $\sin(x)=\cos(x--)$ است که در صورت آمادگی هنرجویان می‌توانید آن را مطرح کنید. به‌طور مشابه می‌توان گفت با انتقال نمودار تابع $\cos x$ به اندازهٔ — به راست نمودار تابع $\sin x$ به‌دست می‌آید

که نشان‌دهندهٔ درستی تساوی $\sin\left(x+\frac{\pi}{۲}\right)=\cos(x)$ است.



ب) برخی از شباهت‌ها عبارت‌است از:



در هر کدام از نمودارها:

- عرض پایین‌ترین نقطه ۱- و عرض بالاترین نقطه ۱ است. (نقاط A۲,B۲ و همچنین $A۴,B۴$)
- فاصلهٔ بین بالاترین نقاط متوالی ۲π است. (فاصلهٔ بین $B۲$ و $B۵$ وهمچنین $A۲$ و $A۵$)
- فاصلهٔ طول بالاترین نقطه از طول پایین‌ترین نقطهٔ بعد (قبل) از آن π است. (فاصلهٔ $B۲,B۴$ و همچنین $A۲,A۴$)
- فاصلهٔ بین دونقطهٔ متوالی که محور xها را قطع می‌کند π است. (فاصلهٔ $A۱,A۳$ و همچنین $B۱,B۳$)
- دو نقطه که اختلاف طول آنها ۲π است عرض برابر دارند.
- نمودار یکی با انتقال افقی نمودار دیگری به اندازهٔ مناسب به‌دست می‌آید.

حل مسائل

۱ مهارت‌ها و فرایندها : حل مسئله

$u(x)=۴\sin x-۳\cos(۲x)$

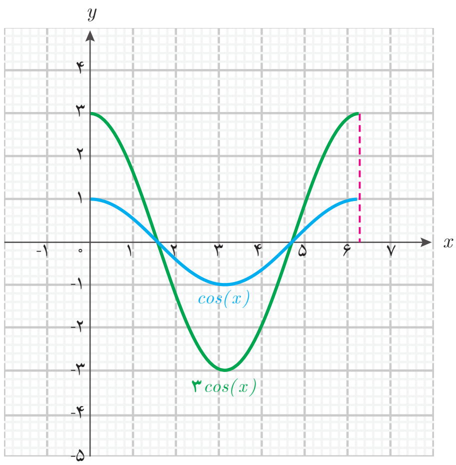
$u(۳\pi)=۴\sin ۳\pi-۳\cos(۲\times۳\pi)=۴\times۰-۳\times۱=-۳$

$u(\frac{\pi}{۶})=۴\sin\frac{\pi}{۶}-۳\cos(۲\times\frac{\pi}{۶})=۴\times\frac{۱}{۲}-۳\times\frac{۱}{۲}=\frac{۴-۳}{۲}=\frac{۱}{۲}$

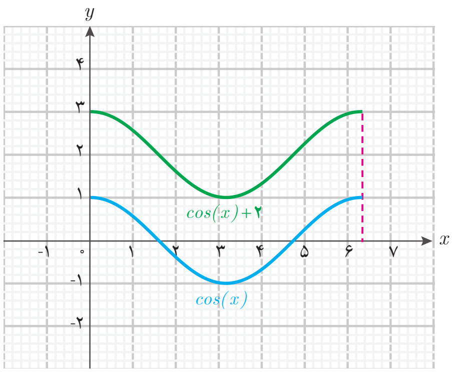
$u(۲)=۴\sin(۲)-۳\cos(۲\times۲)\approx ۴\times(۰/۹)-۳\times(-۰/۶۵)=۵/۵۵$

۲ مهارت‌ها و فرایندها : بازنمایی‌ها، استدلال

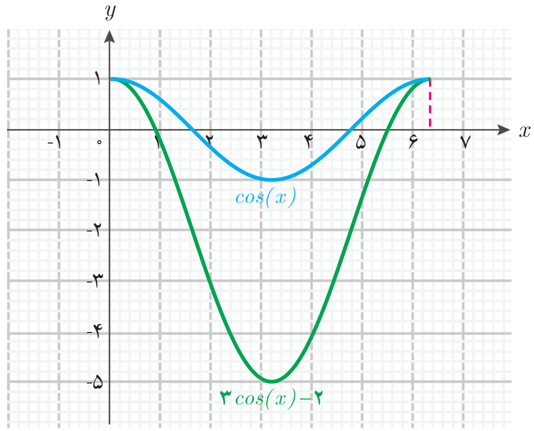
عرض نقاط نمودار تابع $۳\cos x$ با ضرب ۳ در عرض نقاط نمودار تابع $\cos x$ به‌دست می‌آیند.



نمودار تابع $۲+\cos x$ از طریق انتقال نمودار تابع $\cos x$ به اندازه ۲ واحد به بالا رسم شده است.



برای رسم نمودار تابع $3\cos x - 2$ ، عرض نقاط نمودار تابع $\cos x$ را در ۳ ضرب کرده تا نمودار تابع $3\cos x$ به‌دست آید. سپس نمودار جدید به اندازه ۲ واحد به پایین انتقال داده شده است.

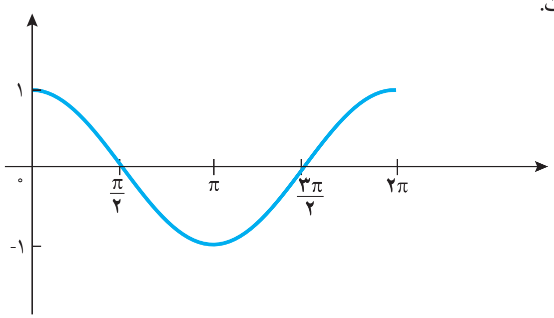


۳ مهارت‌ها و فرایندها : بازنمایی‌ها، استدلال کردن

با رسم نمودارهای دو تابع $\sin(2x)$ و $2\sin x\cos x$ معلوم می‌شود دو نمودار برهم منطبق‌اند و تساوی داده شده درست است. برای آنکه دو نمودار جداگانه دیده شوند مناسب است که یکی را ۲ واحد به بالا منتقل کنیم.

۴ مهارت‌ها و فرایندها : پیوندها و اتصالات، استدلال کردن.

با توجه به نمودار می‌توان گفت نمودار تابع $\cos x$ محور طول‌ها را در دو نقطه قطع می‌کند و طول این نقاط $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{3\pi}{2}$ است که همان جواب‌های معادله $\cos x = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ است.



۵ مهارت‌ها و فرایندها : استدلال کردن، بازنمایی‌ها

به دلخواه سه زاویه برای x از دامنه $\mathbb{R}$ انتخاب کرده و آنها را در دو تابع f و g جاگذاری کرده و مقادیر آنها را محاسبه می‌کنیم. به‌طور مثال :

$$x=\circ \Rightarrow \begin{cases} f(\circ)=\cos\circ=\text{۱} \\ g(\circ)=\sin\left(\circ+\dfrac{\pi}{\text{۲}}\right)=\text{۱} \end{cases} \Rightarrow f(\circ)=g(\circ)$$

$$x=-\pi \Rightarrow \begin{cases} f(-\pi)=\cos(-\pi)=-\text{۱} \\ g(-\pi)=\sin\left(-\pi+\dfrac{\pi}{\text{۲}}\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{\text{۲}}\right)=-\text{۱} \end{cases} \Rightarrow f(-\pi)=g(-\pi)$$

$$x=\frac{\pi}{\text{۶}} \Rightarrow \begin{cases} f\left(\dfrac{\pi}{\text{۶}}\right)=\cos\dfrac{\pi}{\text{۶}}=\dfrac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۲}} \\ g\left(\dfrac{\pi}{\text{۶}}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{\text{۶}}+\dfrac{\pi}{\text{۲}}\right)=\dfrac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۲}} \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{\text{۶}}\right)=g\left(\frac{\pi}{\text{۶}}\right)$$

با کمک رسم نمودارهای دو تابع $\cos x$ و $\sin(x+\frac{\pi}{\text{۲}})$ ملاحظه می‌شود تمامی‌نقاط این دو نمودار بر هم منطبق هستند. بنابراین تساوی $f(x)=g(x)$ به ازای هر مقدار x برقرار است.

بخش سوم: تابع نمایی

اهداف بخش

۱ درک تابع‌های نمایی
۲ تشخیص رفتار صعودی یا نزولی تابع‌های نمایی
۳ محاسبه مقدار تابع نمایی

واژه‌های کلیدی: تابع نمایی، رفتار افزایشی یا کاهشی

نگاه کلی به بخش

هدف این بخش، آشنایی با تابع‌های نمایی است. در این بخش برای رسیدن به تابع‌های نمایی، از مسئلهٔ رشد جمعیت و اهمیت آن در برنامه‌ریزی استفاده شده است. این سؤال در کلاس مطرح می‌شود که رشد جمعیت را چگونه به‌دست می‌آورند. در فعالیت (۴) به این سؤال پاسخ داده می‌شود. در این فعالیت به یک تابع نمایی خاص می‌رسیم و سپس رسماً توابع نمایی معرفی می‌شوند.

با ذکر چند مثال و تمرین این مفهوم، در فعالیت (۵) رفتار افزایشی یا کاهشی این توابع بررسی می‌شوند و در مثال‌هایی این رفتارها نمایش داده می‌شوند.

ورود به مطلب

بهتر است زمینه‌هایی را بیابیم که در آنها تابع نمایی وجود داشته باشد. در کتاب از زمینهٔ رشد جمعیت استفاده شده است. زمینه‌های دیگری مانند سود بانکی، تکثیر باکتری‌ها، استهلاک، تبدیل مواد رادیواکتیو، ... نیز وجود دارند که با توجه به درک هنرجویان می‌توان از آنها هم استفاده کرد. در یک زمینهٔ انتخاب شده، باید به دنبال جواب این سؤال باشیم که مقدار یک کمیت بر حسب کمیت دیگر چگونه محاسبه می‌شود. البته جواب سؤال باید یک تابع نمایی باشد و سپس توابع نمایی کلی را تعریف کنیم.

فعالیت آموزشی

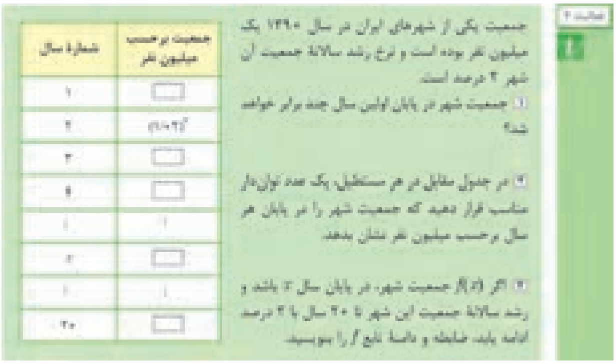
پس از طرح سؤال دربارهٔ چگونگی رشد جمعیت به فعالیت (۴) می‌رسیم که در جهت پاسخ به این سؤال قرار دارد.

اهداف:

- درک نقش تابع نمایی در مدل‌سازی پدیده‌ها.
- آشنایی با مفهوم تابع نمایی.
- آشنایی با رفتار تابع نمایی.

مهارت‌ها و فرایندها:

- پیوندها و اتصالات (ریاضی و خارج ریاضی).
- حل مسئله (مدل‌سازی).



فعالیت ۴

جمعیت یکی از شهرهای ایران در سال ۱۳۹۰ یک میلیون نفر بوده است و نرخ رشد سالانهٔ جمعیت آن شهر ۲ درصد است.

۱ جمعیت شهر در پایان اولین سال چند برابر خواهد شد؟

۲ در جدول مقابل در هر مستطیل یک عدد توان‌دار مناسب قرار دهید که جمعیت شهر را در پایان هر سال برحسب میلیون نفر نشان بدهد.

۳ اگر $f(x)$ جمعیت شهر، در پایان سال x باشد و رشد سالانهٔ جمعیت این شهر تا ۲۰ سال با ۲ درصد ادامه یابد ضابطه و دامنهٔ تابع f را بنویسید.

جمعیت برحسب میلیون نفر	شمارهٔ سال
$\square$	۱
$(۱/۰۲)^۲$	۲
$\square$	۳
$\square$	۴
$\vdots$	$\vdots$
$\square$	x
$\vdots$	$\vdots$
$\square$	۲۰

حل فعالیت (۴)

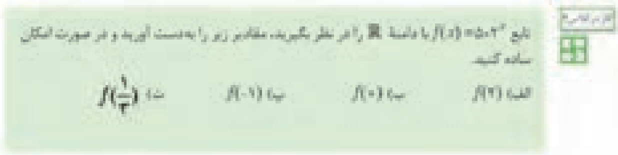
۱ ۱/۰۲ برابر.

۲ جدول تکمیل شده:

جمعیت بر حسب میلیون نفر	شمارهٔ سال
۱/۰۲	۱
$(۱/۰۲)^{۲}$	۲
$(۱/۰۲)^{۳}$	۳
$(۱/۰۲)^{۴}$	۴
$\vdots$	$\vdots$
$(۱/۰۲)^{x}$	x
$\vdots$	$\vdots$
$(۱/۰۲)^{۲۰}$	۲۰

۳ $f(x) = (۱/۰۲)^x$ و دامنهٔ تابع بازهٔ $[۰ , ۲۰]$ است. البته، در اینجا، تعداد سال می‌تواند عدد حقیقی باشد، اما اگر فقط پایان سال را درنظر داشته باشیم دامنهٔ تابع، مجموعهٔ $\{۰ , ۱ , ... , ۲۰\}$ است.

پس از ارائه تعریف و مثال، برای تثبیت یادگیری به کار در کلاس(۴) می‌رسیم.



حل کار در کلاس (۴)

الف) $۵ \times ۲^۲ = ۲۰$

ب) $۵ \times ۲^۰ = ۵$

پ) $۵ \times ۲^{-۱} = \frac{۵}{۲}$

ت) $۵ \times ۲^{\frac{۱}{۳}} = ۵\sqrt[۳]{۲}$

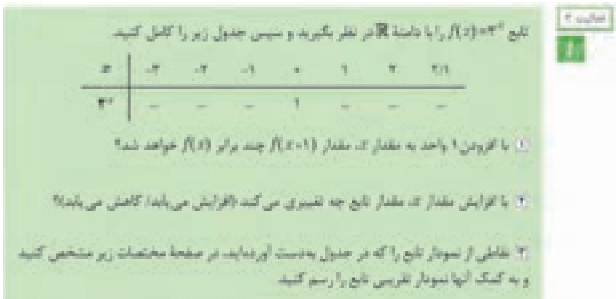
در ادامه فعالیت (۵)، رفتار افزایشی یا کاهشی تابع‌های نمایی بررسی می‌شوند.

اهداف موضوعی:

- آشنایی با خواص و رفتار تابع‌های نمایی.
- کسب مهارت رسم نمودار تقریبی تابع نمایی از طریق نقطه‌یابی.

فرایندها:

- بازنمایی‌ها



حل فعالیت (۵)

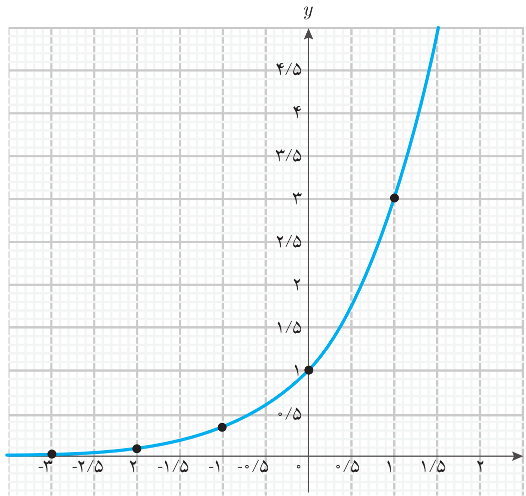
جدول تکمیل شده:

x	۳-	۲-	۱-	۰	۱	۲	۳
۳^x	$\frac{۱}{۲۷}$	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹	۲۷

۱ سه برابر خواهد شد، زیرا $۳^{x+۱} = ۳ \times ۳^x$

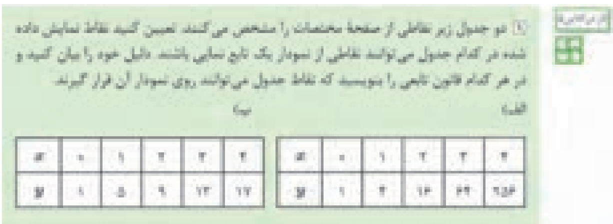
۲ با افزایش x مقدار $f(x)$ افزایش می‌یابد.

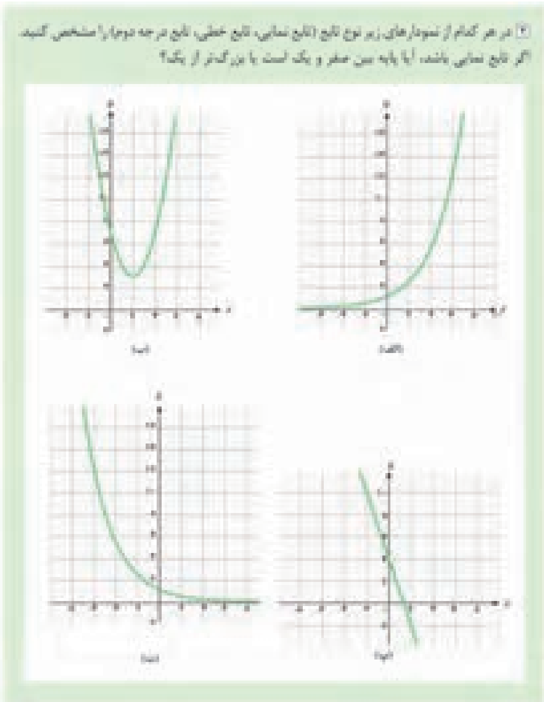
۳ نمودار تابع:



در این فعالیت رفتار افزایشی این تابع نمایی خاص مشخص می‌شود، اما با ارائه چند مثال دیگر معلوم می‌شود که وقتی پایه عددی کمتر از ۱ باشد، تابع نمایی رفتار کاهشی دارد.

برای تثبیت یادگیری به کار در کلاس(۵) می‌رسیم.





حل کار در کلاس (۵)

۱ـ نقاط مشخص شده در جدول «الف» روی نمودار تابع نمایی است، زیرا از نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$ می‌گذرد و با هر واحد افزایش متغیر x، مقدار y، ۴ برابر می‌شود قانون این تابع $f(x) = ۴^x$ می‌باشد.

در جدول «ب» با هر واحد افزایش متغیر x، مقدار y، ۴ واحد افزایش می‌یابد بنابراین نقاط مشخص شده در این جدول روی نمودار یک تابع خطی است و شیب خط مربوط به این نمودار ۴ می‌باشد با توجه به اینکه نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$ روی نمودار این تابع است قانون این تابع $f(x) = ۴x + ۱$ می‌باشد.

۲ـ الف) تابع نمایی است و پایه بزرگ‌تر از ۱ است (با افزایش مقدار x، مقدار y نیز افزایش می‌یابد).

ب) تابع درجهٔ دوم است. (نمودار سهمی است)

پ) تابع خطی است.

ت) تابع نمایی است و پایه کوچک‌تر از ۱ است (با افزایش مقدار x، مقدار y کاهش می‌یابد).

حل مسائل

۱ مهارت‌ها و فرایندها: حل مسئله

الف) $f(0) = (\frac{1}{4})^0 = 1$

ب) $g(-1) = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

پ) $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

ت) $f(-1) = (\frac{1}{4})^{-1} = 4$

ث) $g(\frac{1}{3}) = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$

۲ مهارت‌ها و فرایندها: استدلال، بازنمایی‌ها

جدول قسمت (ب) مربوط به یک تابع نمایی است. زیرا افزودن ۱ واحد به متغیر x، مقدار y، $\frac{1}{3}$ برابر شده است. در این حالت، مقدار تابع به صورت $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ است.

جدول قسمت (پ) مربوط به یک تابع نمایی است. زیرا با افزودن ۱ واحد به متغیر x، مقدار y، ۰/۵ برابر شده است. در این حالت، قانون تابع به‌صورت $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ است.

(وجود اشتباه چاپی در جدول، ۰/۶۲۵ باید ۰/۱۲۵ باشد)

جدول قسمت (ت) مربوط به یک تابع نمایی است. زیرا با افزودن ۱ واحد به متغیر x، مقدار y، ۲ برابر شده است. در این حالت ، قانون تابع به صورت $f(x) = 2^x$ است.

۳ مهارت‌ها و فرایندها: حل مسئله، بازنمایی‌ها

ردیف	قانون تابع	تغییرات y به ازای ۱ واحد افزایش x	محل تقاطع با محور yها
۱	$y = 6x$	۶ برابر	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
۲	$y = (0/9)x$	۰/۹ برابر	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
۳	$y = \frac{1}{3} \times 2^x$	۲ برابر	$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$
۴	$y = 3(\frac{1}{5})^x$	$\frac{1}{5}$ برابر	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

۴ مهارت ها و فرایندها: حل مسئله، استدلال

الف) افزایش　　ب) کاهش　　پ) افزایش

۵ مهارت‌ها و فرایندها: حل مسئله، استدلال، پیوند و اتصالات

الف) $f(x) = ۵۰۰۰۰۰۰۰(۱/۱۲)^n$

ب) $f(۵) = ۵۰۰۰۰۰۰۰\ (۱/۱۲)^۵ \approx ۸۸۱۱۷۰۸$

۶ مهارت‌ها و فرایندها: بازنمایی‌ها، استدلال کردن

الف)

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$f(x)$	۳×۲^{-۲}	۳×۲^{-۱}	۳×۲^۰	۳×۲^۱	۳×۲^۲
	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۳}{۲}$	۳	۶	۱۲

ب) $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \end{bmatrix}$

پ) به ازای افزودن یک واحد به متغیر x، مقدار تابع f، دو برابر می‌شود.

