

تابع

۲

فصل

- ۱ آشنایی بیشتر با تابع
- ۲ انواع توابع
- ۳ وارون تابع
- ۴ اعمال روی توابع



مفهوم تابع در ریاضیات و علوم مختلف دارای کاربردهای فراوانی است. تابع در دنیای واقعی برای توصیف بسیاری از پدیده‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌طور نمونه قد متوسط کودکان را می‌توان به‌صورت یک تابع رادیکالی مانند $f(x) = \sqrt{x} + 50$ نمایش داد.

آشنایی بیشتر با تابع

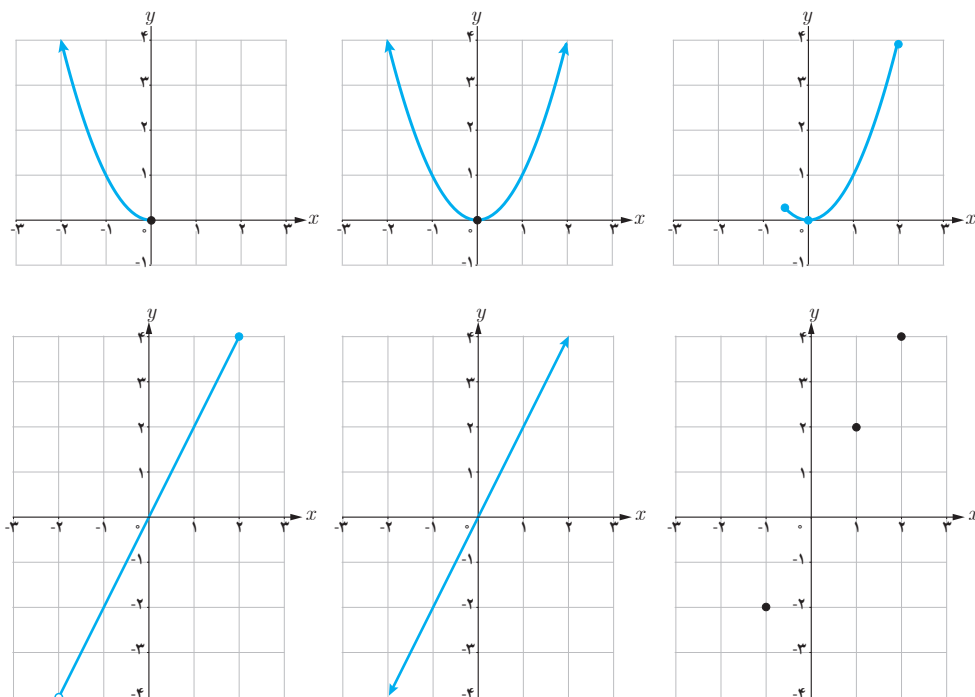
درس ۱

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B ، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو A ، دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود. A را دامنه تابع و B را هم دامنه تابع می‌نامند. برد تابع زیرمجموعه‌ای از هم دامنه است.

کارد کلاس

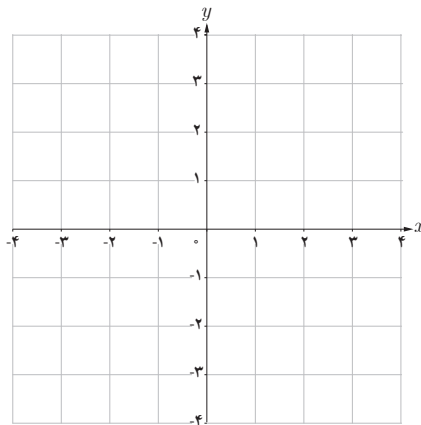
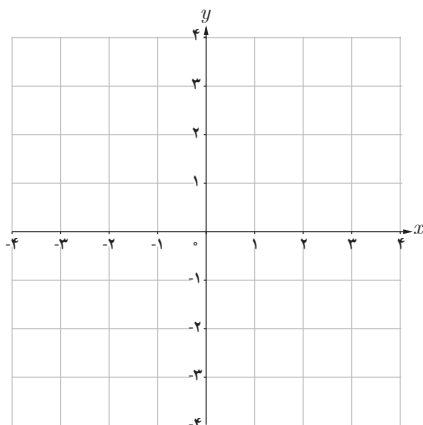
الف) با توجه به توابع داده شده در جدول زیر، مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است و جدول را نیز کامل کنید. شباهت‌ها و تفاوت‌های نمودارها را با هم مقایسه کنید.

