

یادآوری: در سال‌های قبل با مفهوم مجموعه آشنا شده‌اید؛ برای مثال، مجموعه اعداد اول یک‌رقمی به صورت زیر است:

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

می‌توان این مجموعه را با نمادهای ریاضی به صورت  $A = \{x \in P \mid x < 10\}$  نوشت که در آن  $P$  مجموعه اعداد اول است. چون عضو ۲ متعلق به مجموعه  $A$  است، می‌نویسیم:  $2 \in A$ ، از طرفی واضح است که  $6 \notin A$  یعنی عضو ۶ به مجموعه  $A$  تعلق ندارد.

## کار در کلاس

۱ فرض کنید  $A = \{a, b\}$ ، درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

$$\{a\} \in A \quad \text{الف) } \emptyset \in A \quad \text{ب)}$$

$$\{a\} \subseteq A \quad \text{پ) } b \subseteq A \quad \text{ت)}$$

$$a \in A \quad \text{ث) } \{a, b\} \subseteq A \quad \text{ج)}$$

۲ کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر با تهی و کدام یک ناتهی‌اند؟

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9 \text{ و } x = 4\} \quad \text{الف) } \{x \in \mathbb{Z} \mid x + 8 = 8\} \quad \text{ب)}$$

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \neq x\} \quad \text{پ) } \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 7x\} \quad \text{ت)}$$

۳ مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضای آنها مشخص کنید.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\}$$

$$B = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 = m\}$$

$$C = \{k \in \mathbb{R} \mid k^2 - 1 = 0\}$$

$$D = \{a \in S \mid \text{فضای نمونه پرتاب یک تاس است}\}$$

۴ با توجه به مجموعه‌ها در قسمت ۳، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

$$B \in A$$

$$B \subseteq A$$

$$A \cap D \subseteq C$$

$$B \subseteq C \cup A$$

$$C \not\subseteq A$$

$$B - D \subseteq A$$

## تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه

### فعالیت

مجموعه  $A = \{a, b, c\}$  را در نظر بگیرید.

۱ همه زیرمجموعه های  $A$  را بنویسید.

۲ با دو رقم ۰ و ۱ می توانیم زیرمجموعه  $B = \{b, c\}$  از مجموعه  $A$  را با کد سه رقمی ۰۱۱ مشخص کنیم؛ چون  $a \notin B$  متناظر با آن کد ۰ و  $c \in B$  و  $b$  متناظر با آنها کد ۱ را در نظر گرفته ایم. همچنین زیرمجموعه  $\{a\} \subseteq A$  را با کد ۱۰۰ متناظر می کنیم. اکنون شما بقیه زیرمجموعه های  $A$  را با کدهایی سه رقمی نظیر کنید.

۳ با این روش کدگذاری و به کمک اصل ضرب (سال گذشته در فصل شمارش، بدون شمردن خوانده اید) تعداد زیرمجموعه های  $A$  را تعیین کنید.



۴ فرض کنید  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ، با روش کدگذاری با رقم های ۰ و ۱ و به کمک اصل ضرب تعیین کنید که  $A$  چند زیرمجموعه دارد.



۵ اگر  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  در این صورت، با این روش کدگذاری مشخص کنید که  $A$  چند زیرمجموعه دارد.



فرض کنید  $A$  یک مجموعه  $n$  عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه های  $A$  برابر با  $2^n$  است.

مثال: مجموعه  $A = \{a, \{a\}, \emptyset\}$  را در نظر بگیرید و همه زیرمجموعه های  $A$  را در یک مجموعه بنویسید.

### خواندنی

مجموعه همه زیرمجموعه های  $A$ ، مجموعه توانی  $A$  نامیده می شود و آن را با  $P(A)$  نمایش می دهیم. اگر  $A$ ،  $n$  عضو داشته باشد، در این صورت  $P(A)$ ،  $2^n$  عضو دارد. اگر  $A \subseteq B$  به طوری که  $A \neq B$ ، آنگاه  $A$  زیرمجموعه محض یا سره  $B$  نامیده می شود.