۷ مهارت‌ها و فرایندها: بازنمایی‌ها، استدلال کردن، مهارت به‌دست آوردن مقدار تابع

الف) با توجه به اینکه محل برخورد نمودار تابع با محور yها عدد ۲ است، پس $a=۲$ همچنین با توجه به نقطه $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۶ \end{bmatrix}$ که روی نمودار تابع است، می‌توان گفت مقدار $b=۲$. پس قانون تابع به صورت: $f(x) = ۲ \times ۳x$ است.

ب)

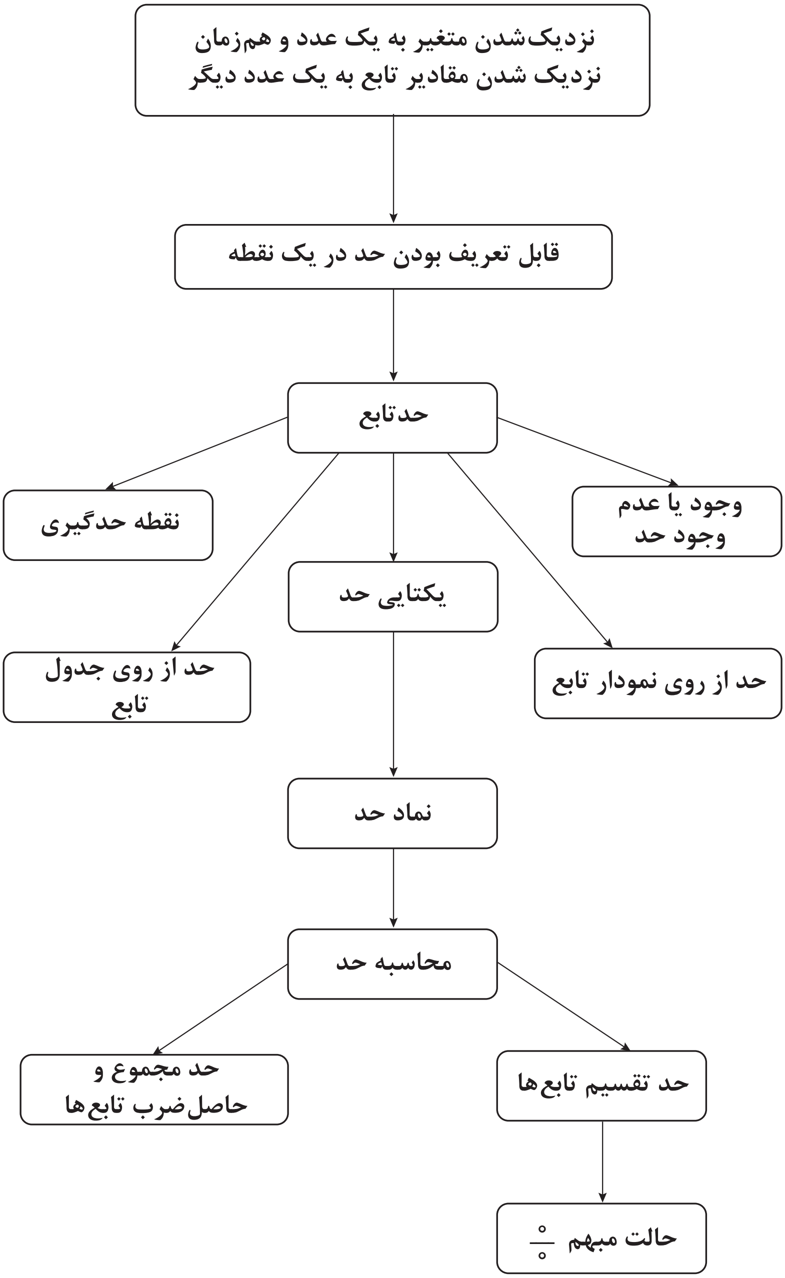
$$f(۲) = ۲ \times ۳^۲ = ۲ \times ۹ = ۱۸$$

$$f(-۱) = ۲ \times ۳^{-۱} = ۲ \times \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

فصل دوم

درک مفهوم حد

نقشه مفهومی فصل دوم



اهداف کلی پودمان

۱ درک فرایند حدگیری و مفهوم حد
۲ درک رابطهٔ بین نقطهٔ حدگیری و دامنهٔ تابع
۳ درک وجود یا نبود حد در نقاط حدگیری
۴ تشخیص حد تابع از روی جدول و نمودار تابع
۵ آشنایی با نماد حد تابع در یک نقطه
۶ محاسبهٔ حد مجموع، ضرب و تقسیم تابع‌ها
۷ آشنایی با حالت مبهم $\frac{0}{0}$

پیش‌نیازها

- آشنایی با توابع و بازنمایی‌های مختلف آن
- آشنایی با انواع توابع
- توانایی محاسبه مقدار تابع در نقاط دامنهٔ آن به کمک بازنمایی‌های مختلف تابع

بخش اول: حد تابع‌ها

اهداف بخش

۱ درک مفهوم نزدیک شدن متغیر تابع (از دامنهٔ یک تابع) به یک نقطه و به دنبال آن، نزدیک شدن مقادیر تابع به یک نقطهٔ دیگر
۲ درک مفهوم حد تابع در یک نقطه
۳ تشخیص قابل تعریف بودن یا نبودن حد تابع در نقاط داده شده
۴ تشخیص وجود حد در نقاطی که حد قابل تعریف است
۵ حدس مقدار حد در نقاط داده شده به کمک جدول و نمودار
۶ آشنایی با نماد حد تابع در یک نقطه

واژه‌های کلیدی: حد، نقطهٔ حدگیری، نزدیک شدن

نگاه کلی به بخش

در این بخش اولین آشنایی هنرجویان با مفهوم حد صورت می‌گیرد. به‌همین دلیل، سعی شده این مفهوم در یک زمینهٔ طبیعی به روشنی دیده شود تا به‌راحتی قابل فهم شود. زمینهٔ انتخاب شده، برخورد یک موشک با یک هواپیما است. مسئله طرح شده، یافتن ارتفاع هواپیما در زمان برخورد موشک است. این ارتفاع مستقیماً در دسترس نیست و در جایی ثبت نشده است ولی در لحظات قبل از برخورد موشک، ارتفاع هواپیما در جعبهٔ سیاه هواپیما ثبت شده است. حل صحیح این مسئله، به‌طور طبیعی مفهوم حد را در ذهن هنرجویان ایجاد می‌کند.
یافتن حد تابع‌ها در ابتدا به صورت حدس از روی جدول و نمودار تابع‌ها انجام می‌شود و در مثال‌های متنوع، عملیات مورد نیاز برای یافتن حد یک تابع تمرین می‌شود. پس از یافتن یک درک کلی از مفهوم حد، به جزئیات این مفهوم پرداخته می‌شود. در فرایند حدگیری، همواره یک تابع و یک نقطه به عنوان نقطهٔ حدگیری و نزدیک شدن متغیر تابع از داخل دامنهٔ تابع به نقطهٔ حدگیری و هم‌زمان نزدیک شدن مقادیر تابع به مقدار حد وجود دارد.
تشخیص اینکه چه نقاطی را می‌توان به عنوان نقطهٔ حدگیری برای یک تابع به‌کار برد تحت عنوان قابل تعریف بودن حد یک تابع در یک نقطه آمده است. همچنین وجود یا نبود حد، نکته مهمی است که با قابل تعریف بودن یا نبودن حد در یک نقطه فرق دارد. ابتدا قابل تعریف بودن حد یک تابع در یک نقطه باید برقرار باشد، بعد سراغ این سؤال می‌رویم که حد در آن نقطه وجود دارد یا وجود ندارد.

پس از درک این جزئیات، مفهوم حد به‌طور رسمی تعریف می‌شود و یکتایی حد تذکر داده می‌شود. در اینجا مفهوم به اندازهٔ دلخواه نزدیک شدن مقادیر تابع و به اندازهٔ کافی نزدیک شدن مقدار متغیر به‌طور گذرا توضیح داده می‌شوند. پس از ذکر چند مثال، نماد حد معرفی و در مثال‌ها روی آن تمرین می‌شود.

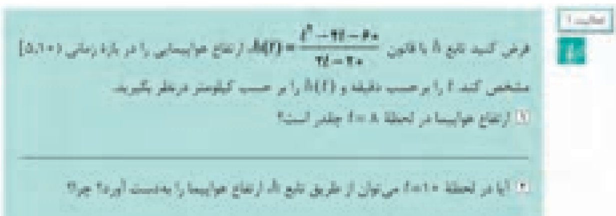
ورود به مطلب

از آنجا که مفهوم حد برای هنرجویان جدید است و با مفاهیم قبلی ریاضی تفاوت اساسی دارد، درک آن برای هنرجویان بسیار سخت است. به همین دلیل در این بخش باید بسیار با دقت و حساب شده وارد شویم. برای آموزش این مفهوم نباید عجله کرد و انتظار داشت در مدت کوتاه این مفهوم به سرعت فهمیده شود. این مفهوم اجزایی دارد (تابع، دامنهٔ تابع، نقطهٔ حدگیری، نزدیک شدن متغیر از داخل دامنهٔ تابع به نقطهٔ حدگیری، نزدیک شدن مقدار تابع به یک عدد دیگر) که باید به همهٔ آنها توجه کرد.

بهترین روش یافتن یک زمینهٔ طبیعی مناسب و طرح یک مسئله در آن زمینه است که برای حل آن مسئله هنرجو مجبور باشد تمام فرایند حدگیری و اجزای این فرایند را به‌کار برد. البته لازم نیست هنرجو با مفهوم حد پیشاپیش آشنا باشد تا از عهده این کار برآید، بلکه حل این مسئله او را به طور طبیعی به این فرایند هدایت خواهد کرد.

فعالیت آموزشی

در ابتدای این بخش در طی یک مباحثه بین هنرجویان و معلم، مسئله‌ای طرح می‌شود و راه‌حل‌هایی ارائه می‌شود. در فعالیت (۱) سعی می‌شود راه‌حل پیشنهادی به مرحلهٔ اجرا درآید.


فعالیت ۱

فرض کنید تابع h با قانون $h(t)=\frac{t^2-9t-10}{2t-20}$ ارتفاع هواپیمایی را در بازهٔ زمانی $[5,10)$ مشخص کند. t را برحسب دقیقه و $h(t)$ را برحسب کیلومتر درنظر بگیرید.

۱) ارتفاع هواپیما در لحظهٔ $t=8$ چقدر است؟

۲) آیا در لحظهٔ $t=10$ می‌توان از طریق تابع h، ارتفاع هواپیما را به‌دست آورد؟ چرا؟

اهداف:

- درک مفهوم نزدیک شدن مقادیر تابع به یک مقدار، با نزدیک کردن مقادیر متغیر تابع به یک مقدار خاص.

■ شکل‌گیری مفهوم حد در ذهن هنرجو
■ حل مسئلهٔ طرح شده در قبل از فعالیت

مهارت ها و فرایندها

■ پیوندها و اتصالات (ریاضی و خارج ریاضی).
■ بازنمایی‌ها.
■ استدلال کردن.
■ حدسیه‌سازی.

توجه داشته باشید که برای معرفی مفهوم حد در این فعالیت، تابعی انتخاب شده است که در نقطهٔ مورد بررسی، تعریف نشده است و نمی‌توان از مقدار تابع در این نقطه صحبت کرد. به این ترتیب لزوم بررسی حد این تابع، ضرورت دارد و نمی‌توان از مقدار تابع در این نقطه استفاده کرد.

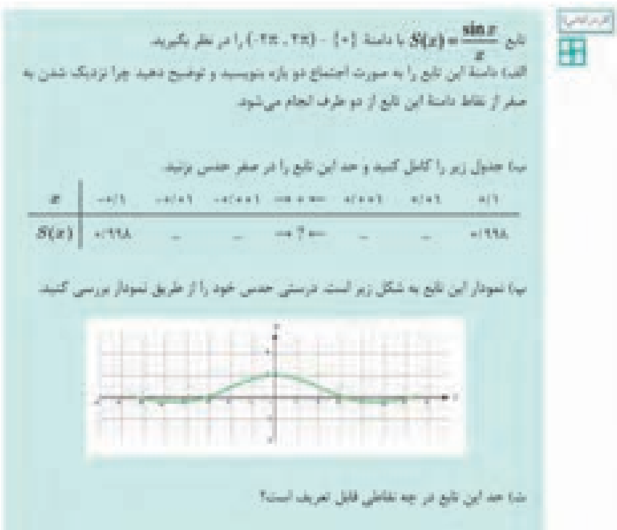
حل فعالیت ۱

۱ $h(۸) = ۷$ ارتفاع هواپیما ۷ کیلومتر از سطح زمین است.
۲ خیر، زیرا ۱۰ در دامنهٔ تابع h نیست.
۳ بله، چون تابع h به ازای همهٔ اعداد در بازهٔ $(۱۰ , ۵]$ تعریف شده‌است.
۴ جدول تکمیل شده:

t	۵	۹	۹/۵	۹/۹۵	۹/۹	۹/۹۹	۹/۹۹۹ $\longrightarrow$ ۱۰
$h(t)$	۵/۵	۷/۵	۷/۷۵	۷/۹۷۵	۷/۹۵	۷/۹۹۵	۷/۹۹۹۵ $\longrightarrow$?

۵ با نزدیک شدن مقادیر t به ۱۰، مقادیر $h(t)$ به عدد ۸ نزدیک می‌شوند.
۶ ارتفاع هواپیما در لحظهٔ $t = ۱۰$، برابر ۸ کیلومتر بوده است.

پس از این فعالیت، مفهوم حد به طور صریح‌تر بیان می‌شود و با مثال‌هایی روی این مفهوم تمرین می‌شود. در برخی مثال‌ها حدگیری یک‌طرفه و در برخی دیگر دو طرفه است و تذکر داده می‌شود که در هر دو حالت ممکن است در حدگیری رخ دهد. به ویژه به این نکته پرداخته می‌شود که حد یک تابع فقط در نقاط خاصی قابل تعریف است. این نکات در کار در کلاس (۱) تمرین می‌شود.



کار در کلاس

تابع $S(x)=\frac{\sin x}{x}$ با دامنهٔ $[-\pi, \pi]-\{0\}$ را در نظر بگیرید.

الف) دامنهٔ این تابع را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید و توضیح دهید چرا نزدیک شدن به صفر از نقاط دامنهٔ این تابع از دو طرف انجام می‌شود.

ب) جدول زیر را کامل کنید و حد این تابع را در صفر حدس بزنید.

x	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۰/۰۰۱$	$\to ۰ \leftarrow$	$۰/۰۰۱$	$۰/۰۱$	$۰/۱$
$S(x)$	۰/۹۹۸	...	...	$\to ? \leftarrow$	...	...	۰/۹۹۸

پ) نمودار این تابع به شکل زیر است. درستی حدس خود را از طریق نمودار بررسی کنید.

ت) حد این تابع در چه نقاطی قابل تعریف است؟

حل کار در کلاس (۱)

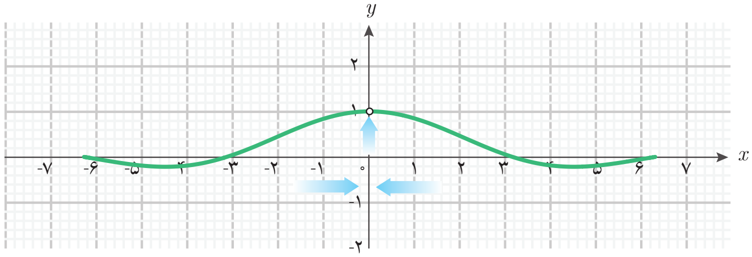
الف) دامنه: $D_S=[-\pi,۰)\cup(۰,\pi]$. با توجه به دامنه می‌توان گفت این تابع در بازه‌هایی به ازای مقادیرِ کوچک‌تر از صفر و بزرگ‌تر از صفر تعریف شده است. بنابراین نزدیک شدن به صفر از مقادیر کوچک‌تر و بزرگ‌تر از صفر (از دو طرف) انجام می‌شود.

ب) جدول تکمیل شده:

x	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۰/۰۰۱$	$\to ۰ \leftarrow$	$۰/۰۰۱$	$۰/۰۱$	$۰/۱$
$S(x)$	۰/۹۹۸	۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۹	$\to ? \leftarrow$	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۸

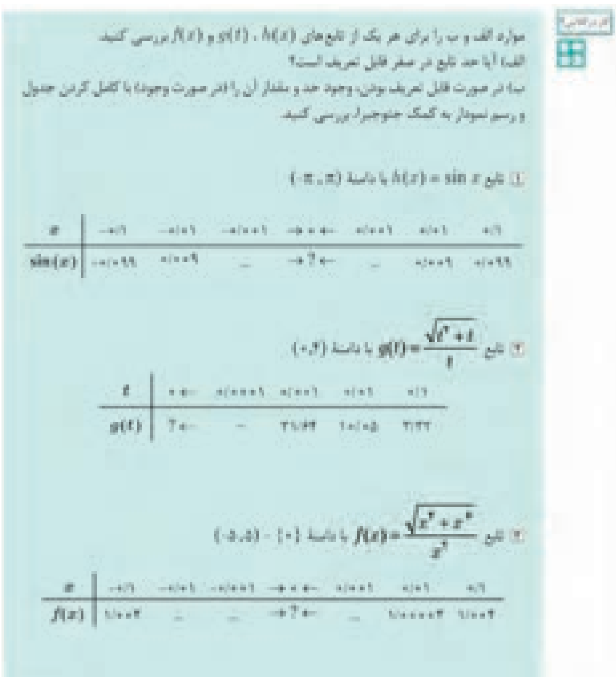
با توجه به مقادیر تابع در نزدیکی صفر، ملاحظه می‌شود هرچه متغیر x به صفر نزدیک‌تر می‌شود مقدار تابع به عدد ۱ نزدیک‌تر می‌شود، یعنی حد تابع $\frac{\sin x}{x}$ در صفر، عدد ۱ است.

پ) نمودار تابع نیز نشان می‌دهد با نزدیک شدن x به صفر، $S(x)$ به عدد ۱ نزدیک می‌شود یعنی در نمودار نیز حدس ما تأیید می‌شود.



ت) حد این تابع در تمامی نقاط $[-\pi, \pi]$ قابل تعریف است.

در ادامه، به صورت مباحثه‌ای، دربارهٔ وجود و عدم وجود حد و رابطهٔ آن با قابل تعریف بودن حد بحثی ارائه می‌شود و در کار در کلاس(۲) روی آن تمرین می‌شود.



کار در کلاس

موارد الف و ب را برای هر یک از تابع‌های $h(x)$، $g(t)$ و $f(x)$ بررسی کنید.

الف) آیا حد تابع در صفر قابل تعریف است؟

ب) در صورت قابل تعریف بودن، وجود حد و مقدار آن را (در صورت وجود) با کامل کردن جدول و رسم نمودار به کمک جئوجبرا بررسی کنید.

۱) تابع $h(x) = \sin x$ با دامنهٔ $(-\pi , \pi)$

x	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	→ ۰ ←	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$\sin(x)$	−۰/۰۹۹	−۰/۰۰۹	...	→ ? ←	...	۰/۰۰۹	۰/۰۹۹

۲) تابع $g(t) = \frac{\sqrt{t^2 + t}}{t}$ با دامنهٔ $(۰,۲)$

t	۰ ←	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$g(t)$	? ←	...	۳۱/۶۴	۱۰/۰۵	۳/۳۲

۳) تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + x^6}}{x^2}$ با دامنهٔ $(-۵,۵) - \{۰\}$

x	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	→ ۰ ←	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$f(x)$	۱/۰۰۴	...	...	→ ? ←	...	۱/۰۰۰۰۴	۱/۰۰۴

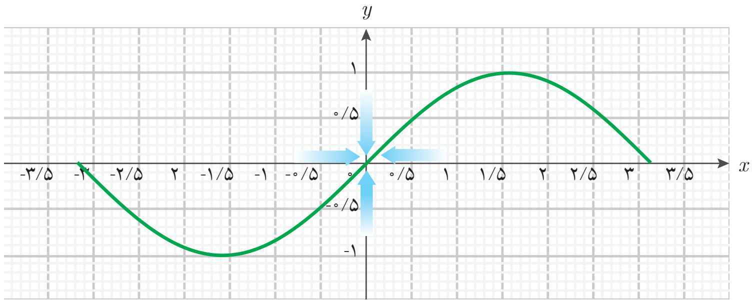
حل کار در کلاس (۲)

۱ تابع: $h(x)=\sin x$

الف) این تابع در همهٔ نقاط نزدیک صفر تعریف شده است، بنابراین حد آن در صفر قابل تعریف است.

ب) جدول تکمیل شده:

x	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۰/۰۰۱$	→ ۰ ←	$۰/۰۰۱$	$۰/۰۱$	$۰/۱$
$\sin(x)$	$-۰/۰۹۹۸$	$-۰/۰۰۹۹$	$-۰/۰۰۰۹$	→ ؟ ←	$۰/۰۰۰۹$	$۰/۰۰۹۹$	$۰/۹۹۸$



نمودار تابع: با توجه به مقادیر تابع در نزدیکی صفر ملاحظه می‌شود هرچه متغیر x به صفر نزدیک‌تر می‌شود مقدار تابع نیز به عدد صفر نزدیک‌تر می‌شود یعنی حد تابع $\sin x$ در صفر، عدد صفر است.