تابع	$f(x) = 2x$	$g(x) = 2x$	$h(x) = 2x$	$t(x) = x^2$	$s(x) = x^2$	$k(x) = x^2$
دامنه تابع	\mathbb{R}	$\{-1, 1, 2\}$	$(-2, 2]$	\mathbb{R}	$(-\infty, 0]$	$[-\frac{1}{4}, 2]$
برد تابع						



تابع	$f(x) = 2x$	$g(x) = x^2$
دامنه		
برد		

ب) جدول روبه‌رو را به دلخواه (متفاوت از قسمت الف) کامل و نمودار هر تابع را رسم کنید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید. چند پاسخ متفاوت برای f و g می‌توان ارائه کرد؟



برای مشخص بودن یک تابع باید دامنه، هم‌دامنه و دستور یا قاعده‌ای که نحوه ارتباط بین اعضای دامنه و اعضای هم‌دامنه را نشان می‌دهد معلوم باشد.

به‌طور مثال تابع f در قسمت الف کار در کلاس قبل، تابعی است با دامنه \mathbb{R} و هم‌دامنه \mathbb{R} و ضابطه آن نیز $f(x) = 2x$ است. برای سادگی و اختصار این تابع را به‌صورت مقابل نمایش می‌دهند:

$$(f \text{ تابعی از } \mathbb{R} \text{ به } \mathbb{R} \text{ است.}) \quad \begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} h: (-2, 2] \rightarrow (-4, 4] \\ h(x) = 2x \end{cases} \quad \text{به همین ترتیب تابع } h \text{ قسمت الف را می‌توان چنین نمایش داد.}$$

$$\begin{cases} h: (-2, 2] \rightarrow \mathbb{R} \\ h(x) = 2x \end{cases} \quad \text{تابع } h \text{ را به‌صورت مقابل هم می‌توان معرفی کرد.}$$

در هر دو نمایش اخیر تابع h ، دامنه مجموعه $(-2, 2]$ و ضابطه آن $h(x) = 2x$ است. در نمایش اول هم‌دامنه $(-4, 4]$ است که همان برد تابع است. در نمایش دوم h ، هم‌دامنه را \mathbb{R} در نظر گرفته‌ایم. در این حالت نیز برد تابع $(-4, 4]$ است.

هم‌دامنه تابع را می‌توان هر مجموعه دلخواهی شامل برد تابع در نظر گرفت.

برای تابع $f: [0, \frac{1}{3}] \rightarrow [0, \frac{1}{9}]$ کدام یک از نمایش‌های زیر نیز قابل قبول است؟
 $f(x) = x^2$

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases}$$

(الف)

$$\begin{cases} f: [0, \frac{1}{3}] \rightarrow [0, \infty) \\ f(x) = x^2 \end{cases}$$

(ب)

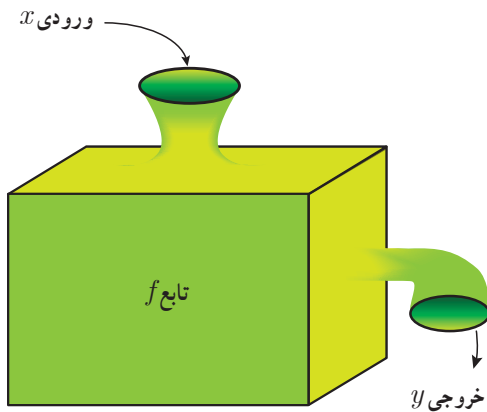
$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \frac{1}{9}] \\ f(x) = x \end{cases}$$

(پ)

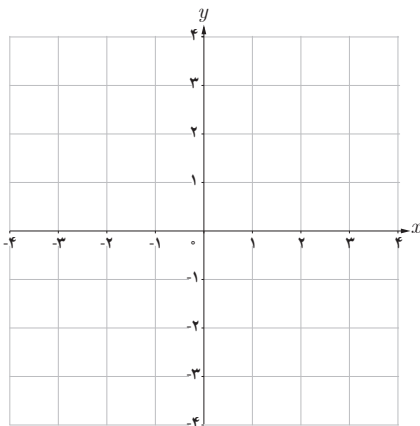
$$\begin{cases} f: [0, \frac{1}{3}] \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases}$$

(ت)