مثال: مجموعه متناهی  $A$  را در نظر بگیرید، اگر ۲ عضو به اعضای  $A$  اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۸ واحد افزایش می‌یابد، مشخص کنید  $A$  چند عضوی است.

حل: فرض کنیم  $A$ ،  $n$  عضو داشته باشد، پس دارای  $2^n$  زیرمجموعه است؛ اگر ۲ عضو به اعضای  $A$  اضافه شود، در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های  $A$ ، ۴۸ واحد افزایش می‌یابد؛ یعنی در این حالت، تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه برابر با  $2^n + 48$  است. از طرفی وقتی ۲ عضو به اعضای  $A$  اضافه می‌شود، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه جدید، برابر است با  $2^{n+2}$  است. بنابراین داریم:

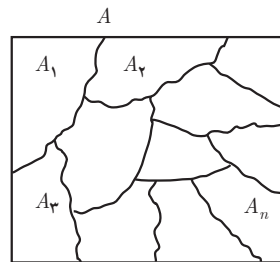
$$\begin{aligned} 2^n + 48 &= 2^{n+2} = 2^n \times 2^2 \\ \Rightarrow 2^n + 48 &= 4 \times 2^n \Rightarrow 4 \times 2^n - 2^n = 48 \\ \Rightarrow 3 \times 2^n &= 48 \Rightarrow 2^n = 16 = 2^4 \Rightarrow n = 4 \end{aligned}$$

در نتیجه مجموعه  $A$ ، چهار عضوی است.

## افراز یک مجموعه

### فعالیت

- ۱ مجموعه  $A = \{a, b, c\}$  را در نظر بگیرید. تمام زیرمجموعه‌های  $A$  به غیر از  $\emptyset$  را بنویسید.
- ۲ از بین زیرمجموعه‌های ناتهی  $A$  که در بالا نوشتید، دو زیرمجموعه چنان در نظر بگیرید که اولاً اشتراکی نداشته باشند و ثانیاً اجتماع آنها برابر با  $A$  شود.
- ۳ همه جواب‌های ممکن برای قسمت قبل را به دست آورید.
- ۴ آیا می‌توان سه زیرمجموعه در قسمت ۱ چنان یافت که اشتراک دویه‌دوی آنها تهی باشد و اجتماع آنها برابر با  $A$  شود؟ فرض کنیم  $A \neq \emptyset$  یک مجموعه و  $A_1, A_2, \dots, A_n$  زیرمجموعه‌های  $A$  باشند. مجموعه  $A$  به  $n$  زیرمجموعه  $A_1, A_2, \dots, A_n$  افراز شده است، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد.



- I)  $\forall 1 \leq i \leq n; A_i \neq \emptyset$
- II)  $\forall i, j (i \neq j; A_i \cap A_j = \emptyset)$
- III)  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i = A$

### کار در کلاس

مجموعه  $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$  را در نظر بگیرید، کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای  $A$  محسوب می‌شود؟

- ۱  $\{1, 3, 5\}$  و  $\{2, 6\}$  و  $\{4, 8, 9\}$
- ۲  $\{1, 3, 5\}$  و  $\{2, 4, 6, 8\}$  و  $\{5, 7, 9\}$
- ۳  $\{1, 3, 5\}$  و  $\{2, 4, 6, 8\}$  و  $\{7, 9\}$

## تعریف زیر مجموعه به کمک نمادهای ریاضی

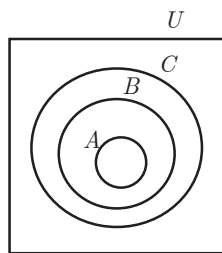
فرض کنید  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند به طوری که هر عضو  $A$ ، عضوی از  $B$  باشد، در این صورت  $A$  را زیرمجموعه  $B$  نامیده و می‌نویسند  $A \subseteq B$ . اگر عضوی در  $A$  وجود داشته باشد، به طوری که آن عضو در مجموعه  $B$  نباشد، در این صورت  $A$  زیرمجموعه  $B$  نیست و می‌نویسند  $A \not\subseteq B$ . با استفاده از نمادهای ریاضی می‌توان تعریف‌های  $A \subseteq B$  و  $A \not\subseteq B$  را به صورت زیر نوشت:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x; (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x; (x \in A \wedge x \notin B)$$