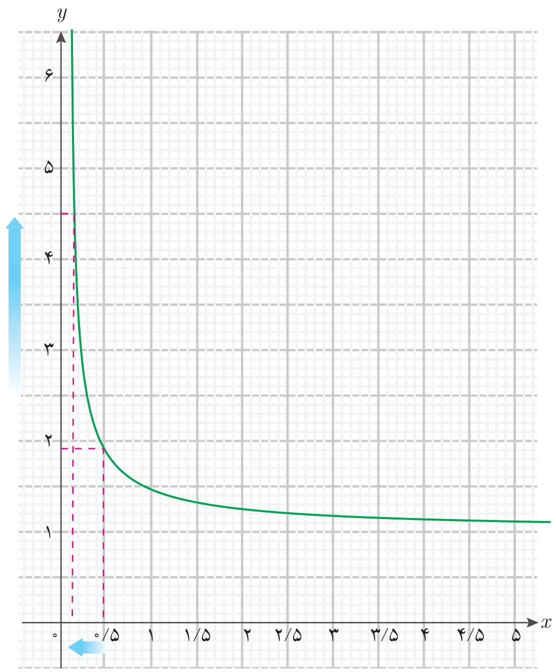
۲ تابع: $g(t)=\dfrac{\sqrt{t^۲+t}}{t}$ با دامنهٔ (۰ , ۴)

الف) این تابع در همهٔ نقاط بزرگ‌تر از صفر و نزدیک صفر تعریف شده است. بنابراین حد آن در صفر قابل تعریف است.

ب) جدول تکمیل شده:

t	۰ ←	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$g(t)$	؟ ←	۱۰۰/۰۰۴	۳۱/۶۴	۱۰/۰۵	۳/۳۲

نمودار تابع: با توجه به مقادیر تابع در نزدیکی صفر ملاحظه می‌شود هرچه متغیر t به صفر نزدیک‌تر می‌شود مقادیر تابع بزرگ‌تر می‌شود و به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند، بنابراین، این تابع در $t = ۰$ حد ندارد.



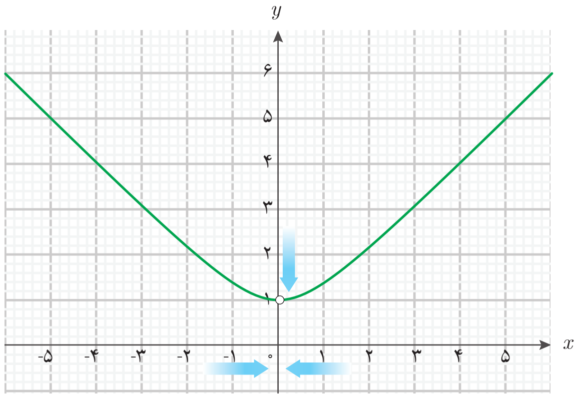
۳ تابع: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^۴ + x^۶}}{x^۲}$ با دامنهٔ $(-۵ , ۵) - \{۰\}$

الف) این تابع در همهٔ نقاط نزدیک صفر تعریف شده است، بنابراین حد آن در صفر قابل تعریف است.

ب) جدول تکمیل شده:

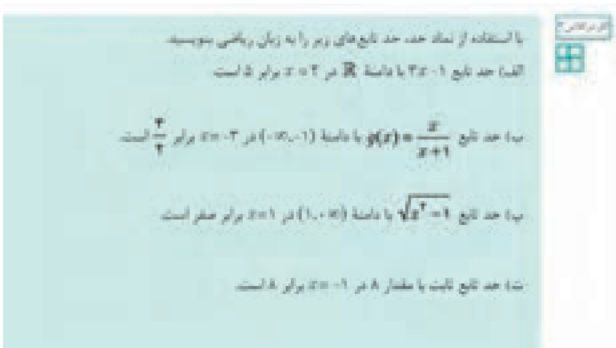
x	۰/۱-	۰/۰۱-	۰/۰۰۱-	$\rightarrow$ ۰ $\leftarrow$	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$f(x)$	۱/۰۰۴	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	$\rightarrow$? $\leftarrow$	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۴

نمودار تابع:



با توجه به مقادیر تابع در نزدیکی صفر ملاحظه می‌شود هرچه متغیر x به صفر نزدیک‌تر می‌شود مقدار تابع به عدد ۱ نزدیک‌تر می‌شود، یعنی حد تابع عدد ۱ است.

در این قسمت نماد حد معرفی می‌شود و با مثال‌های متعدد چگونگی به‌کارگیری این نماد توضیح داده می‌شود. در کار درکلاس(۳) این مطالب تمرین می‌شوند.



کار در کلاس ۳

با استفاده از نماد حد، حد تابع‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) حد تابع $۳x-۱$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در $x=۲$ برابر ۵ است.

ب) حد تابع $g(x)=\frac{x}{x+۱}$ با دامنهٔ $(-\infty,-۱)$ در $x=-۲$ برابر [illegible] است.

پ) حد تابع $\sqrt{x^۲-۱}$ با دامنهٔ $(۱,+\infty)$ در $x=۱$ برابر صفر است.

ت) حد تابع ثابت با مقدار ۸ در $x=-۱$ برابر ۸ است.

توضیح: در این قسمت می‌توان با ارائهٔ حد چند تابع با نماد حد، از هنرجویان خواست آن را با زبان خود بیان کنند.

حل کار در کلاس (۳)

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}(۳x-۱)=۵$

ب) $\lim\limits_{x\to -۳} g(x) = \lim\limits_{x\to -۳} \frac{x}{x+۱} = \frac{۳}{۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۱} \sqrt{x^۲ - ۱} = ۰$

ت) $\lim\limits_{x\to -۱} ۸ = ۸$

حل مسائل

۱ فرایندها و مهارت‌ها: استدلال ، بازنمایی

الف) حد این تابع در نقاط $x =$ ۲,۳,۴,۵ قابل تعریف است. چون نمودار تابع نشان می‌دهد که می‌توانیم متغیر x را (در دامنه تابع) روی محور طول‌ها به این نقاط نزدیک کنیم. نقاط $x =$ ۱,۶ از دامنه تابع دور هستند و نمی‌توانیم از دامنهٔ تابع به این نقاط نزدیک شویم. بنابراین حد این تابع در نقاط $x =$ ۱,۶ قابل تعریف نمی‌باشد.

ب) حد تابع در نقاط $x =$ ۲,۴,۵ موجود است.

$$\lim_{x\to ۲} f(x) = ۳ \quad , \quad \lim_{x\to ۴} f(x) = ۳/۵ \quad , \quad \lim_{x\to ۵} f(x) = ۱$$

۲ فرایندها و مهارت‌ها: بازنمایی

الف) حد تابع $\sqrt{x}$ وقتی x به صفر میل می‌کند، برابر ۰ است.

ب) حد تابع $\frac{۱}{x}$ وقتی x به $\frac{۱}{۴}$ میل می‌کند ، برابر ۴ است.

پ) حد تابع $\sin x$ وقتی x به $\frac{\pi}{۲}$ میل می‌کند، برابر ۱ است.

۳ فرایندها و مهارت‌ها: استدلال، حل مسئله

حد تابع f در تمامی نقاط $\mathbb{R}$ قابل تعریف می‌باشد. زیرا از داخل دامنهٔ تابع f به هر عدد حقیقی می‌توان نزدیک شد.

۴ فرایندها و مهارت‌ها: بازنمایی، استدلال

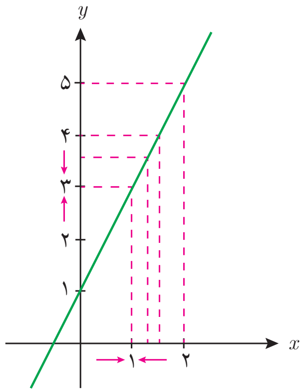
حد این تابع در تمامی نقاط $[۲,+\infty)$ قابل تعریف است.

x	۲ ←	۲/۰۰۰۰۱	۲/۰۰۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱
$f(x)$	? ←	۳۱۶	۱۰۰	۳۱/۶	۱۰	۳/۱۶

حد این تابع در $x=۲$ وجود ندارد. چون با نزدیک شدن مقادیر x به ۲، مقادیر $f(x)$ در حال بزرگ شدن هستند و به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند. بنابراین تابع با قانون $\frac{\sqrt{x-۲}}{x-۲}$ و دامنه $(۲\,,+\infty)$ در $x=۲$ حد ندارد.

۵ فرایندها و مهارت‌ها: بازنمایی، استدلال

برای مثال، تابع $f(x)=۲x+۱$ با دامنه $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. با توجه به نمودار، حد تابع f در $x=۱$ برابر ۳ می‌باشد. حد این تابع در هر نقطه دیگری هم وجود دارد.



۶ فرایندها و مهارت‌ها: استدلال، حل مسئله

الف) حد این تابع در نقاط $(-\infty,-۲]\cup[۲,+\infty)$ قابل تعریف می‌باشد.

ب) با توجه به نمودار تابع، حد تابع در نقاط $(-\infty,-۲)\cup(۲,+\infty)$ وجود دارد و در نقاط $x=-۲$ و $x=۲$ وجود ندارد.

۷ فرایندها و مهارت‌ها: بازنمایی، استدلال

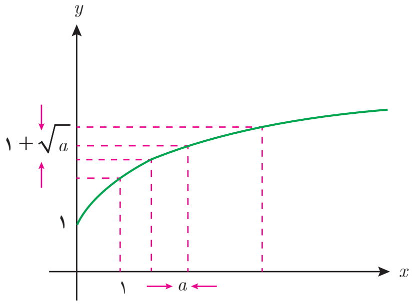
الف)

x	۴/۱	۴/۰۱	۴/۰۰۱	$\rightarrow$ ۴ $\leftarrow$	۳/۹۹۹	۳/۹۹	۳/۹
$g(x)$	۳/۰۲	۳/۰۰۲	۳/۰۰۰۲	$\rightarrow$ ۳ $\leftarrow$	۲/۹۹۹	۲/۹۹	۲/۹۷

$$\lim_{x\to ۴} g(x)=۳$$

ب) با توجه به نمودار می‌توان گفت، با نزدیک شدن x به هر نقطه‌ای مانند a، در بازهٔ $[\circ, +\infty)$ مقادیر $g(x)$ نیز به $\sqrt{a}+۱$ نزدیک می‌شود.

پ) حد این تابع در نقاط خارج از بازه $[\circ \;,\; +\infty)$ قابل تعریف نمی‌باشد.

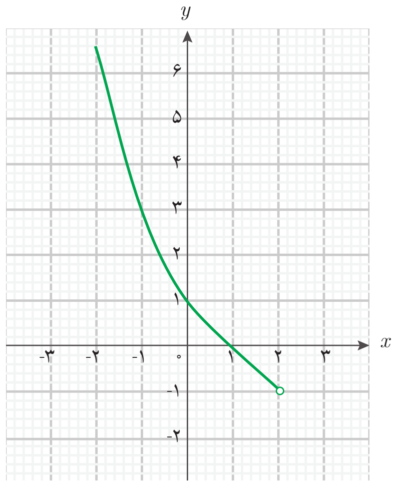


۸ فرایندها و مهارت‌ها: بازنمایی، استدلال

حد تابع h در $x=۲$ قابل تعریف است و با توجه به شکل و جدول زیر می‌توان گفت:

$$\lim_{x\to ۲} h(x) = -۱$$

x	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	$\to$ ۲
$h(x)$	۰/۹-	۰/۹۹-	۰/۹۹۹-	$\to$ ۱-



بخش دوم: محاسبهٔ حد تابع‌ها

اهداف بخش

۱ محاسبهٔ حد مجموع، ضرب و تقسیم تابع‌ها
۲ آشنایی با حالت مبهم $\frac{0}{0}$

واژه‌های کلیدی: حد مجموع، حاصل‌ضرب و تقسیم تابع‌ها و حالت مبهم $\frac{0}{0}$

نگاه کلی به بخش

هدف این بخش آشنایی با قضایای محاسبهٔ حد مجموع، حاصل‌ضرب و تقسیم دو تابع است. در بخش قبل، در مورد مفهوم حد و روش کلی یافتن مقدار حد یک تابع از طریق جدول و نمودار تابع صحبت شده است. اما باید به این نکته توجه داشت که عملاً روش استفاده از جدول و نمودار فقط یک حدس برای وجود حد و مقدار حد است. در این بخش به قضایای مهم حد درباره مجموع، حاصل‌ضرب و تقسیم تابع‌ها پرداخته می‌شود که از طریق این قضایا، حد بسیاری از تابع‌ها با دقت قابل محاسبه خواهند بود. برای درک عمیق‌تر مفهوم حد و کارآمدتر شدن این مفهوم تا حدی به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ نیز پرداخته می‌شود ولی هدف این کتاب یافتن حدهای پیچیده که در حالت $\frac{0}{0}$ قرار می‌گیرند نیست و فقط حالت‌های ساده که با ساده کردن صریح قابل محاسبه است در مثال‌ها بررسی می‌شوند.

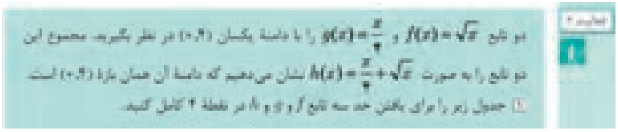
ورود به مطلب

برای شروع این بخش، مناسب است که شیوهٔ یافتن حد در بخش قبل تذکر داده شود و تصریح شود که این شیوه فقط ما را به حدس مقدار حد و وجود حد می‌رساند و برای یافتن دقیق مقدار حد لازم است روش‌های دیگری را بشناسیم. برای هر کدام از قضایای حد نیز مناسب است در حالت‌های خاص درستی این قضایا بررسی شوند و از هنرجویان بخواهیم که حالت کلی را حدس بزنند و سپس قضایای کلی را بیان کنیم.

فعالیت آموزشی

در ابتدای این بخش، به این نکته توجه می‌شود که روش جدول و نمودار برای یافتن حد یک تابع فقط می‌تواند ما را به حدس دربارهٔ وجود و مقدار حد برساند.

برای یافتن مقدار دقیق قضایایی وجود دارند که در فعالیت (۲) یکی از این قضایا در حالت خاص مطرح می‌شود.



فعالیت ۲

دو تابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{x}{4}$ را با دامنهٔ یکسان (۰,۹) در نظر بگیرید. مجموع این دو تابع را به صورت $h(x)=\frac{x}{4}+\sqrt{x}$ نشان می‌دهیم که دامنهٔ آن همان بازهٔ (۰,۹) است.

۱ جدول زیر را برای یافتن حد سه تابع f و g و h در نقطهٔ ۴ کامل کنید.

اهداف موضوعی:

- درک مفهوم حد مجموع دو تابع.
- درک ارتباط بین حد دو تابع و حد مجموع دو تابع.

فرایندها:

- بازنمایی‌ها.
- حدسیه‌سازی.
- تعمیم دادن.

حل فعالیت (۲)

۱ جدول تکمیل شده:

x	۳	۳/۵	۳/۹	۳/۹۹	۳/۹۹۹ →	۴
	۱/۷۳۲	۱/۸۷۰	۱/۹۷۴	۱/۹۹۷	۱/۹۹۹ →	?
	۰/۷۵۰	۰/۸۷۵	۰/۹۷۵	۰/۹۹۷	۰/۹۹۹ →	?
	۲/۴۸۲	۲/۷۴۵	۲/۹۴۹	۲/۹۸۷	۲/۹۹۹ →	?

۲ داریم: $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)=۲$ و $\lim\limits_{x\to ۴} g(x)=۱$ و $\lim\limits_{x\to ۴} h(x)=۳$.

می‌توان دید: $\lim\limits_{x\to ۴} h(x)=\lim\limits_{x\to ۴} f(x)+\lim\limits_{x\to ۴} g(x)$.

۳ جدول تکمیل شده:

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹ →	۱	← ۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
	۰/۹۴۸	۰/۹۹۴	۰/۹۹۹ →	?	← ۱/۰۰۰	۱/۰۰۴	۱/۰۴۸
	۰/۲۲۵	۰/۲۴۷	۰/۲۴۹ →	?	← ۰/۲۵۰	۰/۲۵۲	۰/۲۷۵
	۱/۱۷۳	۱/۲۴۱	۱/۲۴۹ →	?	← ۱/۲۵۰	۱/۲۵۶	۱/۳۲۳

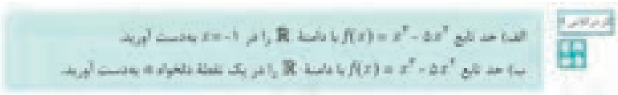
۴ داریم: $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۱$ و $\lim\limits_{x\to ۱} g(x)=۰/۲۵$ و $\lim\limits_{x\to ۱} h(x)=۱/۲۵$.

می‌توان دید: $\lim\limits_{x\to ۱} h(x)=\lim\limits_{x\to ۱} f(x)+\lim\limits_{x\to ۱} g(x)$.

۵ در حالت کلی اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند حد مجموع آنها با مجموع حدهای آنها برابر است، یعنی:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$

پس از جمع‌بندی این فعالیت و نتیجه‌گیری دربارهٔ حد مجموع دو تابع همین نکته دربارهٔ ضرب دو تابع نیز بیان می‌شود و در مثال‌هایی این نکات توضیح داده می‌شوند و در کار درکلاس (۴) این مطالب تمرین می‌شوند.


الف) حد تابع $f(x)=x^3-5x^2$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در $x=-1$ به‌دست آورید.
ب) حد تابع $f(x)=x^3-5x^2$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در یک نقطهٔ دلخواه a به‌دست آورید.

حل کار در کلاس (۴)

با استفاده از رابطهٔ بین حد تفاضل دو تابع و تفاضل حد آنها و همچنین حد حاصل‌ضرب دو تابع و حاصل ضرب حدهای آنها خواهیم داشت:

الف)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to -۱}(x^۳-۵x^۲)&=\lim_{x\to -۱} x^۳-\lim_{x\to -۱} ۵x^۲\\&=\lim_{x\to -۱} x.x.x-\lim_{x\to -۱} ۵.x.x\\&=(-۱)(-۱)(-۱)-۵\times(-۱)(-۱)=-۶\end{aligned}$$

ب)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(x^۳-۵x^۲)&=\lim_{x\to a} x^۳-\lim_{x\to a} ۵x^۲\\&=\lim_{x\to a} x.x.x-\lim_{x\to a} ۵\times\lim_{x\to a} x.x=a^۳-۵a^۲\end{aligned}$$

در ادامه به حد تابع‌های چندجمله‌ای توجه شده است و در فعالیت (۳) این مسئله بررسی شده است.


۱) با به‌دست آوردن حد تابع‌های داده‌شده جدول زیر را کامل کنید. دامنهٔ این تابع‌ها $\mathbb{R}$ می‌باشد.

$f(x)$	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	a	a^2	a^3				

اهداف موضوعی

- شناخت نحوهٔ محاسبهٔ حد تابع چندجمله‌ای.

فرایندها

- الگویابی.
- استدلال کردن.
- تعمیم دادن.

توجه به فرایند به‌کارگیری قواعد حدگیری در محاسبهٔ حد تابع چندجمله‌ای توسط هنرجویان از اهمیت زیادی برخوردار است. اجرای صحیح و مرحله به مرحلهٔ این فرایند و توضیح در مورد علت انجام مراحل مختلف این فرایند تا رسیدن به حد تابع چند جمله‌ای، علاوه برافزایش مهارت‌هایی نظیر ارتباطات کلامی و ... به ایجاد درک درستی از اثبات ریاضی در هنرجو کمک می‌کند.

حل فعالیت(۳)

۱ برای تکمیل جدول با استفاده از روش‌هایی که برای محاسبهٔ حد حاصل‌ضرب دو تابع دیدیم، می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to a} x^4 = \lim_{x\to a}(x^3x) = \lim_{x\to a} x^3 \lim_{x\to a} x = a^3a = a^4$$

$$\lim_{x\to a} x^5 = \lim_{x\to a}(x^4x) = \lim_{x\to a} x^4 \lim_{x\to a} x = a^4a = a^5$$

$$\lim_{x\to a} x^6 = \lim_{x\to a}(x^5x) = \lim_{x\to a} x^5 \lim_{x\to a} x = a^5a = a^6$$

با توجه به نتایج به‌دست آمده می‌توان جدول را به صورت زیر تکمیل کرد:

$f(x)$	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^n
$\lim_{x\to a} f(x)$	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^n

۲ تابع $f(x)=bx^n$ را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب تابع ثابت $g(x)=b$ و تابع $h(x)=x^n$ در نظر گرفت بنابراین می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to a} bx^n = \lim_{x\to a} b \times \lim_{x\to a} x^n = ba^n$$

۳

$$\lim_{x\to a} P(x) = \lim_{x\to a}(4x^5 - 3x^3 + 7x - 4) = \lim_{x\to a} 4x^5 - \lim_{x\to a} 3x^3 +$$

$$\lim_{x\to a} 7x - \lim_{x\to a} 4 = 4a^5 - 3a^3 + 7a - 4 = P(a)$$

در ادامه به قضیه حد تقسیم دو تابع می‌رسیم که از طریق یک مباحثه توضیح داده می‌شود. سپس به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ پرداخته می‌شود و در حالت‌های ساده، چگونگی محاسبهٔ حد در این حالت توضیح داده می‌شود. در کار در کلاس (۵) این نکات تمرین می‌شوند.

کار در کلاس

وجود حد تابع‌های زیر را در نقاط داده‌شده بررسی کنید. در صورت وجود حد آن را بیابید و با نماد حد بنویسید.