تابع به عنوان یک ماشین



می‌توان تابع را همچون ماشینی در نظر گرفت که یک ورودی را دریافت می‌کند و در ازای آن یک خروجی تحویل می‌دهد. ورودی‌ها از دامنه داده می‌شوند و خروجی‌ها به برد تعلق دارند و برای هر ورودی دقیقاً یک خروجی وجود دارد (البته ممکن است چند ورودی مختلف خروجی یکسانی داشته باشند). اگر x عنصری دلخواه از دامنه f و y نمایش خروجی نظیر آن باشد، x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته می‌نامند.
 در این صورت می‌نویسیم: $y = f(x)$



فرض کنید ماشین f به عنوان ورودی، اعداد (حقیقی) را قبول می‌کند و پس از دریافت هر عدد، آن را سه برابر و سپس ۵ واحد به آن اضافه می‌کند. در این صورت به ازای ورودی 1° ، خروجی 35 را می‌دهد. به سؤالات زیر پاسخ دهید:

- (الف) ماشین به ازای ورودی -2 ، چه خروجی خواهد داشت؟
 (ب) اگر خروجی ماشین 4 باشد ورودی آن چقدر بوده است؟
 (پ) نمایش تابع به صورت $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ است.
 $f(x) = \dots$
 (ت) نمودار تابع را رسم و دامنه و برد آن را معلوم کنید.

برابری دو تابع

اگر نمودارهای دو تابع در یک دستگاه مختصات داده شده باشند، هنگامی این دو تابع باهم برابرند که نمودارهای آنها کاملاً برهم منطبق شوند. به طور مثال هیچ کدام از توابع داده شده در قسمت الف کار در کلاس صفحه ۳۸ با یکدیگر برابر نیستند. اگر دو تابع به صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشند، هنگامی باهم برابرند که به عنوان دو مجموعه باهم برابر باشند.

دو تابع f و g را برابر نامیم هرگاه:
 الف) دامنه f و دامنه g باهم برابر باشند.
 ب) برای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

❖ مثال: تابع‌های $f(x) = \sqrt{x^2}$ و $g(x) = |x|$ باهم برابرند ولی تابع‌های $f(x) = \frac{x}{x}$ و $g(x) = 1$ برابر نیستند. چرا؟

کاردکلاس

۱ در جدول زیر کدام یک از توابع داده شده زیر باهم برابرند؟ دلیل بیاورید:

۱	$f = \{(1, 2), (5, 7)\}$	$g = \{(1, 7), (5, 2)\}$
۲	$f = \{(a, b), (c, d)\}$	$g = \{(c, d), (a, b)\}$
۳	$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 3x \end{cases}$	$\begin{cases} g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = 3x \end{cases}$
۴	$f(x) = x x $	$g(x) = x^2$
۵	$f(x) = 4x$	$g(x) = \frac{4x}{4}$

۲ وقتی در آسمان پدیده آذرخش رخ می‌دهد، اندکی پس از دیدن نور آن صدای آن را نیز می‌شنویم. صدای ناشی از آذرخش هر ۳ ثانیه حدود یک کیلومتر را طی می‌کند. رابطه بین فاصله ما از مکان وقوع آذرخش و زمانی که طول می‌کشد تا صدای آن را بشنویم در جدول زیر (برای برخی زمان‌ها) داده شده است، اگر $t \in [4, 12]$:

الف) جدول را کامل کنید:

t (ثانیه)	۴	$4\frac{1}{2}$	۵		۸	۹	$10\frac{1}{5}$		۱۲
h (کیلومتر)	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$		۲				$\frac{11}{3}$	