## روش عضوگیری دلخواه

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم  $A \subseteq B$  و اعضای مجموعه‌های  $A$  و  $B$  در دسترس نباشند، کافی است عضوی دلخواه مانند  $x$  از  $A$  فرض کنیم، سپس با استفاده از فرض‌های داده شده نشان دهیم که  $x$  در  $B$  وجود دارد. از آنجا که  $x$  دلخواه بوده است در واقع هر عضو  $A$  در  $B$  است. بنابراین، با توجه به تعریف زیرمجموعه، ثابت کرده‌ایم  $A \subseteq B$ . در زیر چند ویژگی مهم در مجموعه‌ها با روش عضوگیری دلخواه ثابت شده است.



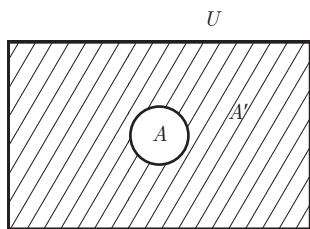
**ویژگی ۱-** فرض کنید  $A$  و  $B$  و  $C$  سه مجموعه با مرجع  $U$  باشند، به طوری که  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq C$  ثابت کنید  $A \subseteq C$ .

**اثبات:** برای اثبات  $A \subseteq C$ ، باید ثابت کنیم که:  $\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in C)$   
برای این منظور از فرض‌ها یعنی  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq C$  استفاده می‌کنیم.

$$\forall x; x \in A \stackrel{A \subseteq B}{\Rightarrow} x \in B \stackrel{B \subseteq C}{\Rightarrow} x \in C$$

در نتیجه داریم:

$$\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in C) \Rightarrow A \subseteq C$$



**ویژگی ۲-** فرض کنید  $A$  و  $B$  دو مجموعه با مرجع  $U$  باشند و  $A \subseteq B$ . ثابت کنید  $B' \subseteq A'$ . ( $B'$  و  $A'$  به ترتیب متمم‌های مجموعه‌های  $B$  و  $A$  هستند).  
قبل از اثبات این ویژگی، تعریف متمم یک مجموعه را یادآوری می‌کنیم. فرض کنیم  $A$  مجموعه‌ای با مرجع  $U$  باشد، متمم مجموعه  $A$  برابر با مجموعه اعضای  $U$  است که متعلق به مجموعه  $A$  نباشند و آن را با  $A'$  نمایش می‌دهند.

$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

از این تعریف نتیجه می‌گیریم که اگر  $x \in A$  آن گاه  $x \notin A'$  یا اگر  $x \in A'$  آن گاه  $x \notin A$ .

**اثبات:** برای اینکه ثابت کنیم  $B' \subseteq A'$  باید نشان دهیم که:  $\forall x; (x \in B' \Rightarrow x \in A')$  بنابراین داریم:

$$\forall x; (x \in B' \Rightarrow x \notin B \stackrel{A \subseteq B}{\Rightarrow} x \notin A \Rightarrow x \in A')$$

$$\forall x; (x \in B' \Rightarrow x \in A') \Rightarrow B' \subseteq A'$$

در نتیجه داریم:

**ویژگی ۳-** برای هر مجموعه دلخواه مانند  $A$  با مجموعه مرجع  $U$  ثابت کنید:  $\emptyset \subseteq A$ .  
**اثبات:** برای اثبات  $\emptyset \subseteq A$  باید نشان دهیم که ارزش گزاره شرطی  $\forall x; (x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$  همواره درست است. چون در این گزاره شرطی، ارزش مقدم یعنی  $x \in \emptyset$  نادرست است، پس به انتفای مقدم ارزش گزاره شرطی درست است و در نتیجه  $\emptyset \subseteq A$ .