الف) تابع $\frac{x^{۲}-۹}{x-۳}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۳\}$ در $x=۳$

برای محاسبهٔ حد برخی از توابع نیاز به استفاده از تکنیک‌هایی است که در این کار در کلاس با چند نمونه از آنها روبه‌رو هستیم. توصیه می‌شود محاسبهٔ حدهایی از هنرجویان خواسته شود که با استفاده از تکنیک‌هایی که در کتاب مطرح شده است، قابل انجام باشد.

حل کار در کلاس (۵)

الف) تابع $\frac{x^{۲}-۹}{x-۳}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۳\}$ در $x=۳$:

حد صورت و مخرج این کسر در $x=۳$ صفر است و با یک حالت مبهم روبه‌رو هستیم. اگر چند جمله‌ای صورت را به صورت حاصل‌ضرب یک عامل در $(x-۳)$ بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^{۲}-۹}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x+۳)}{۱}=\lim_{x\to ۳}(x+۳)=۶$$

ب) تابع $\frac{(x+۱)\sin x}{x(x+۲)}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-۲,۰\}$ در $x=۰$:

حد صورت و مخرج این کسر در $x=۰$، عدد صفر است. اگر این تابع را به‌صورت حاصل‌ضرب دو تابع کسری که یکی از آنها $\frac{\sin x}{x}$ می‌باشد، بنویسیم آنگاه می‌توانیم با استفاده از قاعدهٔ حد حاصل‌ضرب دو تابع و مثال ۱۷ حد این تابع را به‌دست آوریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{(x+۱)\sin x}{x(x+۲)}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x(x+۱)}{x(x+۲)}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\,\frac{x(x+۱)}{(x+۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to ۰}\frac{(x+۱)}{(x+۲)}=۱\times\frac{\lim_{x\to ۰}(x+۱)}{\lim_{x\to ۰}(x+۲)}=\frac{۱}{۲}$$

پ) تابع $\frac{x^{۲}+x-۴}{x^{۲}-۱۶}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-۴,۴\}$ در $x=-۴$:

حد صورت این کسر در $x=-۴$ عدد ۸ و حد مخرج این کسر در این نقطه، عدد صفر است پس این تابع کسری در $x=-۴$ حد ندارد.

حل مسائل

۱ فرایندها و مهارت‌ها: استدلال

الف) $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} x^{۳}-۲x=\lim\limits_{x\to a} x^{۳}-\lim\limits_{x\to a} ۲x=a^{۳}-۲a$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳}\frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}-۱}=\frac{\lim\limits_{x\to ۳} x^{۲}+۱}{\lim\limits_{x\to ۳} x^{۲}-۱}=\frac{۱۰}{۸}=\frac{۵}{۴}$

حد تابع f در $x=۱$ وجود ندارد زیرا حد صورت عددی ناصفر و حد مخرج صفر است.

پ) اگر $a\neq -۱$، حدتابع مخرج در این نقطه ناصفر است و داریم:

پ) $\lim\limits_{x\to a} h(x)=\lim\limits_{x\to a}\frac{x-x^{۳}}{x+۱}=\frac{\lim\limits_{x\to a} x-x^{۳}}{\lim\limits_{x\to a} x+۱}=\frac{a-a^{۳}}{a+۱}$

اما در حالت $a=-۱$ حد تابع صورت و تابع مخرج در این نقطه صفر است و در حالت مبهم قرار داریم. در این مسئله با ساده‌سازی تابع کسری، حد آن در این نقطه محاسبه می‌شود.

$$\lim_{x\to -۱} h(x)=\lim_{x\to -۱}\frac{x-x^{۳}}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{x(۱-x^{۲})}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{x(۱-x)(۱+x)}{x+۱}$$

$$=\lim_{x\to -۱} x(۱-x)=-۲$$

۲ فرایندها و مهارت‌ها: استدلال، حل مسئله

حد تابع صورت و تابع مخرج این کسر در $x=-۲$ صفر است و با یک حالت مبهم روبه‌رو هستیم. می‌توانیم تابع‌های صورت و مخرج را به‌صورت ضرب یک عامل $x+۲$ بنویسیم و با ساده‌سازی به شکل زیر حد را محاسبه کنیم:

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^{۲}+x-۲}{۴-x^{۲}}=\lim_{x\to -۲}\frac{(x+۲)(x-۱)}{(۲-x)(۲+x)}=\lim_{x\to -۲}\frac{x-۱}{۲-x}=\frac{-۳}{۴}$$

۳ فرایندها و مهارت‌ها: حل مسئله، استدلال

با توجه به اینکه حد تابع مخرج در نقطهٔ دلخواه a برابر $a^۲ + ۴$ است و $۴ + a^۲ \neq ۰$، و حد تابع h نیز در نقطهٔ a وجود دارد، داریم:

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} \frac{x^۲ - x - ۴}{۴ + x^۲} = \frac{\lim\limits_{x\to a} x^۲ - x - ۴}{\lim\limits_{x\to a} ۴ + x^۲} = \frac{a^۲ - a - ۴}{۴ + a^۲}$$

۴ فرایندها و مهارت‌ها: بازنمایی، استدلال

حد این تابع در همهٔ نقاط قابل تعریف است. در جاهایی که حد مخرج صفر نشود، حتماً حد این تابع وجود دارد (حد تابع صورت در همهٔ نقاط وجود دارد). تابع مخرج فقط در نقاط ۲ و ۲- صفر می‌شود، پس در سایر نقاط حد تابع مخرج ناصفر است و حد این تابع کسری موجود است.

در نقطهٔ $x = ۲$ حد تابع مخرج، صفر است و حد تابع صورت، عددی ناصفر است، پس در این نقطه تابع کسری حد ندارد. اما در نقطهٔ $x = -۲$ حد تابع صورت و تابع مخرج صفر است و در حالت مبهم قرار داریم که با ساده‌سازی تابع کسری دیده می‌شود حد تابع کسری در این نقطه وجود دارد.

$$\lim_{x\to -۲} \frac{x+۲}{x^۲ - ۴} = \lim_{x\to -۲} \frac{x+۲}{(x-۲)(x+۲)} = \lim_{x\to -۲} \frac{۱}{x-۲} = -\frac{۱}{۴}$$

۵ فرایندها و مهارت‌ها: استدلال

حد تابع صورت و تابع مخرج این تابع کسری در $x = ۰$، صفر است و با یک حالت مبهم روبه‌رو هستیم.

می‌توانیم تابع‌های صورت و مخرج را به‌صورت ضرب یک عامل x بنویسیم و با ساده‌سازی به شکل زیر حد را محاسبه کنیم:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{x^۲ + x}{x^۲ - x} = \lim_{x\to ۰} \frac{x(x+۱)}{x(x-۱)} = \lim_{x\to ۰} \frac{x+۱}{x-۱} = -۱$$

در نقطهٔ $x = ۱$ حد تابع صورت عددی ناصفر و حد تابع مخرج، صفر است، بنابراین در این نقطه حد تابع کسری وجود ندارد.

۶ فرایندها و مهارت‌ها:حل مسئله، استدلال

الف) حد تابع صورت و تابع مخرج این تابع کسری در $x = ۰$ صفر است و با یک حالت مبهم روبه‌رو هستیم. می‌توان تابع‌های صورت و مخرج را به صورت ضرب یک عامل x نوشت و با ساده‌سازی به شکل صفحه بعد حد را محاسبه کرد:

$$\lim_{x\to ۰} g(x)=\lim_{x\to ۰}\frac{(x+x^{۳})\sin x}{x^{۲}(۱-x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{x(۱+x^{۲})\sin x}{x^{۲}(۱-x)}$$

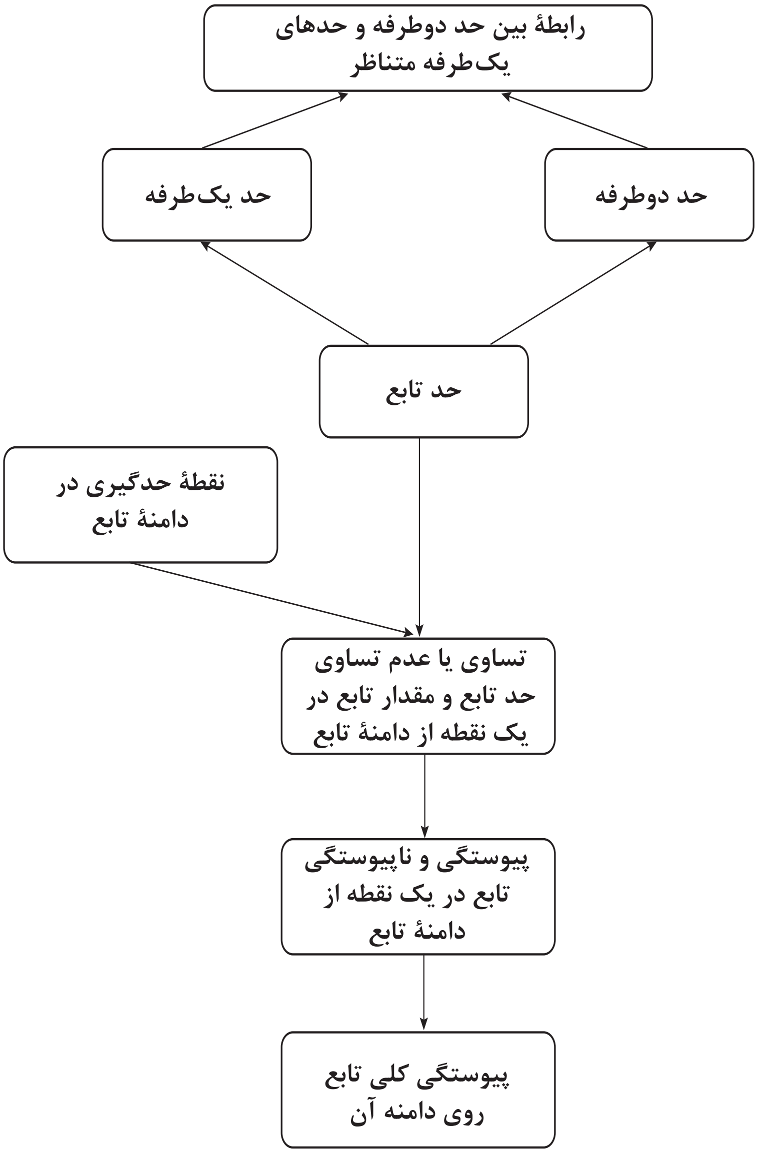
$$=\lim_{x\to ۰}\frac{(۱+x^{۲})}{(۱-x)}\times\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{(۱+x^{۲})}{(۱-x)}\times\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱\times۱=۱$$

ب) این تابع در $x=۱$ حد ندارد، زیرا حد تابع صورت در این نقطه، عددی ناصفر است و حد تابع مخرج آن در این نقطه صفر است.

فصل سوم

مقایسه حدهای یک‌طرفه و دوطرفه و پیوستگی تابع‌ها

نقشه مفهومی فصل سوم



اهداف کلی پودمان

۱ درک تفاوت حدهای یک‌طرفه و حدهای دو طرفه
۲ درک حدهای چپ و راست در حدهای دوطرفه
۳ درک رابطهٔ بین وجود حد دوطرفه و وجود و یکسانی حدهای چپ و راست
۴ آشنایی با نماد حد چپ و راست در یک نقطه
۵ محاسبهٔ حد چپ و راست تابع در یک نقطه (با استفاده از ضابطه و نمودار)
۶ درک مفهوم پیوستگی یک تابع در یک نقطه از دامنهٔ تابع، از طریق یکسانی حدتابع و مقدار تابع
۷ درک مفهوم پیوستگی یک تابع در یک بازه
۸ تشخیص وضعیت پیوستگی تابع‌های خاص
۹ درک وضعیت پیوستگی تابع، از طریق یکپارچگی نمودار (نداشتن بریدگی) روی بازه‌های دامنه
۱۰ مدل‌سازی وضعیت‌های مسئله‌ای به کمک تابع و تشخیص پیوستگی یا عدم پیوستگی آن

پیش‌نیازها

- آشنایی با تابع‌ها و بازنمایی‌های مختلف آن
- تشخیص مقادیر یک تابع از روی نمودار
- آشنایی با انواع تابع‌ها، به ویژه توابع چند ضابطه‌ای
- آشنایی با مفهوم حد تابع در یک نقطه
- توانایی محاسبه حد تابع در یک نقطه

بخش اول: حدهای یک‌طرفه و دوطرفه

اهداف بخش

۱ تشخیص حدهای یک‌طرفه و حدهای دو طرفه
۲ درک حدهای چپ و راست در حدهای دوطرفه و رابطهٔ بین آنها
۳ آشنایی با نماد حد چپ و راست در یک نقطه
۴ محاسبه و تشخیص حد چپ و راست تابع در یک نقطه (با استفاده از ضابطه و نمودار)

واژه‌های کلیدی: حد یک‌طرفه و دوطرفه، حد چپ، حد راست

نگاه کلی به بخش

هدف این بخش، تشخیص تفاوت بین حدهای یک‌طرفه و حدهای دوطرفه و توجه به حدهای چپ و راست در حدهای دوطرفه و استفاده از آنها است. در این بخش، فرض بر آن است که هنرجویان به خوبی فرایند حدگیری را می‌شناسند، ولی در حدهای دوطرفه ممکن است دچار مشکل باشند که آیا متغیر را از سمت راست یا چپ به نقطهٔ حدگیری نزدیک کنند. به همین دلیل، مباحثه‌ای و طرح سؤالی در کتاب انجام می‌شود و در کتاب درباره تفاوت حدهای یک‌طرفه و دوطرفه توضیح داده می‌شود و نهایتاً مفاهیم حدهای چپ و راست در حدهای دوطرفه معرفی می‌شوند و در مثال‌هایی توضیح داده می‌شوند.

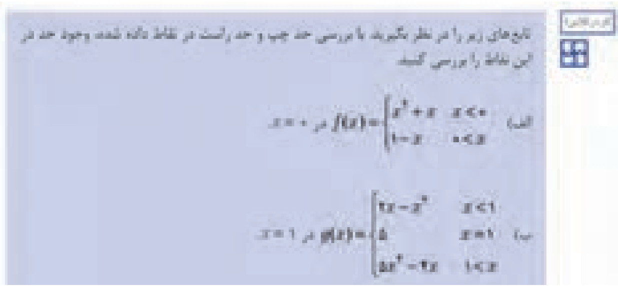
ورود به مطلب

این مبحث کاملاً درون‌ریاضی است و عمق بخشیدن به درک مفهوم حد در حدهای دوطرفه است. بنابراین ایجاد انگیزه برای ورود به این مبحث می‌تواند با طرح سؤالی درون‌ریاضی انجام شود. با فرض درک مفهوم حد می‌توان در حدهای دو طرفه این پرسش را مطرح کرد که متغیر از کدام طرف باید به نقطهٔ حدگیری نزدیک شود. بحث دربارهٔ شیوه نزدیک شدن متغیر به نقطهٔ حدگیری بسیار آموزنده و راهگشا خواهد بود و درک عمیق‌تری را از مفهوم حد ایجاد خواهد کرد. یک بحث دقیق و کامل، می‌تواند منجر به تعریف ایستا از تعریف حد باشد که نیازمند هیچ‌گونه حرکتی از متغیر نباشد و فقط همسایگی‌های نقاط مطرح هستند ولی نیازی به رسیدن به این حد از دقت به مفهوم حد نیست و نهایتاً می‌توانید به این نتیجه

برسید که کافیست نزدیک شدن متغیر به نقطهٔ حدگیری را از چپ و راست مستقل از هم انجام دهید و به مفهوم حد چپ و حد راست برسید.

فعالیت آموزشی

این بخش با طرح سؤال شروع می‌شود و در کتاب توضیحات اصلی دربارهٔ حدهای یک‌طرفه و دوطرفه از زبان معلم ارائه می‌شود. در ادامه در حالت حدهای دوطرفه مفاهیم حدهای چپ و راست طرح می‌شوند و با ذکر انواع مثال‌ها، توضیحات تکمیل می‌شوند و این مفاهیم در کار در کلاس (۱) تمرین می‌شوند.
توجه داشته باشید که مفاهیم حدهای چپ و راست فقط مخصوص حدهای دوطرفه است و نماد حدگیری راست و چپ فقط زمانی به‌کار می‌رود که حد دوطرفه باشد و بخواهیم مشخص کنیم که قرار است حدگیری را از راست یا چپ انجام دهیم.
در حدهای یک‌طرفه، خود به خود از طریق دامنهٔ تابع و وضعیت نقطه نسبت به دامنه، مشخص است که متغیر از چپ یا راست به نقطهٔ حدگیری نزدیک می‌شود و لزومی به نمادگذاری جدید برای مشخص کردن چپ یا راست نیست و همان نماد حدگیری کلی به‌کار می‌رود.


کار در کلاس

تابع‌های زیر را در نظر بگیرید با بررسی حد چپ و حد راست در نقاط داده شده وجود حد در این نقاط را بررسی کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases} x^۲+x & x<۰ \\ ۱-x & ۰<x \end{cases}$ در $x=۰$

ب) $g(x)=\begin{cases} ۲x-x^۲ & x<۱ \\ ۵ & x=۱ \\ ۳x^۲-۴x & ۱<x \end{cases}$ در $x=۱$

در این کار در کلاس تابع‌هایی داده شده‌اند که چند ضابطه‌ای هستند و مقدار حد در نقطهٔ تغییر ضابطه خواسته شده است. می‌توان به هنرجویان تذکر داد که در این گونه تابع‌ها برای محاسبهٔ حد در سایر نقاط (که ضابطه در دو طرف نقطهٔ حدگیری عوض نمی‌شود) لزومی به محاسبهٔ جداگانهٔ حد چپ و حد راست نمی‌باشد.

حل کار در کلاس (۱)

الف) قانون تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+x & x\leq ۰ \\ ۱-x & x>۰ \end{cases}$ در دوطرف صفر متفاوت است پس لازم است حدچپ و حد راست تابع را در نقطهٔ صفر جداگانه بررسی کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+} +۱-x=۱\\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-} x^۲+x=۰\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)$$

چون حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ صفر برابر نیست پس تابع در نقطهٔ صفر حد ندارد.

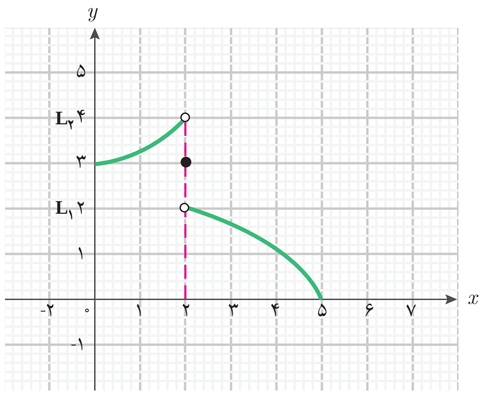
ب) قانون تابع $g(x)=\begin{cases}۲x-x^۲ & x<۱\\ ۵ & x=۱\\ ۵x^۲-۴x & ۱<x\end{cases}$ در دوطرف نقطهٔ ۱ متفاوت است، پس

لازم است حدچپ و حد راست تابع را در نقطهٔ ۱ جداگانه بررسی کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۱^+} g(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+} (۵x^۲-۴x)=۱\\ \lim\limits_{x\to ۱^-} g(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-} (۲x-x^۲)=۱\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱^+} g(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-} g(x)\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱} g(x)=۱$$

چون حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ ۱ = x برابر است پس تابع در نقطهٔ ۱ حد دارد و حد آن عدد ۱ است. (یکی شدن نقطهٔ حدگیری و مقدار حد تصادفی است. حتماً تذکر داده شود.)

پ) حد راست تابع در نقطهٔ ۲ = x برابر $L_۱$ و حد چپ آن در این نقطه برابر $L_۲$ است واضح است $L_۱\neq L_۲$ یعنی حد چپ و حد راست تابع h برابر نیستند، پس تابع h در این نقطه حد ندارد.



حل مسائل

۱ فرایندها و مهارت‌ها: استدلال، بازنمایی

حد این تابع در نقطه $x = -۲$، حد یک طرفه راست است، زیرا از نقاط دامنه این تابع، فقط از راست می‌توان به ۲- نزدیک شد. طبق نمودار، حد این تابع در نقطهٔ $x = -۲$ وجود دارد و برابر ۱ است.

اما حد این تابع در نقطهٔ ۳، حد یک‌طرفه چپ است. زیرا، از نقاط دامنهٔ این تابع، فقط از چپ می‌توان به ۳ نزدیک شد. طبق نمودار، حد این تابع در این نقطه موجود است و برابر صفر است.

حدگیری این تابع در صفر یک حد دوطرفه است. از آنجا که نمودار تابع در دو طرف $x = ۰$ با هم متفاوت‌اند، حدهای چپ و راست در $x = ۰$ را جداگانه محاسبه می‌کنیم. طبق نمودار داریم:

$$\lim_{x \to ۰^-} f(x) = ۲ \quad , \quad \lim_{x \to ۰^+} f(x) = ۱$$

با توجه به اینکه حدهای چپ و راست این تابع در $x = ۰$ مساوی نیستند، این تابع در صفر حد ندارد.

به طور مشابه حدگیری این تابع در $x = ۲$ یک حد دوطرفه است. چون نمودار تابع در دو طرف ۲ با هم متفاوت‌اند، حدهای چپ و راست در این نقطه را جداگانه حساب می‌کنیم. طبق نمودار داریم:

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = ۱ \quad , \quad \lim_{x \to ۲^+} f(x) = ۱$$

با توجه به اینکه حدهای چپ و راست در $x = ۲$ مساوی ۱ هستند، حد تابع در این نقطه، برابر ۱ می‌باشد.