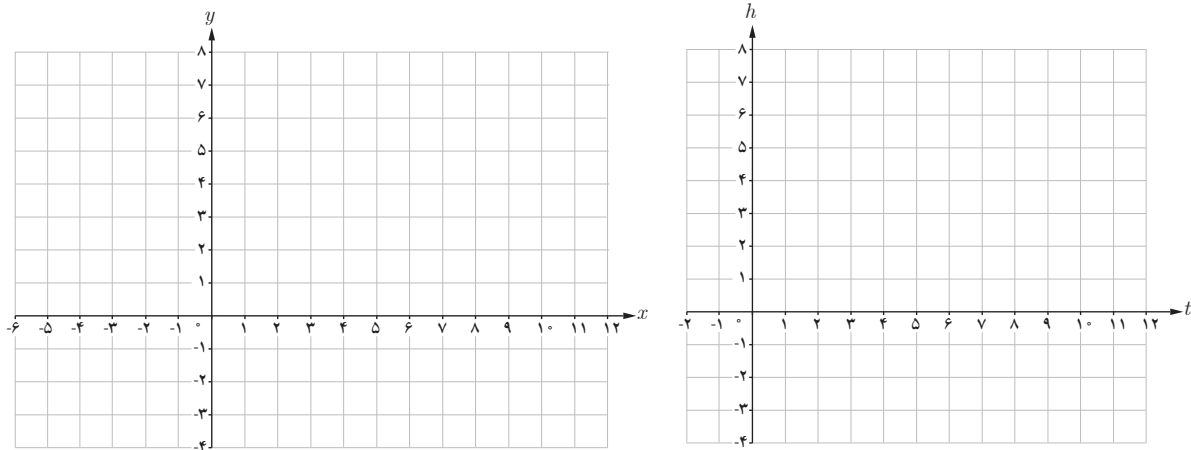
ب) چرا h تابعی از t است؟

پ) دامنه و برد این تابع را بنویسید.

ت) نمایش مقابل از تابع h کامل کنید :

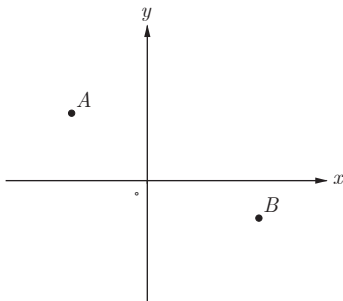
$$\begin{cases} h: [\quad] \rightarrow [\quad] \\ h(t) = \end{cases}$$

ث) نمودار تابع h و نمودار تابع $y = \frac{1}{3}x$ را رسم کنید و شباهت‌ها و تفاوت‌های آنها را بیان کنید.



تمرین

۱ در صفحه مختصات روبه‌رو تابعی رسم کنید که نقاط A و B روی آن قرار داشته باشند. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟



۲ کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است؟ دلیل بیاورید.
الف) اگر دامنه دو تابع باهم برابر و برد آنها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند.
ب) برد و هم‌دامنه تابع می‌توانند یکی باشند.

پ) هم‌دامنه تابع زیر مجموعه‌ای از برد آن است.

ت) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنه آن بازه $[0, 3]$ است.

۳ تابعی مثال بزنید که دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت باشد. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟

۴ همه تابع‌های از مجموعه $A = \{a, b, c\}$ به مجموعه $B = \{d, e\}$ را بنویسید(از نمودار پیکانی کمک بگیرید).

۵ تابع‌های مساوی را مشخص کنید.

$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x \end{cases}$	$\begin{cases} r: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ r(a) = 5a \end{cases}$
$\begin{cases} g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = 5x \end{cases}$	$\begin{cases} s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ s(a) = 5a \end{cases}$
$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ h(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} t: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ t(x) = 5x \end{cases}$

۶ تابع f در همه شرایط زیر صدق می‌کند. f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف) دامنه f مجموعه اعداد حقیقی است و $f(2) = 3$ و $f(-5) = -2$

ب) f در بازه $[0, 2]$ ثابت است.

پ) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

ت) تابع f برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۳- قطع می‌کند.

۷ با استفاده از یک تابع خطی و با در دست داشتن طول استخوان بازو (از آرنج تا شانه) می‌توان طول قد یک انسان بزرگ‌سال را برآورد کرد:

$$M(x) = 2/89x + 70/64$$

تابع خطی برای مردان

$$F(x) = 2/75x + 71/48$$

تابع خطی برای زنان

که در آنها x طول استخوان بازو برحسب سانتی‌متر است.

الف) اگر طول استخوان بازوی یک مرد ۳۵ سانتی‌متر باشد، طول قد او چقدر است؟

ب) اگر قد یک مرد ۱۸۵ سانتی‌متر باشد، طول استخوان بازوی او چقدر است؟

پ) برای تابع $F(x)$ نیز مشابه الف و ب یک سؤال طرح کنید و به آن پاسخ دهید.

خواندنی

نتایج یک مطالعه در مورد قد مردان و زنان از سال ۱۹۱۴ تا ۲۰۱۴ نشان می‌دهد که میانگین قد مردان ایرانی در طی این صد سال از ۱۵۷/۱ به ۱۷۳/۶ سانتی‌متر و میانگین قد زنان ایرانی از ۱۴۸/۵ به ۱۵۹/۷ سانتی‌متر رسیده است. مردان ایرانی بیشترین افزایش طول قد در دنیا را در ۱۰۰ سال اخیر داشته‌اند.