## کار در کلاسی

**۱** برای مجموعه‌های  $A$  و  $B$  با مرجع  $U$  ثابت کنید که  $A \subseteq A \cup B$ .  
**اثبات:**

$$\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B) \Rightarrow x \in A \cup B$$

$$\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in A \cup B) \Rightarrow A \subseteq A \cup B$$

بنابراین داریم:

درستی استدلال بالا را توضیح دهید.

**۲** فرض کنیم  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  چهار مجموعه با مرجع  $U$  باشند، ثابت کنید: اگر  $A \subseteq B$  و  $C \subseteq D$  آن گاه  $A \cup C \subseteq B \cup D$ .  
**اثبات:** جاهای خالی را پر کنید:

$$\forall x; [x \in (A \cup C)] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow \dots & (A \subseteq B \text{ زیرا}) \\ \vee & \vee \\ \dots \Rightarrow x \in D & (C \subseteq D \text{ زیرا}) \end{cases} \Rightarrow x \in B \vee x \in D \Rightarrow \dots$$

بنابراین داریم:

$$\forall x; [x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in (B \cup D)] \Rightarrow \dots$$

**۳** فرض کنیم  $A$  و  $B$  و  $C$  سه مجموعه با مرجع  $U$  باشند، ثابت کنید: اگر  $A \subseteq C$  و  $B \subseteq C$  آن گاه  $(A \cup B) \subseteq C$ .  
**راهنمایی:** از ویژگی قسمت ۲ استفاده کنید.

## دو مجموعه مساوی

فرض کنیم  $A$  و  $B$  دو مجموعه با مرجع  $U$  باشند به طوری که هر عضو  $A$ ، عضوی از  $B$  و هر عضو  $B$  عضوی از  $A$  باشد؛ یعنی  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq A$ ، در این صورت  $A$  با  $B$  مساوی است و می‌نویسیم:  $A=B$ . به عبارت دیگر می‌توان تساوی دو مجموعه را به صورت زیر نوشت:

$$A=B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$$

## کار در کلاسی

فرض کنید  $A = \{1, 2\}$ ، کدام یک از مجموعه‌های زیر با  $A$  مساوی است؟ (با ذکر دلیل).

ب)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$

الف)  $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$

ت)  $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2\}$

پ)  $\{x \in \mathbb{Q} \mid 2x^2 + 3x + 1 = 0\}$

مثال : فرض کنیم  $A$  و  $B$  دو مجموعه با مرجع  $U$  باشند، ثابت کنید :  $A \cap B = B \cap A$  . (خاصیت جابه‌جایی اشتراک).  
اثبات : برای اثبات حکم باید درستی دو رابطه زیر را نشان دهیم :

$$A \cap B \subseteq B \cap A \quad (۱) \quad ; \quad B \cap A \subseteq A \cap B \quad (۲)$$

اثبات (۱) :

$$\forall x; [x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in B \wedge x \in A \quad (\text{طبق خاصیت جابه‌جایی } \wedge) \\ \Rightarrow x \in B \cap A]$$

به روش مشابه می‌توان درستی رابطه (۲) را نشان داد.

مثال : فرض کنیم  $A$  و  $B$  دو مجموعه با مرجع  $U$  باشند؛ ثابت کنید که اگر  $A \subseteq B$  آن‌گاه  $A - B = \emptyset$ .  
اثبات :

$$A - B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \in U \mid x \in B \wedge x \notin B\} = \emptyset \quad (\text{زیرا } A \subseteq B) \\ \Rightarrow A - B = \emptyset$$

## تمرین

۱ مجموعه‌های زیر را که شامل شکل‌های هندسی در صفحه هستند، در نظر بگیرید :

$$A = \{x \mid x \text{ یک چهارضلعی است}\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ یک لوزی است}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ یک مستطیل است}\}$$

$$D = \{x \mid x \text{ یک مربع است}\}$$

کدام یک از روابط زیر درست است؟ (با ذکر دلیل)

$$B \subseteq D \quad (\text{ب})$$

$$D \subseteq C \quad (\text{الف})$$

$$D \subseteq A \quad (\text{ت})$$

$$A \subseteq B \quad (\text{پ})$$

۲ فرض کنید  $A = \{۱, ۲, ۳, \dots, ۸, ۹\}$  و  $B = \{۲, ۴, ۶, ۸\}$  و  $C = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\}$  و  $D = \{۳, ۴, ۵\}$  و  $E = \{۳, ۵\}$ .