۲ فرایندها و مهارت‌ها: استدلال

با توجه به اینکه این حدگیری دوطرفه است و قانون تابع در دو طرف $x = ۲$ با هم متفاوت‌اند، حدهای چپ و راست در این نقطه را جداگانه حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x \to ۲^-} g(x) = \lim_{x \to ۲^-} ۲ - x^۲ = -۲ \quad , \quad \lim_{x \to ۲^+} g(x) = \lim_{x \to ۲^+} x - ۴ = -۲$$

با توجه به اینکه حدهای چپ و راست تابع g در $x = ۲$ با هم مساوی هستند، این تابع در این نقطه حد دارد و حد آن برابر ۲- است.

۳ فرایندها و مهارت‌ها: استدلال، بازنمایی

از طریق نمودار دیده می‌شود این تابع در صفر حد دارد و حد آن صفر است. اما برای اثبات این مطلب به روش جبری باید قانون این تابع را به طور صریح بنویسیم.

این تابع در دو طرف صفر به صورت دو خط متفاوت است و قانون آن به صورت دوضابطه‌ای به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x & x<0\\ x & 0\le x\end{cases}$$

پس حد این تابع در صفر را با محاسبهٔ حدهای چپ و راست در صفر به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0 \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} -x=0$$

چون حدهای چپ و راست این تابع در صفر، هر دو صفر هستند، می‌توان گفت حد این تابع در صفر برابر صفر است.

۴ فرایندها و مهارت‌ها: حل مسئله، استدلال

الف) بله. زیرا:

$$\lim_{x\to -1^-} g(x)=\lim_{x\to -1^-}(ax+2)=-a+2$$

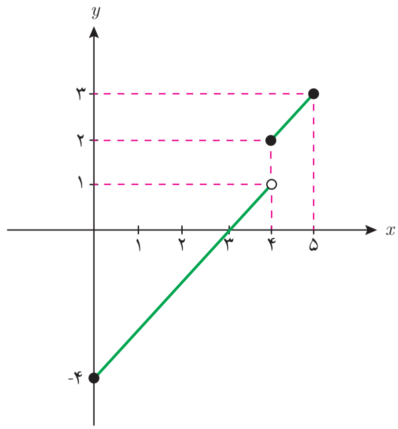
$$\lim_{x\to -1^+} g(x)=\lim_{x\to -1^+}(x^2+a)=1+a$$

ب) برای اینکه این تابع در $x=1$ حد داشته باشد، بایستی حدهای چپ و راست تابع در این نقطه با هم برابر باشند.

$$1+a=-a+2 \;\Rightarrow\; 2a=1 \;\Rightarrow\; a=\frac{1}{2}$$

۵ فرایندها و مهارت‌ها: بازنمایی، حل مسئله

نمودارهای زیادی می‌توان رسم کرد. به‌طور مثال:



۶ فرایندها و مهارت‌ها: حل مسئله، استدلال

تابع‌های زیادی می‌توان مثال زد. به طور مثال:

$$f(x)=\begin{cases} -۱ & x \leq ۲ \\ \dfrac{۵x}{۲} & ۲ < x \end{cases}$$

۷ فرایندها و مهارت‌ها: حل مسئله، استدلال

تابع‌های زیادی می‌توان مثال زد. به‌طور مثال:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{۱}{x} & x < ۰ \\ ۲x+۱ & ۰ \leq x \end{cases}$$

بخش دوم: پیوستگی تابع‌ها

اهداف بخش

۱ درک مفهوم پیوستگی یک تابع در یک نقطه از دامنهٔ تابع، از طریق یکسانی حدتابع و مقدار تابع
۲ درک مفهوم پیوستگی یک تابع در یک بازه
۳ تشخیص وضعیت پیوستگی تابع‌های خاص
۴ درک وضعیت پیوستگی تابع، از طریق یکپارچگی نمودار (نداشتن بریدگی) روی بازه‌های دامنه
۵ مدل‌سازی وضعیت‌های مسئله‌ای به کمک تابع و تشخیص پیوستگی یا عدم پیوستگی آن

واژه‌های کلیدی: پیوستگی و ناپیوستگی در نقطه، پیوستگی کلی، بریدگی و یکپارچگی نمودار

نگاه کلی به بخش

هدف این بخش آموزش پیوستگی است. اصطلاح پیوستگی در زبان روزمره نیز کاربرد دارد و معنای زبانی آن به معنای ریاضی آن نزدیک است. در کتاب وقتی از پیوستگی حرکت صحبت می‌کنیم منظور، پیوستگی در معنای زبانی آن است. بنابراین، از طریق متن باید تشخیص داده شود که به‌کارگیری اصطلاح پیوستگی در کتاب چه وقت به معنای ریاضی آن است و چه وقت به معنای زبانی آن است.
برای درک مفهوم پیوستگی از همان زمینه حرکت هواپیما استفاده شده است. در این بخش این سؤال طرح می‌شود که اگر مقدار تابع در نقطه‌ای مشخص باشد، آیا باز هم حق داریم حد تابع را در آن نقطه حساب کنیم و اگر بتوانیم حد را حساب کنیم آیا ممکن است عددی غیر از مقدار تابع به دست آوریم؟ مباحثه در مورد این سؤال نکات آموزندهٔ بسیاری در بر دارد.
آیا حدگیری از یک تابع فقط در جایی انجام می‌شود که مقدار تابع در آن نقطه مشخص نباشد؟ جواب به این سؤال آن است حدگیری از یک تابع در یک نقطه فقط نشان‌دهندهٔ رفتار تابع در اطراف آن نقطه است و مشخص بودن یا نبودن مقدار تابع در آن نقطه، هیچ دخالتی در فرایند حدگیری ندارد. بنابراین، در جاهایی هم که مقدار تابع در یک نقطه، مشخص است ممکن است برای تشخیص رفتار تابع در اطراف آن نقطه لازم باشد عمل حدگیری در آن نقطه انجام شود.
مهم‌ترین رفتار یک تابع در اطراف یک نقطه از دامنهٔ آن این است که آیا حد تابع

در آن نقطه برابر مقدار تابع در آن نقطه است یا خیر. در زمینهٔ حرکت هواپیما، به دلیل پیوستگی حرکت هواپیما، جواب مثبت است و به‌طور طبیعی انتظار داریم که برای تابع حرکت هواپیما در هر نقطه از دامنهٔ آن حد تابع همان مقدار تابع باشد و این ویژگی را به عنوان تعریف پیوستگی در ریاضی انتخاب می‌کنیم. این نکته که در مورد برخی توابع ممکن است این ویژگی برقرار نباشد به‌طور صریح بیان می‌شود و در یک مثال ریاضی نشان داده می‌شود.

دیدن ناپیوستگی در طبیعت آسان نیست و ریاضیات توصیف‌کننده طبیعت معمولاً با تابع‌های پیوسته کار می‌کند. با این حال در کتاب یک مثال واقعی نیز نشان داده شده است که مدل ریاضی آن با یک تابع ناپیوسته بیان می‌شود. البته در این مثال هم در واقعیت تابع اصلی پیوسته است ولی برای ما ساده‌تر آن است که وضعیت را با یک تابع ناپیوسته مدل‌سازی کنیم.

پس از انجام فعالیت‌ها و دیدن مثال‌ها و شیوه تحقیق در پیوستگی و ناپیوستگی توابع، توابع پیوسته مهم و اساسی معرفی می‌شوند و رابطهٔ بین ایده ریاضی پیوستگی و پیوستگی نمودار توابع (بدون بریدگی) طرح می‌شود. در مثال‌هایی دیده می‌شود که اگرچه تابع از لحاظ ریاضی پیوسته است ولی نمودار آن بریدگی دارد. این موارد وقتی رخ می‌دهند که دامنهٔ تابع خودش بریدگی داشته باشد و بازه نباشد. بنابراین، ایدهٔ شهودی پیوستگی نمودار تابع و پیوستگی ریاضی تابع وقتی بر هم منطبق می‌شوند که دامنهٔ تابع یک بازه باشد. یک تابع وقتی پیوسته است که روی بازه‌های داخل دامنهٔ خود پیوستگی شهودی داشته باشد.

ورود به مطلب

برای طرح مفهوم پیوستگی بهتر است از مسئلهٔ حد یک تابع در نقاط دامنهٔ خود که مقدار تابع مشخص است شروع کنید که آیا می‌توانیم در این حالت حد بگیریم؟ به چه دلیلی حد بگیریم وقتی مقدار تابع مشخص است؟ اگر حد بگیریم آیا غیر از مقدار تابع چیز دیگری ممکن است به‌دست آید؟ پس از مباحثه دربارهٔ این سؤالات می‌توانید جواب‌ها را در مثال‌های متعدد بررسی کنید و نهایتاً حالت حد تابع که مساوی مقدار تابع می‌شود را به عنوان ویژگی پیوستگی معرفی کنید که با شهود پیوستگی هم سازگار است. سایر حالات را به عنوان ناپیوستگی معرفی کنید.

فعالیت آموزشی

این بخش با طرح یک سؤال آغاز می‌شود که در آن حدگیری از تابع‌هایی در نقاطی مطرح می‌شود که مقدار تابع در آن نقاط مشخص است. اینکه به چه دلیل حد می‌گیریم و آیا حد به دست آمده با مقدار تابع می‌تواند متفاوت باشد یا خیر مباحثاتی انجام می‌شود و در کتاب از زبان معلم حالات ممکن توضیح داده

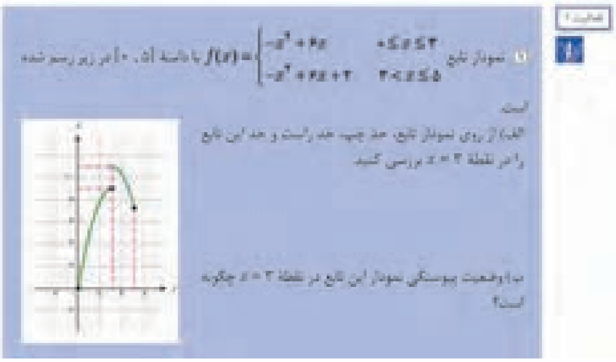
می‌شوند و مفهوم پیوستگی به‌طور ضمنی مطرح می‌شود. در فعالیت (۱) حالات ممکن برای تابع و حد آن و مقدار تابع بررسی می‌شوند.

اهداف موضوعی:

- درک مفهوم پیوستگی تابع در یک نقطه با استفاده از نمودار تابع.
- درک ارتباط بین حد و پیوستگی تابع در یک نقطه با استفاده از نمودار تابع.
- کسب مهارت تشخیص پیوستگی تابع با استفاده از نمودار تابع.
- آشنایی با نمودار برخی وضعیت‌های ناپیوستگی تابع در یک نقطه.

فرایندها:

- بازنمایی‌ها.
- استدلال کردن.
- تفکر بصری.



با توجه به نقشی که نمودار در درک شهودی مفاهیم ریاضی از جمله مفهوم پیوستگی تابع دارد، در این فعالیت از نمودار تابع‌ها درشروع ارائهٔ مفهوم پیوستگی استفاده شده‌است. تبیین صحیح علت گسستگی تابع در یک نقطه با استفاده از نمودار تابع توسط هنرجو، به ایجاد درک صحیح او از مفهوم پیوستگی کمک می‌کند.

حل فعالیت (۱)

۱ الف) از روی نمودار می‌توان دید حدچپ تابع در این نقطه ۹ و حد راست تابع در این نقطه ۱۱ است، بنابراین، این تابع در این نقطه، حد ندارد.

ب) نمودار تابع در نقطهٔ $x = ۳$ گسستگی دارد و پیوسته نیست.

۲ الف) حد چپ و حد راست تابع در نقطهٔ $x = ۳$ برابر ۹ است. بنابراین حد این تابع در نقطهٔ $x=۳$ برابر ۹ است.

ب) خیر، مقدار تابع در نقطهٔ $x = ۳$ عدد ۱۱ است.

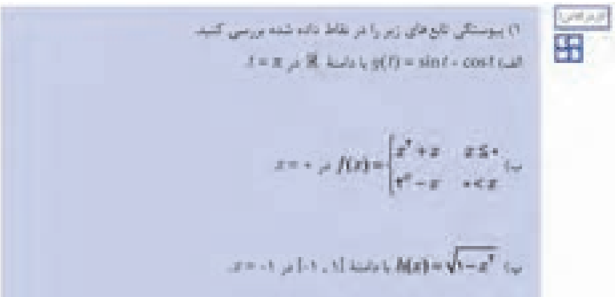
پ) نمودار تابع در این نقطه گسستگی دارد.

۳ الف) نمودار تابع در نزدیکی نقطهٔ ۳ = x نشان می‌دهد حد تابع در این نقطه، عدد ۹ است.

ب) بله مساوی است.

پ) نمودار تابع در نقطهٔ ۳ = x گسستگی ندارد و پیوسته است.

پس از این فعالیت، مفهوم پیوستگی و رابطهٔ آن با حد تابع و مقدار تابع باید در ذهن هنرجو شکل گرفته باشد. در ادامه، مفهوم پیوستگی در نقطه و پیوستگی کلی تابع در دامنهٔ آن، رسماً معرفی می‌شوند و در مثال‌هایی توضیح داده می‌شوند و تابع‌های پیوسته مهم معرفی می‌شوند. رابطهٔ بین پیوستگی شهودی نمودار تابع و پیوستگی تابع با تعریف ریاضی آن نیز در انتها توضیح داده می‌شود. در انتهای این بخش این مفاهیم در کار در کلاس (۲) تمرین می‌شوند.


۱) پیوستگی تابع‌های زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید.

الف) $g(t) = \sin t + \cos t$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در $t = \pi$

ب) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \le 0 \\ e^x - x & 0 < x \end{cases}$ در $x = 0$

پ) $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$ با دامنهٔ $[-1, 1]$ در $x = -1$

در این قسمت برای تقویت مهارت هنرجویان توابع مختلف (مثلثاتی، چندضابطه‌ای، نمایی و رادیکالی) انتخاب شده‌است. همچنین نقطهٔ انتخاب شده جهت بررسی پیوستگی نیز متنوع انتخاب (نقطهٔ داخل دامنه و نقطهٔ ابتدا یا انتهای دامنه) شده است. جهت کسب مهارت بیشتر با توجه به توابع معرفی شده در کتاب می‌توان مثال‌های متنوع دیگری نیز انتخاب کرد و در اختیار هنرجویان قرار داد.

حل کار در کلاس (۲)

۱ الف) پیوسته است زیرا:

$$\lim_{t\to\pi} g(t) = \lim_{t\to\pi}(\sin t + \cos t) = \lim_{t\to\pi}(\sin t) + \lim_{t\to\pi}(\cos t) = \sin\pi + \cos\pi = g(\pi)$$

ب) تابع در دو طرف نقطهٔ صفر ضابطه‌های متفاوت دارد، بنابراین برای محاسبهٔ

حد این تابع در صفر، لازم است حدهای چپ و راست آن را در این نقطه محاسبه و برابری این دو حد را بررسی کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}(۲^x-x)=۱\\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-}(x^۲+x)=۰\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)$$

چون حدهای چپ و راست برابر نیستند، این تابع در این نقطه حد ندارد، در نتیجه پیوسته نیز نمی‌باشد.

پ) با توجه به دامنهٔ تابع، به نقطهٔ $x=-۱$ از راست می‌توان نزدیک شد، بنابراین حد تابع در این نقطه حد یک‌طرفه است.

$$\lim\limits_{x\to -۱} h(x)=\lim\limits_{x\to -۱}\sqrt{۱-x^۲}=\sqrt{۱-(-۱)^۲}=۰=h(۰)$$

پس، حد تابع در این نقطه با مقدار تابع در این نقطه برابر است و این تابع در نقطهٔ $x=-۱$ پیوسته است.

۲ به ازای هر عدد a از دامنهٔ این تابع داریم $۰<a<\frac{\pi}{۲}$ و حد مخرج این تابع در نقطهٔ a برابر $\sin a$ است که مقداری ناصفر است. پس این تابع در نقطهٔ a حد دارد و

$$\lim\limits_{x\to a}\frac{۱}{\sin x}=\frac{\lim\limits_{x\to a}۱}{\lim\limits_{x\to a}\sin x}=\frac{۱}{\sin a}$$

یعنی، این تابع پیوسته است.

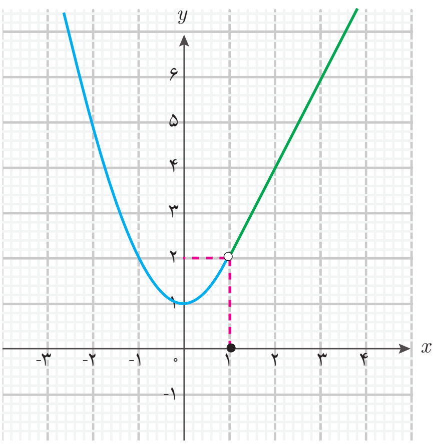
حل مسائل

۱ فرایندها و مهارت: استدلال، بازنمایی

برای تشخیص وجود حد، حدهای چپ و راست در این نقطه را جداگانه بررسی می‌کنیم.

$$\lim\limits_{x\to ۱^-} h(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(۱+x^۲)=۲$$

$$\lim\limits_{x\to ۱^+} h(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}۲x=۲$$



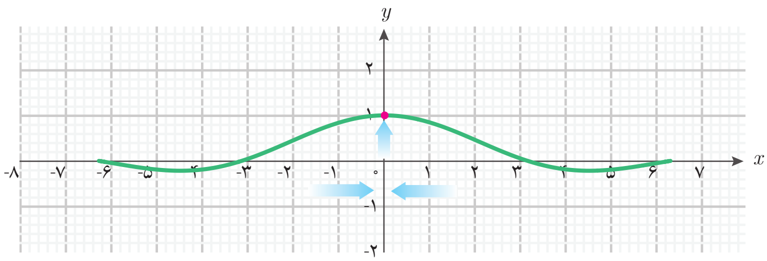
با توجه به اینکه حدهای چپ و راست این تابع در $x=۱$ با هم برابر

است، پس $\lim\limits_{x\to ۱} h(x) = ۲$.

اما $h(۱) = ۰$، پس حد تابع h در نقطهٔ $x = ۱$ با مقدار تابع در این نقطه مساوی نیست و تابع h در این نقطه پیوسته نیست.

۲ فرایندها و مهارت: استدلال، بازنمایی

وضعیت این تابع در نقاط ناصفر روشن است. با حدگیری از تابع در نقاط ناصفر دیده می‌شود حد تابع با مقدار تابع در این نقاط مساوی است. اما قبلاً دیده بودیم حد این تابع در صفر برابر ۱ است و مقدار این تابع نیز در صفر برابر ۱ است. پس در نقطه صفر هم پیوستگی برقرار است و این تابع همه‌جا پیوسته است.

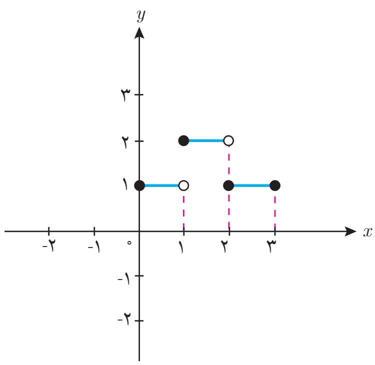


۳ فرایندها و مهارت: استدلال، بازنمایی

تابع f با دامنه $[۰, ۳]$ در $x = ۱$ و $x = ۲$ پیوسته نیست. زیرا در این نقاط حد ندارد.

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۱ \quad , \quad \lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۲$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = ۲ \quad , \quad \lim_{x\to ۲^+} f(x) = ۱$$



۴ فرایندها و مهارت: استدلال، بازنمایی

اگر a نقطه ای از دامنه این تابع باشد، داریم: $\circ < a < \frac{\pi}{۲}$. بنابراین با استفاده از حد تقسیم دو تابع (حد تابع مخرج در این نقطه صفر نیست) داریم:

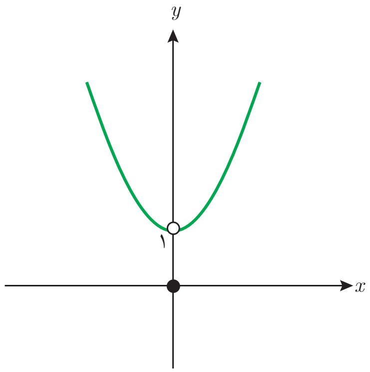
$$\lim_{x\to a}\frac{\cos^{۲} x}{۱-\sin x}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\cos^{۲} x}{\lim\limits_{x\to a}۱-\sin x}=\frac{\cos^{۲} a}{۱-\sin a}$$

بنابراین، این تابع در دامنهٔ داده شده، پیوسته است.

۵ فرایندها و مهارت: استدلال، حل مسئله، بازنمایی

تابع‌های زیادی می‌توان مثال زد. به‌طور نمونه:

$$f(x)=\begin{cases}۱+x^{۲} & x\neq \circ\\ \circ & x=\circ\end{cases}$$



۶ فرایندها و مهارت: استدلال، حل مسئله

بله، این تابع پیوسته است. زیرا نمودار این تابع بریدگی ندارد و روی هر بازه در دامنه‌اش پیوستگی دارد.

۷ فرایندها و مهارت: حل مسئله، استدلال

بله. اگر دامنهٔ یک تابع از اجتماع چند بازه جدا از هم تشکیل شده باشد، نمودار تابع نیز از چند قسمت جدا از هم تشکیل خواهد شد و با توجه به اینکه نمودار تابع داده شده روی هر بازه از دامنهٔ خود پیوسته می‌باشد، می‌توان گفت این تابع در دامنه داده شده پیوستگی دارد.

۸ فرایندها و مهارت: حل مسئله، استدلال، نمایش

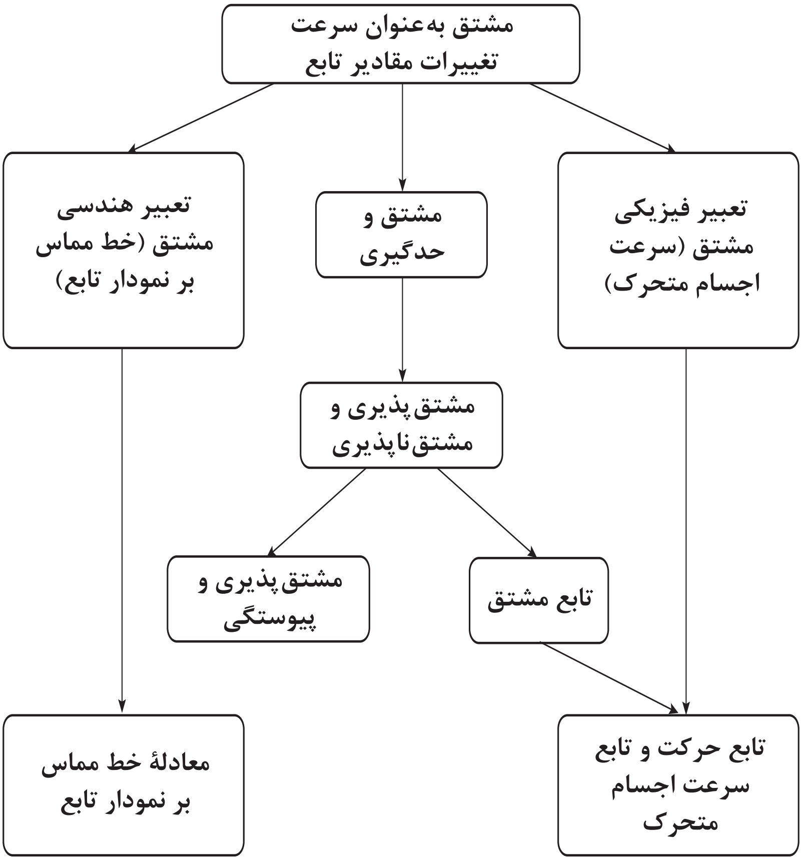
الف) بله پیوسته است، زیرا نمودار تابع روی هر بازه از دامنهٔ آن پیوستگی دارد.

ب) به‌دلیل پیوستگی تابع، حد تابع در هر نقطه برابر مقدار تابع در آن نقطه است. پس کافیست که مقدار تابع در این نقطه را از روی نمودار تابع به‌دست آوریم.

فصل چهارم

درک مفهوم مشتق

نقشهٔ مفهومی فصل چهارم



اهداف کلی پودمان

۱ درک مفهوم مشتق تابع در یک نقطه به‌عنوان سرعت تغییرات مقادیر تابع در آن نقطه
۲ محاسبهٔ مشتق تابع‌های ساده در یک نقطه با حدگیری
۳ درک رابطهٔ بین مشتق تابع و سرعت متحرک‌ها
۴ تفسیر حرکت یک متحرک با یافتن مشتق تابع حرکت
۵ درک مشتق تابع به‌عنوان یک تابع
۶ درک رابطهٔ بین مشتق تابع در یک نقطه و شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه
۷ یافتن معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع‌ها در نقاط مختلف
۸ به‌کارگیری مشتق در تبیین و تفسیر سرعت تغییرات در وضعیت‌های معمول و زندگی واقعی

پیش‌نیازها

- آشنایی با انواع توابع و بازنمایی‌های مختلف آن
- آشنایی با مفهوم حد تابع در یک نقطه و محاسبهٔ آن
- آشنایی با تابع حرکت اجسام
- توانایی محاسبه شیب یک خط از روی نمودار و معادله
- آشنایی با رابطه بین شیب یک خط و تانژانت زاویه بین خط و محور طول‌ها
- آشنایی با مفهوم خط مماس

بخش اول: مشتق تابع‌ها

اهداف بخش

۱ درک مفهوم مشتق تابع در یک نقطه به‌عنوان سرعت تغییرات مقادیر تابع در آن نقطه
۲ محاسبهٔ مشتق تابع‌های ساده در یک نقطه با حدگیری
واژه‌های کلیدی: تغییرات مقادیر تابع، سرعت حرکت، مشتق تابع

نگاه کلی به بخش

هدف این بخش آموزش مفهوم مشتق است. در اینجا از زمینه سرعت حرکت اجسام برای آموزش مشتق استفاده شده است. از لحاظ تاریخی نیز مفهوم مشتق به همین شکل به‌وجود آمده است. به همین دلیل، این بخش با همان مسئلهٔ اصلی نیوتن در محاسبهٔ سرعت اجسام شروع شده است.
ابتدا، مباحثه‌ای بین هنرجویان و معلم در چگونگی یافتن سرعت اجسام آغاز می‌شود و پیشنهادهای به‌دست آمده در فعالیت (۱) به اجرا در می‌آید که همان آموزش مفهوم مشتق است. سپس، مفهوم مشتق در حالت کلی آن تعریف شده و در مثال‌ها تمرین می‌شود.

ورود به مطلب

مفهوم اصلی مشتق، در شدت تغییرات مقادیر یک تابع است. هر کجا که شدت تغییرات یک تابع قابل مشاهده باشد و به آسانی قابل شناسایی باشد، زمینهٔ مناسبی برای طرح مفهوم مشتق است. در اینجا از شدت تغییرات مکان یک متحرک استفاده شده است که به‌طور شهودی سرعت متحرک نامیده می‌شود.

فعالیت آموزشی

ابتدا سؤالی دربارهٔ چگونگی محاسبهٔ سرعت اجسام مطرح می‌شود. سپس، با مباحثه، راه‌حل‌های به‌دست آمده در فعالیت (۱) به اجرا در می‌آیند.

اهداف موضوعی

- درک مفهوم مشتق تابع در یک نقطه.
- آشنایی با روش محاسبهٔ مشتق تابع در یک نقطه.

فرایندها:

- پیوندها و اتصال‌ها (ریاضی و خارج ریاضی).
- بازنمایی‌ها.
- ارتباطات کلامی.
- حل مسئله (مدل‌سازی).

به منظور توجه به اهمیت مشتق و ایجاد درک مناسب از مفهوم آن، مشتق در یک زمینهٔ واقعی (فیزیکی) مطرح شده است. توجه به هر کدام از سؤالات و پاسخ‌دهی مناسب به آن، هنرجویان را به ایجاد درک مناسب از این مفهوم هدایت خواهد کرد.

حل فعالیت (۱)

۱ $f(1)$، فاصلهٔ توپ از محل رها شدن را ۱ ثانیه پس از رها شدن، نشان می‌دهد.

$f(1)=5$

۲ $f(1+h)$، فاصلهٔ توپ از محل رها شدن را $1+h$ ثانیه پس از رها شدن، نشان می‌دهد.

$$f(1+h)=5(1+h)^2$$

۳ مسافت طی شده در بازهٔ زمانی $[1,1+h]$ برابر $f(1+h)-f(1)$ است.

$$f(1+h)-f(1)=5(1+h)^2-5\times 1^2=10h+5h^2$$

این حرکت، h ثانیه طول کشیده است.

۴ سرعت متوسط توپ، برابر است با مسافت طی شده تقسیم بر زمان سپری شده. بنابراین:

$$v(h)=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=10+5h$$

۵ جدول تکمیل شده:

h	۰	←	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
V(h)		←	۱۰/۰۰۰۵	۱۰/۰۰۵	۱۰/۰۵	۱۰/۵

۶ سرعت توپ در زمان $t=1$ ثانیه پس از رها شدن را نشان می‌دهد.

۷ سرعت توپ در لحظهٔ $t=1$ برابر ۱۰ است.

پس از انجام فعالیت، نکات این فعالیت به‌طور مبسوط و در حالت $h<0$ نیز توضیح داده می‌شوند. نهایتاً مفهوم مشتق به‌عنوان حد نسبت تغییرات تابع به تغییرات متغیر تعریف می‌شود. در مثال‌های متعدد این مفهوم بررسی و رابطه مشتق‌پذیری و پیوستگی بیان می‌شود. در کار در کلاس(۱) این مفاهیم تمرین می‌شوند.

حل کار در کلاس (۱)

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2+4(2+h)-(4+8)}{h} \quad \lim$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+8h}{h}=8$$

حل مسائل

۱ فرایندها و مهارت‌ها: حل مسئله

الف) $f'(4)=\lim_{h\to 0}\frac{2-2}{h}=0$

ب) $g'(4)=\lim_{h\to 0}\frac{-3(4+h)+4-(-3\times 4+4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-12-3h+4+12-4}{h}=-3$

پ) $u'(4)=\lim_{h\to 0}\frac{(4+h)-(4+h)^2-(4-(4)^2)}{h}=-7$

۲ فرایندها و مهارت‌ها: حل مسئله

$$g'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2-2-h}{2(2+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{2h(2+h)}=-\frac{1}{4}$$

۳ فرایندها و مهارت‌ها: استدلال، حل مسئله

ابتدا پیوستگی تابع f در نقطهٔ ۳ را بررسی می‌کنیم. به دلیل، تفاوت قانون f در دو طرف ۳ برای یافتن حد تابع در این نقطه، حدهای چپ و راست را بررسی می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(2x^2-10)=8\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(-x+11)=8\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)$$

بنابراین حد تابع در این نقطه وجود دارد و برابر مقدار تابع در این نقطه است. پس f در این نقطه پیوسته است.

برای تشخیص مشتق‌پذیری تابع f نیز باید وجود و یکسانی حدهای چپ و راست نسبت تغییرات تابع به تغییرات متغیر را بررسی کنیم.

$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۳+h)-۸}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{۲(۳+h)^۲-۱۰-۸}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{۱۸+۱۲h+۲h^۲-۱۸}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰^-}\frac{h(۱۲+۲h)}{h}=۱۲$$

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۳+h)-۸}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{-(۳+h)+۱۱-۸}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{-۳-h+۳}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰^+}\frac{-h}{h}=-۱$$

این محاسبه نشان می‌دهد حد کسر $\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}$ در $h=۰$ وجود ندارد و تابع f در $x=۳$ مشتق‌پذیر نیست.

۴ فرایند و مهارت: استدلال، حل مسئله

به دلیل تفاوت قانون تابع در دو طرف نقطهٔ ۱- باید حدهای چپ و راست کسر نسبت تغییرات تابع به تغییرات متغیر را جداگانه بررسی کنیم. توجه داشته باشید که $v(-۱)=-۲$.

$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{v(-۱+h)-v(-۱)}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{۴(-۱+h)^۲+۲(-۱+h)-۴-(-۲)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰^-}\frac{۴-۸h+۴h^۲-۲+۲h-۲}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{۴h^۲-۶h}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{۲h(۲h-۳)}{h}=-۶$$

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{v(-۱+h)-v(-۱)}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{-۶(-۱+h)-۸-(-۲)}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{۶-۶h-۶}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰^+}\frac{-۶h}{h}=-۶$$

با توجه به محاسبه بالا می‌توان گفت $\lim_{h\to ۰}\frac{v(-۱+h)-v(-۱)}{h}$ وجود دارد و تابع v در نقطه $x=-۱$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن ۶- است.

۵ فرایند و مهارت: استدلال، حل مسئله

الف) برای بررسی پیوستگی تابع g در $x=\circ$، حد چپ و حد راست آن را در این نقطه محاسبه می‌کنیم.

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to\circ^-} g(x) &= \lim_{x\to\circ^-}(x^۲-x+۱)=۱\\ \lim_{x\to\circ^+} g(x) &= \lim_{x\to\circ^+}(ax+۱)=۱\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to\circ} g(x)=۱$$

از آنجا که $g(\circ)=۱$، تابع g در $x=\circ$ پیوسته است.

ب) برای آنکه تابع g در $x=\circ$ مشتق‌پذیر باشد، لازم است حد کسر $\frac{g(\circ+h)-g(\circ)}{h}$ در $h=\circ$ موجود باشد. این شرط معادل با آن است که حد چپ و حد راست این کسر در $h=\circ$ موجود و مساوی باشند.

$$\lim_{h\to\circ^-}\frac{g(\circ+h)-g(\circ)}{h}=\lim_{h\to\circ^-}\frac{h^۲-h+۱-۱}{h}=\lim_{h\to\circ^-}\frac{h(h-۱)}{h}=-۱$$

$$\lim_{h\to\circ^+}\frac{g(\circ+h)-g(\circ)}{h}=\lim_{h\to\circ^+}\frac{ah+۱-۱}{h}=\lim_{h\to\circ^+}\frac{ah}{h}=a$$

بنابراین، شرط مشتق‌پذیری این تابع آن است که $a=-۱$. در نتیجه $g'(\circ)=-۱$.

بخش دوم: مشتق و سرعت متحرک‌ها

اهداف بخش

۱ درک رابطهٔ بین مشتق تابع و سرعت متحرک‌ها
۲ تفسیر حرکت یک متحرک با یافتن مشتق تابع حرکت
۳ درک مشتق تابع به‌عنوان یک تابع

واژه‌های کلیدی: سرعت متحرک، مشتق تابع

نگاه کلی به بخش

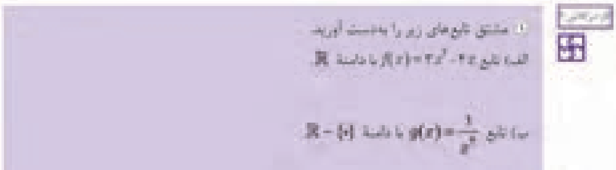
هدف از این بخش، استفاده از مفهوم مشتق در محاسبهٔ سرعت اجسام است. رابطهٔ بین مشتق تابع حرکت یک جسم متحرک و سرعت آن متحرک در بخش قبل مشخص شده است، زیرا از همین زمینه برای آموزش مشتق استفاده شده است. در این بخش، این مطلب با صراحت بیشتری بیان می‌شود و از مشتق‌گیری برای توصیف چگونگی حرکت یک متحرک استفاده می‌شود. همچنین مفهوم تابع مشتق نیز در همین بخش از طریق سرعت حرکت یک متحرک در لحظات دلخواه، توضیح داده شده است.

ورود به مطلب

این بخش، نیازی به انگیزهٔ جدیدی ندارد و در بخش قبل از زمینه سرعت اجسام برای آموزش مشتق استفاده شده است. ولی، استفاده از مثال‌های آشنا و جالب توجه و برقراری ارتباط مستقیم بین مقدار مشتق و وضعیت حرکت اجسام، بسیار مفید خواهد بود.

فعالیت آموزشی

این بخش فقط شامل توضیحاتی دربارهٔ سرعت حرکت اجسام و رابطهٔ آن با مشتق است که در مثال‌هایی توضیح داده شده است و به کمک مشتق تابع‌ها شیوهٔ حرکت اجسام توصیف شده‌اند. این مطالب در کار در کلاس (۲) تمرین می‌شوند.



۱) مشتق تابع‌های زیر را بدست آورید.

الف) تابع $f(x)=۳x^۲-۴x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$

ب) تابع $g(x)=\frac{۱}{x^۲}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰\}$

حل کار در کلاس (۲)

۱ الف)

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۳(x+h)^۲-۴(x+h)-۳x^۲+۴x}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۶xh+۳h^۲-۴h}{h}=۶x-۴$$

ب)

$$g'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۱}{(x+h)^۲}-\frac{۱}{x^۲}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-۲x-h}{(x+h)^۲x^۲}=-\frac{۲}{x^۳}$$

۲ الف) سرعت این متحرک همان مشتق تابع حرکت آن است.

$v(t)=-۸t+۱۶$

ب) $v(۱)=۸>۰$ در جهت محور حرکت می‌کند.

پ) $v(۴)=-۱۶<۰$ خلاف جهت محور حرکت می‌کند.

ت) متحرک در صورتی متوقف می‌شود که سرعت آن صفر شود، بنابراین:

$v(t)=۰ \Rightarrow -۸t+۱۶=۰ \Rightarrow t=۲$

لحظهٔ $t=۲$ در دامنهٔ تابع حرکت است و در این لحظه، متحرک، ایست لحظه‌ای می‌کند.

ث) زمان‌هایی که $v(t)>۰$، متحرک در جهت محور حرکت می‌کند.

بنابراین در بازهٔ زمانی $[۰,۲]$ متحرک در جهت محور حرکت می‌کند و پس از آن تغییر جهت می‌دهد و در خلاف جهت محور حرکت می‌کند.

حل مسائل

۱ **فرایندها و مهارت‌ها: حل مسئله**

$$g'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۲(x+h)-۳(x+h)^۲-(۲x-۳x^۲)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۲x+۲h-۳x^۲-۶xh-۳h^۲-۲x+۳x^۲}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h(۲-۶x-۳h)}{h}=۲-۶x$$

۲ فرایند و مهارت‌ها: حل مسئله

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{x+h-\frac{۲}{x+h}-(x-\frac{۲}{x})}{h} \quad \lim \quad h$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{h-\frac{۲}{x+h}+\frac{۲}{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{hx^۲+xh^۲-۲x+۲x-۲h}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{hx^۲+xh^۲+۲h}{hx(x+h)}=\lim_{h\to ۰}\frac{h(x^۲+xh+۲)}{hx(x+h)}$$

$$=\frac{x^۲+۲}{x^۲}$$

۳ فرایندها و مهارت: استدلال، حل مسئله، پیوند و اتصال

الف) $$g'(t)=\lim_{h\to ۰}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(t+h)^۲-۲۰(t+h)+۱-(t^۲-۲۰t+۱)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{t^۲+۲th+h^۲-۲۰t-۲۰h+۱-t^۲+۲۰t-۱}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h(۲t+h-۲۰)}{h}$$

$$=۲t-۲۰$$

ب) داریم $g(۰)=۱$. یعنی این متحرک در لحظهٔ صفر در فاصله ۱ متری سمت راست از مبدأ قرار دارد. همچنین $g'(۰)=۲\times۰-۲۰=-۲۰$، یعنی در لحظهٔ صفر با سرعت ۲۰ متر بر ثانیه در خلاف جهت محور در حال حرکت است.

پ) برای اینکه متحرک متوقف شود بایستی $g'(t)=۰$. از $۲t-۲۰=۰$ نتیجه می‌شود $t=۱۰$. یعنی پس از ۱۰ ثانیه، متحرک ایست لحظه‌ای می‌کند. در زمان توقف، فاصله متحرک از مبدأ برابر است با $g(۱۰)=۱۰۰-۲۰۰+۱=-۹۹$. یعنی متحرک در ۹۹ متر سمت چپ مبدأ، توقف لحظه‌ای کرده است.

ت) $g(۲۰)=۴۰۰-۴۰۰+۱=۱$، یعنی این متحرک در فاصله ۱ متری سمت راست از مبدأ قرار دارد و سرعت این متحرک در این لحظه برابر است با $g'(۲۰)=۲(۲۰)-۲۰=۲۰$، یعنی با سرعت ۲۰ متر در ثانیه در جهت محور در حال حرکت است.

ث) این متحرک در شروع حرکت، در مکان ۱ متری سمت راست مبدأ قرار دارد و در این لحظه با سرعت ۲۰ متر بر ثانیه رو به عقب (خلاف جهت محور) در حال حرکت است. متحرک ۱۰ ثانیه رو به عقب حرکت می‌کند (در بازهٔ $(۰,۱۰)$، $g'(t)<۰$) و پس از طی ۱۰۰ متر، ایست لحظه‌ای می‌کند و تغییر جهت می‌دهد و رو به جلو (در جهت محور) شروع به حرکت می‌کند. (در بازهٔ $(۱۰,۲۰)$، $g'(t)>۰$) . نهایتاً در ۱۰ ثانیه بعدی، متحرک با حرکت رو به جلو به نقطهٔ شروع حرکت برمی‌گردد.

بخش سوم: تعبیر هندسی مشتق

اهداف بخش

۱ درک رابطهٔ بین مشتق تابع در یک نقطه و شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه

۲ یافتن معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع‌ها در نقاط مختلف

واژه‌های کلیدی: شیب خط مماس بر نمودار تابع، مشتق تابع، معادلهٔ خط مماس

نگاه کلی به بخش

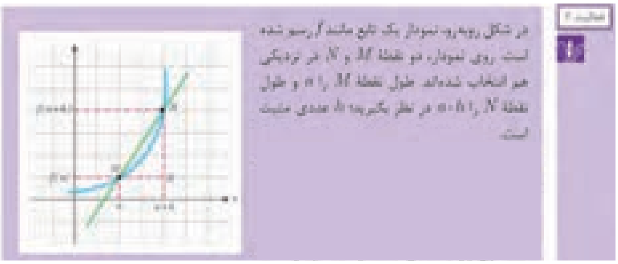
هدف این بخش، برقرار کردن ارتباط بین مفهوم مشتق یک تابع و شیب خط مماس بر نمودار آن تابع است. این ارتباط با طرح سؤال و سپس انجام یک فعالیت برای پاسخ‌گویی به آن سؤال برقرار می‌شود. سپس با مثال‌هایی این ارتباط توضیح داده می‌شود.