در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید :  $X$  می‌تواند کدام یک از این مجموعه‌ها باشد؟

$$X \subseteq A \text{ ولی } X \not\subseteq C \quad (\text{ب})$$

$$X \text{ و } B \text{ عضو مشترکی ندارند.} \quad (\text{الف})$$

$$X \subseteq C \text{ ولی } X \not\subseteq A \quad (\text{ت})$$

$$X \subseteq D \text{ ولی } X \not\subseteq B \quad (\text{پ})$$

۳ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

$$\emptyset \subseteq \{\emptyset\} \quad (\text{ب})$$

$$\emptyset = \{\emptyset\} \quad (\text{الف})$$

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\} \quad (\text{ت})$$

$$\emptyset \notin \{\emptyset\} \quad (\text{پ})$$

۴ کدام یک از مجموعه‌های زیر باهم مساوی‌اند؟

$$A = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < ۲\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = x\}$$

$$C = \{y \in \mathbb{Z} \mid y^2 \leq ۲y\}$$

$$D = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \leq ۱\}$$

$$E = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 + ۲m = ۳m^2\}$$

۵ مثال هایی از مجموعه های دلخواه  $A$  و  $B$  و  $C$  بیاورید که برای آنها حکم های زیر درست باشند.

الف)  $A \in B$  و  $B \in C$  و  $A \notin C$

ب)  $A \in B$  و  $B \in C$  و  $A \in C$

پ)  $A \in B$  و  $A \subseteq B$

۶ اگر دو عضو از مجموعه  $A$  حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه های آن ۳۸۴ واحد کم می شود، مجموعه  $A$  چند زیرمجموعه دارد؟

۷ اگر  $A = \{2, x+2y, 4\}$  و  $B = \{4, 5, x-y\}$  و  $A=B$  در این صورت، مقادیر  $x$  و  $y$  را بیابید.

۸ ثابت کنید برای مجموعه های  $A$  و  $B$  با مرجع  $U$  داریم:  $A-B \subseteq A$ .

۹ فرض کنیم  $A$  و  $B$  و  $C$  سه مجموعه با مرجع  $U$  باشند، ثابت کنید: اگر  $A \subseteq B$  آن گاه:

الف)  $A \cup C \subseteq B \cup C$  ب)  $A \cap C \subseteq B \cap C$

۱۰ مجموعه های  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  با مرجع  $U$  را در نظر بگیرید، ثابت کنید: اگر  $A \subseteq B$  و  $C \subseteq D$  آن گاه:

الف)  $A \cap C \subseteq B \cap D$  ب)  $A \cap C \subseteq B \cup D$

۱۱ الف) فرض کنید:  $A \subseteq \emptyset$  ثابت کنید:  $A = \emptyset$ . ب) فرض کنید  $U \subseteq A$  ثابت کنید:  $A = U$ .

۱۲ هرگاه  $A$  و  $B$  دو مجموعه با مرجع  $U$  باشند و  $A \cap B = \emptyset$  در این صورت ثابت کنید:

الف)  $B-A = B$  ب)  $B \subseteq A'$

۱۳ فرض کنید:  $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ، کدام یک از حالت های زیر یک افراز برای  $X$  محسوب می شود.

الف)  $\{a, c, e\}$  و  $\{b\}$  و  $\{d, g\}$  ب)  $\{a, e, g\}$  و  $\{c, d\}$  و  $\{b, f\}$

پ)  $\{a, b, e, g\}$  و  $\{c\}$  و  $\{d, f\}$  ت)  $\{a, b, c, d, e, f, g\}$

ث)  $\{e\}$  و  $\{f, g\}$  و  $\{d\}$  و  $\{b, c\}$  و  $\{a\}$