ورود به مطلب

طرح سؤال مناسب و سعی در پاسخ‌گویی به آن به‌صورت مباحثه‌ای، همواره بهترین ورود به آموزش است. در اینجا از ارتباط بین وضعیت نمودار تابع و مفهوم مشتق پرسش شده است. برای پاسخ‌گویی به این سؤال لازم است از خط‌های گذرنده از نقاط نمودار تابع و حدگیری آنها و نهایتاً خط مماس بر نمودار تابع صحبت کنیم.

فعالیت آموزشی

با طرح سؤال دربارهٔ رابطهٔ بین مشتق تابع و چگونگی نمودار تابع به فعالیت (۲) می‌رسیم که به این سؤال پاسخ می‌گوید.



اهداف موضوعی:

- درک مفهوم هندسی مشتق.

فرایندها:

- پیوندها و اتصال‌ها (داخل ریاضی).
- مدل‌سازی.
- ارتباطات کلامی.
- تفکر بصری.

می‌توان از هنرجویان خواست اهداف فعالیت را در یک تابع خاص با رسم نمودار و تشکیل جدول مقادیر (نظیر $f(x)=x^{2}$ در نقطهٔ $x=2$) مورد بررسی قرار دهند.

حل فعالیت (۲)

۱ $M=\begin{bmatrix} a \\ f(a) \end{bmatrix}$ و $N=\begin{bmatrix} a+h \\ f(a+h) \end{bmatrix}$.

۲ $MH=h$ و $NH=f(a+h)-f(a)$.

۳ $m=\frac{NH}{MH}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

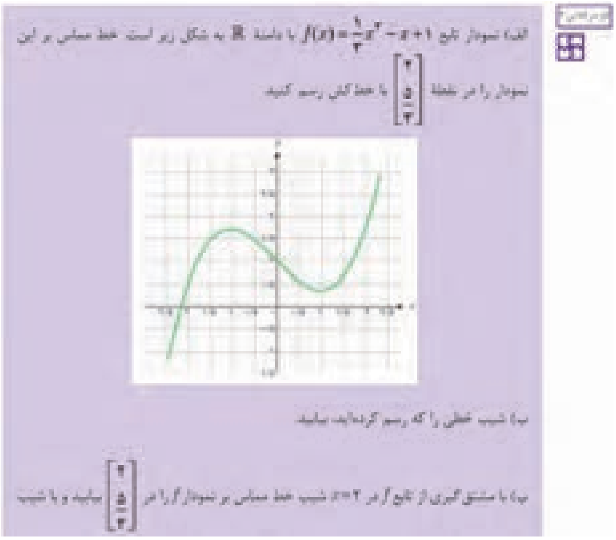
۴ مشتق f در نقطهٔ a، همان حد شیب خط MN در $h=0$ است.

۵ به نقطهٔ M نزدیک می‌شود.

۶ این خط نهایتاً بر نمودار تابع در نقطهٔ M مماس خواهد شد و شیب این خط به مشتق تابع در نقطهٔ $x=a$ نزدیک خواهدشد.

پس از توضیح این فعالیت، رابطهٔ بین مشتق تابع و شیب خط مماس بر نمودار تابع در یک نقطه بیان می‌شود و در مثال‌هایی این رابطه توضیح داده می‌شود. این مطالب در کار در کلاس (۳) تمرین می‌شوند.

در این قسمت هنرجویان با رسم خط مماس به کمک خط‌کش به‌طور تجربی به رابطهٔ بین مشتق و شیب خط مماس پی می‌برند.



الف) نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+1$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ به شکل زیر است. خط مماس بر این نمودار را در نقطهٔ $\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$ با خط‌کش رسم کنید.

ب) شیب خطی را که رسم کرده‌اید بیابید.

پ) با مشتق‌گیری از تابع f در $x=2$ شیب خط مماس بر نمودار f را در $\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$ بیابید و با شیب

حل کار در کلاس (۳)

الف و ب) هنرجو با استفاده از خط‌کش، خط مماس را رسم کرده و با در نظر گرفتن دو نقطه روی آن، شیب خط را با اندازه‌گیری پیدا می‌کند.

پ) $f'(x)=x^2-1 \Rightarrow f'(2)=3$ در مقایسه با شیب خطی که هنرجو رسم کرده، اختلاف ناچیزی به‌دست می‌آید که از یک طرف درستی رابطهٔ بین مشتق و شیب خط مماس را نشان می‌دهد و از طرف دیگر خطای انسانی و ابزار در اندازه‌گیری‌ها را نشان می‌دهد.

حل مسائل

۱ فرایندها و مهارت‌ها: استدلال، بازنمایی، حل مسئله

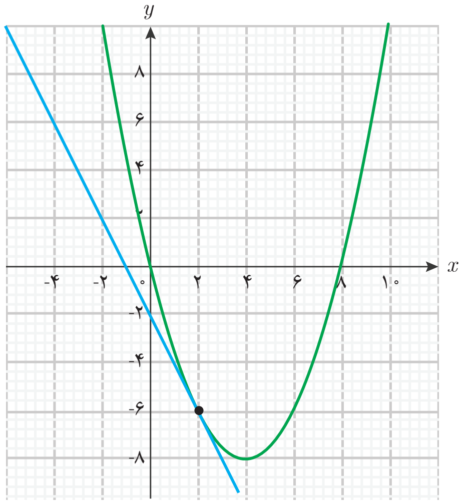
اگر معادلهٔ خط مماس در نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$ بر این منحنی به‌صورت $y=ax+b$ باشد، شیب خط از طریق زیر محاسبه می‌شود:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-4x \Rightarrow f'(x)=x-4 \Rightarrow f'(2)=-2 \Rightarrow a=-2$$

برای یافتن b، می‌دانیم که خط مماس $y=-2x+b$ از نقطهٔ $\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند. پس $\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$ در معادلهٔ خط مماس صدق می‌کند. در نتیجه داریم:

$$-6=-2\times 2+b \Rightarrow b=-2$$

پس معادله خط مماس منحنی در نقطه داده شده به صورت $y=-2x-2$ است. به کمک جئوجبرا نمودار آن به‌صورت زیر است.



۲ فرایندها و مهارت‌ها: استدلال، حل مسئله

می‌دانیم شیب خط مماس در نقطه تماس با مقدار مشتق تابع در آن نقطه برابر است. به این منظور ابتدا، مشتق تابع f را محاسبه می‌کنیم.

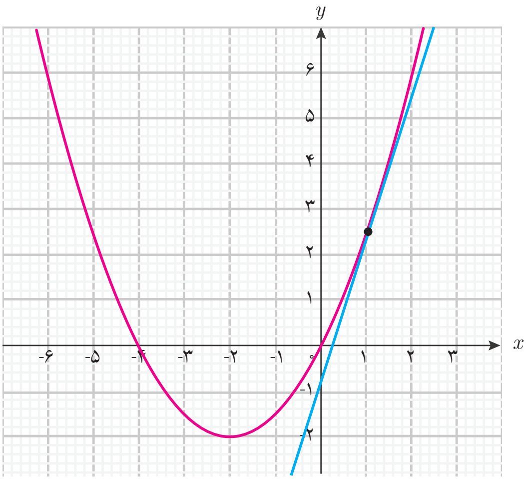
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{x+h}-\frac{2}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2x-2x-2h}{x(x+h)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2h}{hx(x+h)}=-\frac{2}{x^2}\Rightarrow f'(x)=-\frac{2}{x^2}$$

اگر خط مماس بر نمودار تابع، موازی محور طول‌ها باشد، بایستی شیب خط مماس برابر صفر باشد. با توجه به اینکه $f'(x)=-\frac{2}{x^2}$ (شیب خط مماس) در هیچ نقطه‌ای از دامنهٔ تابع $(\mathbb{R}-\{0\})$ برابر صفر نمی‌شود. پس نقطه‌ای وجود ندارد که خط مماس بر نمودار تابع f، موازی محور طول‌ها باشد.

۳ فرایندها و مهارت‌ها: بازنمایی، استدلال

الف) به کمک جئوجبرا، نمودار صفحه بعد رسم شده است:
با استفاده از یک لغزنده معلوم می‌شود خط به معادله $y=3x-\frac{1}{2}$، بر نمودار تابع f مماس می‌شود.



ب) باید نقطه‌ای روی نمودار تابع بیابیم که شیب خط مماس در آن نقطه برابر ۳ شود. همان‌طور که می‌دانیم شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه با مشتق تابع در آن نقطه برابر است. با توجه به قانون تابع f داریم:

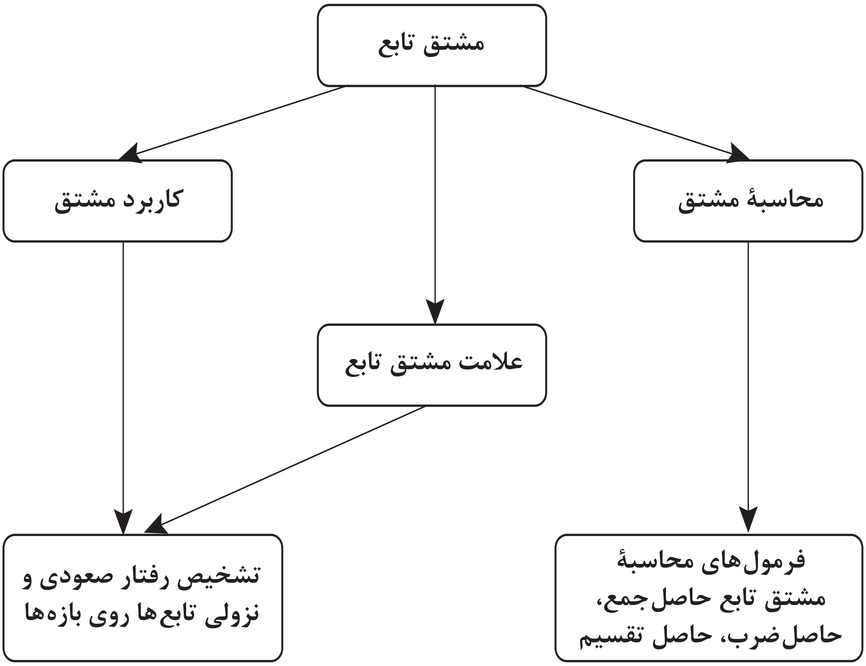
$f'(x)=x+۲$

با حل معادلهٔ $f'(x)=x+۲=۳$ نتیجه می‌شود $x=۱$. پس در نقطه‌ای از نمودار تابع به طول ۱ خط مماس بر نمودار تابع شیب ۳ دارد و موازی خط $y=۳x$ است. برای یافتن معادلهٔ خط مماس، می‌دانیم معادلهٔ آن به‌صورت $y=۳x+b$ است. از آنجا که $f(۱)=\frac{۵}{۲}$ این خط از نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۱ \\ \frac{۵}{۲} \end{bmatrix}$ می‌گذرد و مختصات این نقطه در معادلهٔ خط مماس صدق می‌کند. پس $\frac{۵}{۲}=۳\times۱+b$ و در نتیجه $b=-\frac{۱}{۲}$ و معادلهٔ خط مماس همان خط $y=۳x-\frac{۱}{۲}$ است.

فصل پنجم

محاسبات مشتق و کاربردها

نقشه مفهومی فصل پنجم



اهداف کلی پودمان

۱ آشنایی با قوانین مشتق‌گیری جمع، ضرب و تقسیم تابع‌ها
۲ محاسبهٔ مشتق تابع‌ها در نقاط داده شده و دلخواه
۳ آشنایی با مشتق تابع‌های چندجمله‌ای
۴ آشنایی با رفتار صعودی و نزولی تابع‌ها
۵ درک رابطهٔ بین رفتار صعودی و نزولی و علامت مشتق تابع‌ها
۶ درک وضعیت تابع در نقاطی که مشتق در آن نقطه برابر صفر است
۷ مدل‌سازی و حل مسائل آشنا و زندگی واقعی به‌کمک مشتق و تفسیر چگونگی تغییرات

پیش‌نیازها

- آشنایی با اعمال روی توابع شامل جمع و ضرب توابع و تقسیم دو تابع
- آشنایی با تعریف مشتق تابع در یک نقطه و نماد آن
- توانایی محاسبه مشتق تابع در یک نقطه و به‌دست آوردن تابع مشتق
- آشنایی با مفهوم تابع حرکت
- مهارت استفاده از نمودار برای تعیین علامت تابع‌ها
- مهارت تشخیص رفتار تابع از روی نمودار
- آشنایی با شیب خطوط

بخش اول: محاسبهٔ مشتق تابع‌ها

اهداف بخش

۱ آشنایی با قوانین مشتق‌گیری جمع، ضرب و تقسیم تابع‌ها
۲ آشنایی با مشتق تابع‌های چندجمله‌ای
۳ محاسبهٔ مشتق تابع‌ها در نقاط داده شده و دلخواه

واژه‌های کلیدی: مشتق مجموع و حاصل‌ضرب و تقسیم دو تابع، مشتق تابع چندجمله‌ای

نگاه کلی به بخش

هدف این بخش، یادگیری فرمول‌های مشتق‌گیری مجموع و حاصل‌ضرب و حاصل‌تقسیم و تابع و به‌ویژه آشنایی با مشتق تابع‌های چندجمله‌ای است. در مورد مشتق مجموع دو تابع از زمینهٔ قانون جمع سرعت‌ها در فیزیک استفاده شده است و نهایتاً فرمول مشتق جمع دو تابع بیان شده است. در مورد مشتق حاصل‌ضرب تابع‌ها فقط فرمول آورده شده است و کتاب وارد محاسبات حدی نشده است. با استفاده از فرمول مشتق حاصل‌ضرب در مثال‌ها مشتقات دیگری هم محاسبه شده‌اند که هم کارآیی این فرمول را نشان می‌دهند و هم شیوهٔ به‌کارگیری این فرمول تمرین شده است. به‌طور خاص به مشتق تابع‌های چندجمله‌ای پرداخته شده است که نتیجه‌ای از فرمول‌های مشتق‌گیری مجموع و حاصل‌ضرب تابع‌ها است.

در آخر این بخش فرمول مشتق تقسیم دو تابع از طریق مشتق حاصل‌ضرب دو تابع ارائه شده است.

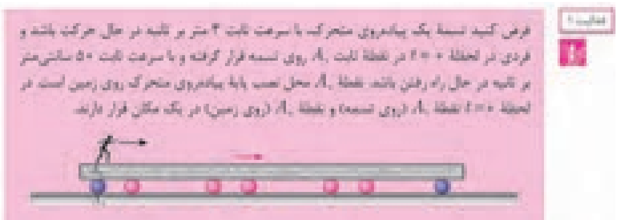
ورود به مطلب

این بخش بیشتر جنبهٔ محاسباتی دارد و مفهوم خاص و جدیدی ندارد. تا اینجا، محاسبهٔ مشتق فقط از طریق تعریف قابل انجام است و باید این مسئله را مطرح سازیم که این عمل در مورد تابع‌های پیچیده دشوار و در برخی موارد غیر عملی است. ما باید راه‌های بهتری برای محاسبهٔ مشتق بیابیم. با شناخت مشتق تابع‌های ساده سعی می‌کنیم مشتق تابع‌های پیچیده‌تر را به‌دست آوریم. با ذکر این نکات می‌توانید در مورد مشتق مجموع دو تابع پرسش کنید و حدس هنرجویان را

بررسی کنید و وارد کتاب شوید.
در مورد مشتق حاصل‌ضرب و حاصل‌تقسیم دو تابع نیز با همین روش می‌توانید عمل کنید.

فعالیت آموزشی

در ابتدای این بخش سعی شده است در یک زمینهٔ واقعی، مجموع دو تابع و مشتق مجموع دو تابع ارائه شود. زمینهٔ انتخاب شده حرکت یک قطار و حرکت یک فرد در داخل قطار است. این یک مسئله سادهٔ فیزیکی است و به قانون جمع سرعت‌ها معروف است. تابع حرکت فرد نسبت به زمین به‌صورت مجموع تابع حرکت فرد نسبت به‌قطار و تابع حرکت قطار نسبت به زمین است. سرعت فرد نسبت به زمین نیز به‌صورت جمع سرعت فرد نسبت به قطار و سرعت قطار نسبت به زمین است. دلیل درستی این مطلب همان قانون مشتق مجموع دو تابع است.
برای درک درستی این قانون فعالیت(۱) طرح شده است.


فعالیت ۱

فرض کنید تسمهٔ یک پیاده‌روی متحرک با سرعت ثابت ۴ متر بر ثانیه در حال حرکت باشد و فردی در لحظهٔ $t=0$ در نقطهٔ ثابت A_1 روی تسمه قرار گرفته و با سرعت ثابت ۵۰ سانتی‌متر بر ثانیه در حال راه رفتن باشد. نقطهٔ A_0 محل نصب پایهٔ پیاده‌روی متحرک روی زمین است. در لحظهٔ $t=0$ نقطهٔ A_1 (روی تسمه) و نقطهٔ A_0 (روی زمین) در یک مکان قرار دارند.

اهداف موضوعی

- درک تساوی مشتق حاصل‌جمع دوتابع و حاصل‌جمع مشتق آنها.

فرایندها

- پیوندها و اتصال‌ها (ریاضی و خارج ریاضی).
- ارتباطات کلامی.
- حل مسئله (مدل‌سازی).

حل فعالیت ۱

۱ $f(0)$ فاصلهٔ نقطهٔ A_1 (روی تسمه) را از نقطهٔ A_0 (محل نصب پایهٔ پیاده‌رو روی زمین) در زمان $t=0$ نشان می‌دهد و $g(0)$ فاصلهٔ فرد را از نقطهٔ A_1 در زمان $t=0$ نشان می‌دهد.

۲ $f(1)$ فاصلهٔ نقطهٔ A_1 از نقطهٔ A_0 در زمان $t=1$ و $g(1)$ فاصلهٔ فرد از نقطهٔ A_1

در زمان $t=۱$ را نشان می‌دهد. همچنین $f(۱)+g(۱)$ فاصلهٔ فرد را از نقطهٔ $A_\circ$ در زمان $t=۱$ نشان می‌دهد.

۳ قانون تابع h به‌صورت $h(t)=۳t+\frac{۱}{۲}t$ می‌باشد. این تابع فاصلهٔ فرد از نقطهٔ $A_\circ$ (روی زمین) در زمان t را نشان می‌دهد.

۴ $f'(t)$ = سرعت حرکت نقطهٔ $A_۱$ نسبت به نقطهٔ $A_\circ$ (روی زمین) در زمان t ،
$g'(t)$ = سرعت حرکت فرد نسبت به نقطهٔ $A_۱$ (روی تسمه) در زمان t ،
$h'(t)$ = سرعت حرکت فرد نسبت به نقطهٔ $A_\circ$ (روی زمین) در زمان t می‌باشد.

۵ $f'(t)=۳$ و $g'(t)=\frac{۱}{۲}$ و $h'(t)=۳+\frac{۱}{۲}$ داریم : $h'(t)=f'(t)+g'(t)$

در ادامه، توضیح داده می‌شود نتیجه این فعالیت عمومیت دارد و قانون مشتق مجموع دو تابع بیان می‌شود و در مثال‌هایی تمرین می‌شود.
مشتق حاصل‌ضربِ دو تابع نیز توسط هنرجویان مطرح می‌شود و حدس‌هایی زده می‌شود. نهایتاً از زبان معلم مستقیماً قانون مشتق حاصل‌ضرب دو تابع بیان می‌شود و در مثال‌ها تمرین می‌شود. همچنین به‌کمک فرمول مشتق حاصل‌ضرب دو تابع مشتق تابع‌های خاصی به دست می‌آید که قوت این قانون را نشان می‌دهد.
در ادامه به کار در کلاس(۱) می‌رسیم که این مفاهیم در آن تمرین می‌شوند.

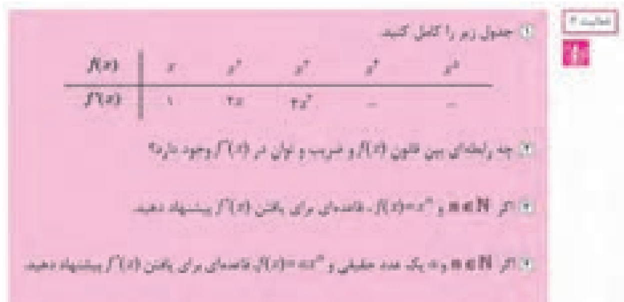
حل کار در کلاس ۱


۱ـ با استفاده از تساوی $x.\frac{1}{x}=1$ که در $\mathbb{R}-\{0\}$ برقرار است و به کمک مشتق حاصل‌ضرب دو تابع، مشتق تابع $\frac{1}{x}$ را در نقطهٔ دلخواه $x\neq 0$ به‌دست آورید.

۱ـ قرار می‌دهیم : $f(x)=x$ و $g(x)=\frac{۱}{x}$ داریم: $f(x).\,g(x)=۱$ با مشتق‌گیری از دو طرف تساوی داریم:

$$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=\circ \Rightarrow ۱\times\frac{۱}{x}+x\times g'(x)=\circ \Rightarrow g'(x)=-\frac{۱}{x^۲}$$

در اینجا رابطهٔ $x\cdot\frac{۱}{x}=۱$ ارائه شده تا به کمک آن مشتق موردنظر محاسبه شود، در صورت آمادگی هنرجویان می‌توان از آنها خواست تا مشتق توابعی نظیر $\frac{۱}{x^۲}$ یا ... را با ارائهٔ رابطه‌ای نظیر رابطهٔ ارائه شده در این سؤال، به‌دست آورند.
در ادامه در فعالیت(۲) با کاربردی از مشتق حاصل‌ضرب تابع‌ها، مشتق تابع‌هایی به‌صورت $f(x)=ax^n$ به‌دست می‌آید که پایه یافتن مشتق تابع‌های چندجمله‌ای است.


فعالیت ۲

۱) جدول زیر را کامل کنید.

$f(x)$	x	$x^۲$	$x^۳$	$x^۴$	$x^۵$
$f'(x)$	۱	$۲x$	$۳x^۲$	...	...

۲) چه رابطه‌ای بین قانون $f(x)$ و ضریب و توان در $f'(x)$ وجود دارد؟

۳) اگر $n \in N$ و $f(x)=x^n$، قاعده‌ای برای یافتن $f'(x)$ پیشنهاد دهید.

۴) اگر $n \in N$ و a یک عدد حقیقی و $f(x)=ax^n$، قاعده‌ای برای یافتن $f'(x)$ پیشنهاد دهید.

اهداف موضوعی

- آشنایی با روش محاسبهٔ مشتق تابع چند جمله‌ای.
- تقویت مهارت استفاده از قوانین مشتق‌گیری.

فرایندها

- الگویابی
- ارتباطات کلامی
- تعمیم دادن

حل فعالیت ۲

۱ با محاسبهٔ مشتق تابع‌های موجود در جدول داریم :

$$(x^۴)' = (x^۳ . x)' = (x^۳)' . x + x^۳ . (x)' = ۳x^۲ . x + x^۳ . ۱ = ۴x^۳$$
$$(x^۵)' = (x^۴ . x)' = (x^۴)' . x + x^۴ . (x)' = ۴x^۳ . x + x^۴ . ۱ = ۵x^۴$$

جدول تکمیل شده به صورت زیر است:

$f(x)$	x	$x^۲$	$x^۳$	$x^۴$	$x^۵$
$f'(x)$	۱	$۲x$	$۳x^۲$	$۴x^۳$	$۵x^۴$

۲ توان x در $f'(x)$ از توان x در $f(x)$ یک واحد کمتر است و ضریب $f'(x)$ همان توان x در $f(x)$ است.

۳ برای به‌دست آوردن $f'(x)$ کافی است یک واحد از توان x در f کم کنیم و آن‌را در توان x یعنی n ضرب کنیم. $(f'(x) = nx^{n-۱})$

۴ چون $a \in R$ عددی ثابت است می‌توان نوشت:

$$f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = a(x^n)' = anx^{n-۱}$$

در ادامه، مشتق تابع‌های چندجمله‌ای به‌صراحت بیان می‌شوند و سپس مسئلهٔ مشتق تقسیم دو تابع مطرح می‌شود. معلم راه حلی برای یافتن مشتق تقسیم دو تابع پیشنهاد می‌کند و طبق آن قانون مشتق تقسیم دو تابع به‌دست می‌آید. این مطلب در مثال‌هایی توضیح داده می‌شوند و در کار در کلاس(۲) تمرین می‌شوند.


کار در کلاس

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید. دامنه‌های این تابع‌ها را بازهٔ (۰ , +∞) در نظر بگیرید.

الف) $f(x) = x^۲ - ۴x + ۵$

ب) $g(x) = x^۲ + ۴\sqrt{x}$

پ) $h(x) = \dfrac{x^۲ - ۴x}{۳x + ۴}$

حل کار در کلاس ۲

الف) $f'(x) = ۲x - ۴$

ب) $g'(x) = ۲x + \dfrac{۴}{۲\sqrt{x}}$

پ) $h'(x) = \dfrac{(۲x-۴)(۳x+۴) - ۳(x^۲ - ۴x)}{(۳x+۴)^۲}$

حل مسائل

۱ فرایندها و مهارت‌ها : حل مسئله

الف) $f'(x) = ۳x^۲ + ۴$

ب) $g'(x) = ۲x\,(x^۲ - ۳) + ۲x\,(x^۲ + ۱) = ۴x^۳ - ۴x$

پ) $h'(x) = \dfrac{۳(x^۲+۱) - ۲x(۳x+۱)}{(x^۲+۱)^۲} = \dfrac{۳x^۲ + ۳ - ۶x^۲ - ۲x}{(x^۲+۱)^۲} = \dfrac{-۳x^۲ - ۲x + ۳}{(x^۲+۱)^۲}$

۲ فرایندها و مهارت‌ها : حل مسئله، استدلال، پیوند و اتصال

الف)

$$\begin{cases} t = ۰ \Rightarrow f(۰) = ۵ \\ t = ۵ \Rightarrow f(۵) = ۱۰۵ \\ t = ۱۰ \Rightarrow f(۱۰) = ۲۰۵ \end{cases}$$ وضعیت قطار نسبت به ایستگاه از لحاظ فاصله

$$\begin{cases} t = ۰ \Rightarrow f'(۰) = ۲۰ \\ t = ۵ \Rightarrow f'(۵) = ۲۰ \\ t = ۱۰ \Rightarrow f'(۱۰) = ۲۰ \end{cases}$$ وضعیت قطار نسبت به ایستگاه از لحاظ سرعت

ب)

$$\begin{cases} t=0 & \Rightarrow & g(0)=5 \\ t=5 & \Rightarrow & g(5)=130 \\ t=10 & \Rightarrow & g(10)=305 \end{cases}$$ وضعیت ماشین نسبت به ایستگاه از لحاظ فاصله

$$\begin{cases} t=0 & \Rightarrow & g'(0)=20 \\ t=5 & \Rightarrow & g'(5)=30 \\ t=10 & \Rightarrow & g'(10)=40 \end{cases}$$ وضعیت ماشین نسبت به ایستگاه از لحاظ سرعت

پ) طبق محاسبات انجام شده فاصله ماشین از قطار در لحظات ۰ و ۵ و ۱۰ به ترتیب برابر ۰ و ۲۵ و ۱۰۰ (برحسب متر) است. در همه این لحظات سرعت قطار مقدار ثابت ۲۰ متر بر ثانیه است ولی سرعت ماشین درحال افزایش است و به ترتیب برابر ۲۰ و ۳۰ و ۴۰ متر بر ثانیه است.

ت) فاصلهٔ قطار از ماشین با تابع

$$h(t) = g(t) - f(t) = t^2 + 20t + 5 - 20t - 5 = t^2$$

داده می‌شود. سرعت دور شدن ماشین از قطار در هر لحظهٔ t (از دامنهٔ تابع) برابر $h'(t) = 2t$ است.

۳ فرایندها و مهارت‌ها : حل مسئله، استدلال

$$v'(x) = 2f(x)f'(x)$$

$$v(x) = (4x^2 - 1)^2 \quad \Rightarrow \quad v'(x) = 2(4x^2 - 1).(8x) = 64x^3 - 16x$$

۴ فرایندها و مهارت : حل مسئله ، پیوند و اتصال

الف)

$$g'(T) = 10 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{4}$$

$$f'(T) = 15 \times \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$

ب)

$$\text{تابع مساحت} = S(T) = g(T).f(T) \Rightarrow S'(T) = g'(T).f(T) + f'(T).g(T)$$

$$S'(T) = \frac{5}{4} \times 15(1+\frac{1}{8}T) + \frac{15}{8} \times 10(1+\frac{1}{8}T) = \frac{75}{2}(1+\frac{1}{8}T)$$

بخش دوم: تابع‌های صعودی و نزولی و مشتق آنها

اهداف بخش

۱ آشنایی با رفتار صعودی و نزولی تابع‌ها
۲ برقرار کردن رابطه بین رفتار صعودی و نزولی و علامت مشتق تابع‌ها
۳ درک وضعیت تابع در نقاطی که مشتق در آن نقط برابر صفر است
۴ مدل‌سازی و حل مسائل آشنا و زندگی واقعی به‌کمک مشتق و تفسیر چگونگی تغییرات

واژه‌های کلیدی: تابع صعودی، تابع نزولی، علامت مشتق، صفر شدن مشتق

نگاه کلی به بخش

هدف این بخش، آموزش رفتار صعودی و نزولی تابع‌ها و رابطهٔ این مفهوم با علامت مشتق تابع و بررسی رفتار تابع‌ها از طریق یافتن علامت مشتق این تابع‌ها است. تا اینجا، مفهوم مشتق بیشتر به‌عنوان سرعت تغییرات مقادیر تابع مطرح شده است و به‌عنوان یک عدد مثبت معنای قابل قبولی دارد. این بخش با طرح این سؤال آغاز می‌شود که منفی شدن مشتق چه معنایی دارد.

برای پاسخ به این سؤال در یک فعالیت دو حالت مشتق مثبت و منفی در مورد تابع‌ها و رفتار صعودی و نزولی آنها بررسی می‌شود تا هنرجو را به این نتیجه برساند که مثبت و منفی شدن مشتق تابع‌ها در ارتباط با صعودی و نزولی بودن آنها است. پس از انجام این فعالیت، این نکات به‌طور صریح بیان می‌شوند و در مثال‌هایی تمرین می‌شوند.

نکته مهمی که باید به آن توجه کرد آن است که علامت مشتق وقتی وضعیت صعودی و نزولی تابع را مشخص می‌کند که دامنهٔ تابع یک بازه باشد. در طی مباحثاتی بین معلم و هنرجو به این نکته توجه می‌شود و در مثال‌هایی اهمیت این نکته گوشزد می‌شود.

همچنین، این نکته مطرح می‌شود که یک تابع لزوماً همه‌جا صعودی یا همه‌جا نزولی نیست و ممکن است روی برخی بازه‌ها صعودی و برخی بازه‌های دیگر نزولی باشد. در اینجا نقش نقاطی که مشتق تابع، صفر می‌شود نیز مطرح می‌شود و چگونگی وضعیت تابع در این نقاط مورد بررسی قرار می‌گیرد.

ورود به مطلب

در این بخش دو مفهوم کلیدی رفتار صعودی و نزولی تابع‌ها و علامت مشتق تابع باید طرح شوند. باید یک سؤال مهم مطرح سازیم که هم‌زمان این دو مفهوم را در خود داشته باشد. رفتار صعودی و نزولی تابع‌ها را هنرجویان به‌طور ضمنی در جاهای دیگر هم دیده‌اند اگرچه نام رسمی بر این مفاهیم انتخاب نکرده باشند. پس، بهتر است تمرکز خود را بر علامت مشتق تابع بگذاریم و این سؤال را مطرح سازیم که منفی شدن یا مثبت شدن مقدار مشتق یک تابع چه معنایی دارد و چه چیزی را نشان می‌دهد. برای پاسخ به این سؤال بهتر است در مورد تابع‌های خاص این بررسی انجام شود و حدسیه‌هایی توسط هنرجویان ارائه شود و این حدسیه‌ها بررسی شوند.

فعالیت آموزشی

این بخش با پرسش از معنای علامت مشتق و منفی شدن مشتق آغاز می‌شود. در فعالیت (۳) سعی می‌شود به این پرسش پاسخی داده شود.

فعالیت ۳

۱) تابع $f(x)=x^2$ را با دامنه $(0, +\infty)$ در نظر بگیرید. جدول زیر برخی از مقادیر تابع را نشان می‌دهد. این جدول را کامل کنید.

x	۰/۵	۱	۵	۱۰	۳۰	۵۰	a
$f(x)$	۰/۲۵	۱	۲۵	...	...	...	...

اهداف موضوعی

- درک ارتباط بین علامت مشتق تابع در یک بازه و رفتار تابع (صعودی یا نزولی بودن).
- کسب مهارت محاسبهٔ مشتق.

فرایندها :

- بازنمایی
- مقایسه کردن
- ارتباطات کلامی
- حدسیه‌سازی

حل فعالیت ۳

۱ جدول تکمیل شده به صورت زیر است:

x	۰/۵	۱	۵	۱۰	۳۰	۵۰	a
$f(x)$	۰/۲۵	۱	۲۵	۱۰۰	۹۰۰	۲۵۰۰	a^2

۲ افزایش می‌یابد.

۳ $f'(x) = x^{۲}$ علامت $f'(x)$ در (∞+، ۰) مثبت است.

۴ جدول تکمیل شده :

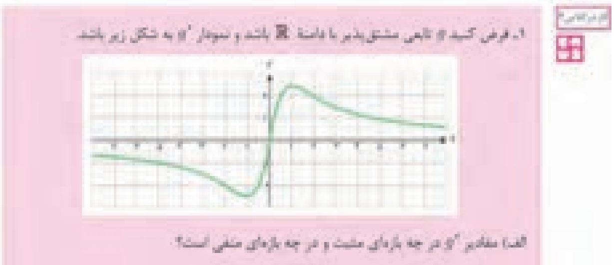
x	۰/۵	۱	۵	۱۰	۳۰	۵۰	a
$f(x)$	۰/۲۵-	۱-	۲۵-	۱۰۰-	۹۰۰-	۲۵۰۰-	$-a^{۲}$

۵ کاهش می‌یابد.

۶ $f'(x) = -۲x$ علامت $f'(x)$ در (∞+، ۰) منفی است.

۷ حدس می‌زنیم اگر علامت مشتق یک تابع در دامنه‌اش مثبت باشد تابع افزایشی و اگر علامت مشتق یک تابع در دامنه‌اش منفی باشد تابع کاهشی است.

در ادامه، با توضیحات بیشتر در مورد رفتارهای افزایشی و کاهشی توابع و نامگذاری این تابع‌ها به‌عنوان تابع‌های صعودی و نزولی رابطهٔ بین علامت مشتق و این ویژگی‌ها به‌طور صریح بیان می‌شود. این نکته در مثال‌هایی توضیح داده می‌شود. همچنین این نکته مهم تذکر داده می‌شود که علامت مثبت و منفی مشتق وقتی نشان‌دهندهٔ صعودی یا نزولی بودن تابع است که دامنهٔ تابع یک بازه باشد. در ادامه، این نکات در کار در کلاس(۳) تمرین می‌شوند.



در این قسمت می‌توان نمودار تابع را ارائه کرد و از هنرجو خواست از بین چند نمودار داده شده، نمودار تابع مشتق را تشخیص دهد. یا با دادن نمودار مشتق یک تابع از هنرجو خواست رفتار تابع (افزایشی یا کاهشی بودن و ...) را توصیف کند.

حل کار در کلاس ۳

۱ الف) مقادیر $g'(x)$ در بازهٔ $(-\infty ,\ 0)$ منفی و در بازهٔ $(0\ ,\ +\infty)$ مثبت است.
ب) تابع $g(x)$ در بازهٔ $(-\infty ,\ 0)$ نزولی و در بازهٔ $(0\ ,\ +\infty)$ صعودی است.
پ) نمودار آخر در پایین.

۲ در تعاریف تابع‌های صعودی و نزولی، تابع‌های ثابت در هر دو حالت صدق می‌کنند. بنابراین، تابع‌های ثابت هم صعودی هستند و هم نزولی. فقط تابع‌های ثابت می‌توانند هم صعودی باشند و هم نزولی. مشتق این تابع‌ها هم مثبت یا بزرگ‌تر از صفر و هم منفی یا کوچک‌تر یا مساوی صفرند. یعنی مشتق این تابع‌ها صفر است.

در ادامه، وضعیت یک تابع در نقاطی که مشتق تابع در آن نقاط صفر است مورد بحث قرار می‌گیرد و در مثال‌هایی وضعیت‌های ممکن توضیح داده می‌شوند.

حل مسائل

۱ فرایندها و مهارت‌ها : استدلال، بازنمایی

با توجه به نمودار تابع می‌توان گفت :
در بازه $(-\infty ,\ 1)$ رفتار تابع افزایشی و در بازهٔ $(1,3)$ رفتار تابع کاهشی و در بازه $(3\ ,\ +\infty)$ رفتار تابع افزایشی است.

۲ فرایندها و مهارت‌ها : استدلال ، بازنمایی

الف) با توجه به نمودار می‌توان گفت ، این تابع در بازه‌های $(0,1)$ و $(1,2)$ رفتار افزایشی دارد و روی این بازه‌ها صعودی است.
ب) خیر. با توجه به نمودار تابع ، این تابع اگر چه در هریک از بازه‌های $(0,1)$ و $(1,2)$ صعودی است ولی روی تمام دامنهٔ خود صعودی نیست.

۳ فرایندها و مهارت‌ها : استدلال ، حل مسئله، بازنمایی

الف) با توجه به نمودار تابع می‌توان گفت :
در بازهٔ $(-\infty ,\ -1)$ نزولی، در بازهٔ $(-1 ,\ 0)$ صعودی، در بازهٔ $(0,1)$ نزولی و در بازهٔ $(1\ ,\ +\infty)$ صعودی است.
ب) مشتق تابع در بازهٔ $(-\infty ,\ -1)$ منفی، در بازهٔ $(-1 ,\ 0)$ مثبت و در بازهٔ $(0,1)$ منفی و در بازهٔ $(1\ ,\ +\infty)$ مثبت است.
پ) مشتق تابع در نقاط $x = -1, 0, 1$ صفر می‌باشد و در این نقاط مشتق تغییر علامت می‌دهد.

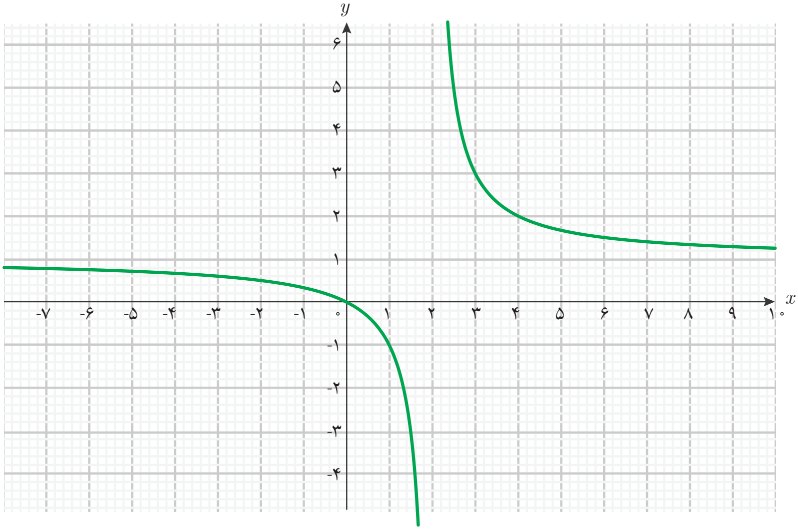
۴ فرایندها و مهارت : حل مسئله ، استدلال ، بازنمایی

الف) $f'(x)=\dfrac{۱(۲-x)-(-۱)(x)}{(۲-x)^۲}=\dfrac{۲}{(۲-x)^۲}$

ب) خیر. چون $f'(x)\neq ۰$

پ) مشتق تابع f در همه نقاط دامنهٔ خود $(R-\{۲\})$ مثبت است.

ت) با توجه به نمودار تابع می‌توان گفت ، این تابع در بازهٔ (۲، ∞−) رفتار صعودی دارد و مشتق تابع در این بازه مثبت است. همچنین در بازه (∞+ ، ۲) نیز تابع صعودی است و مشتق آن نیز در بازه مورد نظر مثبت می‌باشد. اما تابع روی کل دامنهٔ خود صعودی نیست.



۵ فرایندها و مهارت‌ها : استدلال ، حل مسئله

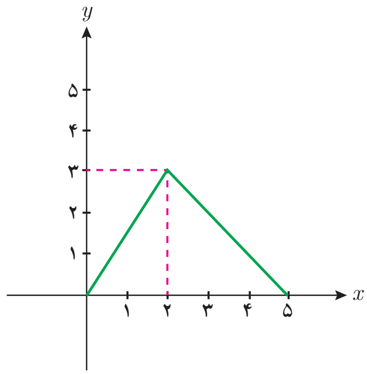
الف) مشتق این تابع در بازه‌های (۰، ∞−) و (∞+ ، ۲) مثبت است، پس خود تابع در این بازه‌ها صعودی است. اما مشتق این تابع در بازهٔ (۰,۲) منفی است، پس خود تابع در این بازه نزولی است.

ب) مشتق تابع در نقاط $x=۰$ و $x=۲$ صفر است، زیرا در این نقاط نمودار تابع مشتق محور طول‌ها را قطع کرده است. از آنجا که در این نقاط تابع مشتق تغییر علامت می‌دهد و وضعیت صعودی و نزولی تابع در این نقاط تغییر می‌کند، تابع در این نقاط (موضعاً) به بیشترین یا کمترین مقدار خود می‌رسد.

پ) با توجه به نتایج قسمت (الف) شکل شماره (۲) می‌تواند نمودار تابع g باشد.

۶ فرایندها و مهارت‌ها : استدلال ، حل مسئله، بازنمایی

برای تابع موردنظر می‌توان نمودارهای مختلفی رسم کرد. به‌طور مثال :



۷ فرایندها و مهارت : استدلال ، حل مسئله

برای این تابع می‌توان مثال‌های متفاوتی را مطرح کرد. به‌طور مثال :

$$f(x)=\begin{cases}-x+10 & 1\le x<3\\ 2x+1 & 3\le x\le 7\end{cases}$$

حتی می‌توانید یک تابع درجه دوم بنویسید که مشتق‌پذیر نیز باشد، برای مثال:

$f(x)=(x-3)^2$

تابع با قانون بالا و دامنهٔ [۱ ,۷] یک جواب این مسئله است.

هنرآموزان محترم، می‌توانند نظرهای اصلاحی خود را دربارهٔ مطالب این کتاب از طریق نامه به‌نشانی تهران ــ صندوق پستی ۴۸۷۴ / ۱۵۸۷۵ــ گروه درسی مربوط و یا پیام‌نگار tvoccd@roshd.ir ارسال نمایند.

وب‌گاه: tvoccd.oerp.ir

دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش