امروزه به‌خدمت گرفتن انرژی هسته‌ای بدون آگاهی از علم فیزیک و انجام محاسبات پیچیده با کمک ابرایانه‌ها ممکن نیست. بخشی از این محاسبات به واکنش‌های هسته‌ای مربوط است؛ هنگاهی که یک نوترون به سمت جسمی رادیواکتیو شلیک می‌شود، پس از طی مسیری، یا از جسم خارج می‌شود، یا جذب یک اتم می‌شود و یا اتمی را متلاشی می‌کند و در نتیجه چند نوترون و مقداری انرژی به‌وجود می‌آید. نوترون‌های آزادشدهٔ این زنجیره با سرعتی بسیار بالا ادامه می‌دهند. بررسی چنین واکنشی با استفاده از شبیه‌سازی‌های رایانه‌ای انجام می‌شود و مدل‌های احتمالاتی در آن نقشی بنیادی دارند.

۲ احتمال

درس ۱ مبانی احتمال

آمار و احتمال به چه کار می‌آیند؟

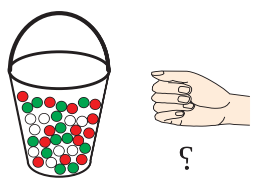
فرض کنید کارشناسان یک کارخانهٔ تولید لوازم خانگی می‌خواهند برای سال آینده، تغییراتی در میزان تولید کالاهای کارخانه به‌وجود آورند؛ آنها باید مشخص کنند که سرمایهٔ کارخانه به چه نسبت‌هایی صرف تولید یخچال، کولر، اجاق‌گاز و... شود. با توجه به اینکه آنها در مورد آنچه در آینده رخ خواهد داد، اطمینان ندارند، چگونه می‌توانند در این مورد تصمیمی درست بگیرند؟ چگونه می‌توانند از بین دو پیشنهاد مختلف، یکی را بر دیگری ترجیح دهند؟

ابزارهای حلّ چنین مسائلی، که با ناآگاهی نسبی از شرایط و یا وقایع آینده همراه است، علم آمار و علم احتمال است.

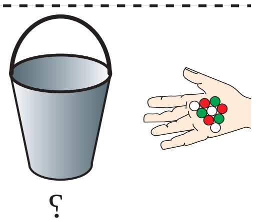
به کمک علم آمار می‌توان اطلاعات سال‌های گذشته کارخانه را به‌درستی جمع‌آوری کرد و از آنها توصیفی مناسب از وضعیت تقاضای کالاهای مختلف به‌دست آورد و سپس به سؤال‌هایی مانند «در سال آینده تقاضای یخچال، کولر، اجاق‌گاز و... چگونه خواهد بود؟» پرداخت. در قدم بعدی، علم احتمال کمک می‌کند که به بهترین تصمیم ممکن برسیم.

به‌طور خلاصه بخشی از این دو علم به‌نوعی در جهت عکس هم‌اند: آن‌گاه که با جامعه‌ای ناشناخته سر و کار داریم، شناختن جامعه با استفاده از نمونه‌ها و داده‌ها یک کار آماری است، ولی اگر جامعه را با جزئیات مورد نیاز بشناسیم و بخواهیم بدانیم نمونه‌هایی از آن جامعه چگونه خواهند بود، علم احتمال به کمک ما می‌آید. در شکل روبه‌رو، این موضوع نشان داده شده است؛ ظرفی که در آن مهره‌های رنگی وجود دارد، مانند جامعه است و مهره‌هایی که در مشت هستند، مانند نمونه‌اند.

علم احتمال: بررسی یک نمونهٔ نامعلوم از یک جامعهٔ معلوم



علم آمار: شناختن جامعهٔ نامعلوم، با استفاده از نمونه‌های جمع‌آوری شدهٔ معلوم



کار در کلاس

کدام‌یک از سؤال‌های زیر مربوط به علم آمار و کدام‌یک مربوط به علم احتمال است؟ در هر مورد با دیگران گفت‌وگو کنید.

صورت مسئله	آمار	احتمال
۱ــ می‌دانیم ۹۰ تا از ۱۰۰ سیب یک جعبه سالم است. چند تا سیب از جعبه برداریم، تا تقریباً مطمئن باشیم که دست‌کم یک سیب خراب برداشته‌ایم؟	☐	☐
۲ــ درآمد کارمندان شهرداری چقدر است؟	☐	☐
۳ــ ۹۰ نفر از ۱۰۵ دانش‌آموز پایه یازدهم به ورزش شنا علاقه دارند. اگر ۲۰ نفر از این دانش‌آموزان را به تصادف انتخاب کنیم، چقدر ممکن است کمتر از ۱۵ نفر از آنها به شنا علاقه‌مند باشند؟	☐	☐
۴ــ در انتخابات هفتم اسفند ۱۳۹۴، شهرستان سواد کوه شمالی با مشارکت بیش از ۹۸/۲ درصد رکوردار بوده است. اگر از ۱۰ نفر واجد شرایط بپرسیم که آیا در انتخابات شرکت کرده‌اند یا خیر، چقدر ممکن است پاسخ بیش از یک نفر منفی باشد؟	☐	☐
۵ــ چه تعداد از دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم مدرسه شما به ورزش شنا علاقه دارند؟	☐	☐

ریاضی‌دان‌ها چگونه به علم احتمال می‌پردازند؟

ریاضی‌دانان معمولاً برای حلّ مسائل سخت و پیچیده، ابتدا کار را از طراحی و حلّ مسائلی ساده شروع می‌کنند و سپس قدم به قدم با ساختن بنایی استوار از تعاریف، مفاهیم، قضیه‌ها و . . . به سراغ مسائلی می‌روند که شاید در نگاه اوّل دست‌نیافتنی به نظر می‌رسیدند. بیایید مانند ریاضی‌دان‌ها مسئلهٔ ساده‌ای را که در آن اطمینان وجود ندارد، بررسی کنیم :

فعالیت

برق‌کاری نیاز به یک لامپ سالم دارد. دو جعبه داریم که در اوّلی و دومی، به‌ترتیب، ۵ و ۲۰ لامپ وجود دارد، ولی فقط برخی از این لامپ‌ها سالم‌اند؛ در اوّلی سه لامپ و در دومی ۱۳ لامپ سالم است. او باید یکی از دو جعبه را انتخاب کند و از آن جعبه یک لامپ، به‌تصادف، بردارد. به نظر شما، او بهتر است کدام جعبه را انتخاب کند؟

جواب این سؤال ساده است : در جعبهٔ اوّل ۶۰ درصد و در جعبهٔ دوم ...... درصد لامپ‌ها سالم‌اند، پس بهتر است جعبهٔ ...... را انتخاب کند.

اکنون فرض کنید دو جعبه همان شرایط را دارند، ولی برق‌کار از آن جعبه، دو لامپ، بدون آزمایش، بردارد. به نظر شما، او بهتر است کدام جعبه را انتخاب کند؟

در این حالت، تصمیم‌گیری به سادگی حالت اوّل نیست.

کار در کلاس

به چند حالت مختلف می‌توان ۲ لامپ را یکی پس از دیگری از بین ۵ لامپ جعبهٔ اوّل مذکور انتخاب کرد؟ در چند حالت هر دو لامپ معیوب است؟ مشابه همین سؤال‌ها را در مورد جعبهٔ دوم بررسی کنید. با توجه به نتایج، انتخاب کدام جعبه را برای حالت دوم بهتر می‌دانید؟

چنین مسائلی هر چند ساختگی‌اند، ولی ماهیت آنها بسیار شبیه همان مسئله‌ای است که کارشناسان کارخانه با آن مواجه بودند : تصمیم‌گیری برای آینده‌ای که در مورد وقایع آن اطمینان نداریم.

خواندنی

از احتمال کیفی تا احتمال کمی

واژهٔ احتمال و مشابه‌های آن مانند شانس، بخت، تصادف در بین مردم عامی هم رایج است : «فردا به احتمال زیاد باران می‌بارد»، «تیم والیبال ایران برای راه‌یابی به المپیک شانس زیادی در آینده دارد» و . . .

مردم گاهی برای توصیف احساس خود در این موارد، از اعداد نیز استفاده می‌کنند، ولی منظور آنها صرفاً بیان یک حسّ کیفی است : «به احتمال ۹۹ درصد هفتهٔ بعد طلا گران می‌شود»، «تیم انتهای جدول یک درصد هم شانس قهرمان شدن ندارد» و . . .

شما نیز چند مثال بزنید که مردم یا رسانه‌ها از عباراتی که معنای احتمال و عدم اطمینان می‌دهند استفاده می‌کنند. آیا شما مثالی در زندگی روزمرهٔ خود سراغ دارید که احتمال را با عدد بیان کنید و منظورتان فراتر از صرفاً بیان یک حس کیفی باشد؟

علم احتمال این عدم اطمینان کیفی را کمّی می‌کند؛ یعنی آن را به عدد تبدیل می‌کند تا در چارچوب علم ریاضی قرار بگیرد و بتوان با کمک محاسبات ریاضی به نتایجی روشن‌تر، دقیق‌تر و قابل اثبات و اتکا رسید.

ترجمهٔ زبان گزاره‌ها به زبان مجموعه‌ها

معمولاً وقتی از احتمال رخ دادن رویدادی صحبت می‌کنیم، آن رویداد را به شکل یک گزاره بیان می‌کنیم؛ مثلاً می‌گوییم احتمال اینکه «فردا باران ببارد»، احتمال اینکه «نتیجهٔ مسابقهٔ فوتبال هفتهٔ آینده تساوی شود»، احتمال اینکه «متهم دستگیرشده، مجرم باشد» و . . .

ولی ریاضی‌دانان گاهی به‌شکل دیگری احتمال را به‌کار می‌برند. برای روشن شدن این موضوع، همان مثال قبلی را به یاد بیاورید : فرض کنید برق‌کار جعبهٔ اوّل را انتخاب کرده و می‌خواهد از بین ۵ لامپ یکی را بردارد. لامپ‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم به نحوی که شماره‌های ۱ تا ۳ سالم و شماره‌های ۴ و ۵ معیوب باشند.

شمارهٔ لامپی که بیرون کشیده می‌شود برای برق‌کار معلوم نیست، ولی به هر حال یکی از اعضای مجموعهٔ زیر است :

$S=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$

همان‌طور که می‌دانید در علم احتمال به این مجموعه «فضای نمونه» گفته می‌شود.

به هر عضو فضای نمونه یک «برآمد» می‌گویند.

برق‌کار در صورتی راضی می‌شود که لامپ انتخابی سالم باشد و این یعنی اینکه شمارهٔ لامپ ۱، ۲ یا ۳ باشد. در این صورت، این اتفاق را هم می‌توان با یک زیرمجموعهٔ فضای نمونه مشخص کرد :

$A=\{۱,۲,۳\}$

همان‌طور که در سال‌های گذشته خوانده‌اید در علم احتمال به این زیرمجموعه‌ها «پیشامد» گفته می‌شود.

در زبان علم احتمال به جای اینکه بگوییم «لامپ انتخاب شده سالم باشد»، می‌توانیم بگوییم «پیشامد A رخ دهد» و به جای اینکه بگوییم «احتمال سالم بودن لامپ انتخابی»، می‌توانیم بگوییم «احتمال رخ دادن A». عبارت اخیر خلاصه‌شدهٔ این عبارت است «احتمال اینکه شمارهٔ لامپ انتخابی عضو A باشد».

کار در کلاس

زهرا و شبنم در مورد سؤالی که دربارهٔ پرتاب یک تاس سالم در کلاس مطرح شده با هم صحبت می‌کنند. به نظر شما چه کسی درست می‌گوید؟

- زهرا : فضای نمونه در این مسئله مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۶\}$ است.
- شبنم : بله، من هم موافق هستم. سؤالی که خانم معلم پرسیدند این است که اگر تاس را پرتاب کنیم و عدد ۲ بیاید، آیا پیشامد $\{۲,۴,۶\}$ رخ داده است؟
- زهرا : به نظرم نه، چون ۴ و ۶ هم علاوه بر ۲ عضو این پیشامدند.
- شبنم : ولی من فکر می‌کنم این پیشامد رخ داده است، چون این پیشامد، شامل عدد ۲ است.
- زهرا : پس ۴ و ۶ که نیامدند چه؟
- شبنم : یعنی باید آنها هم در پرتاب تاس آمده باشند تا بگوییم آن پیشامد رخ داده است؟ اصلاً این‌طور که شما فکر می‌کنید، چگونه ممکن است پیشامد $\{۲,۴,۶\}$ رخ دهد؟ مگر می‌شود تاسی را پرتاب کنیم و سه مقدار مختلف با هم ظاهر شود؟!

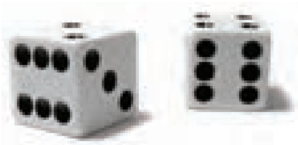
با توجه به مفهوم «رخ دادن یک پیشامد» می‌فهمیم که اگر $A_۱$ و $A_۲$ دو پیشامد باشند، آن‌گاه :

الف) اگر $A_۱$ زیرمجموعهٔ $A_۲$ باشد، رخ دادن $A_۱$ رخ دادن $A_۲$ را نتیجه می‌دهد.

ب) رخ دادن پیشامد $A_۱ \cap A_۲$، یعنی هر دو پیشامد $A_۱$ و $A_۲$ رخ دهد.

پ) رخ دادن پیشامد $A_۱ \cup A_۲$، یعنی دست‌کم یکی از دو پیشامد $A_۱$ و $A_۲$ رخ دهد.

تشخیص فضای نمونه



هرگاه بخواهیم مسئله‌ای را با کمک علم احتمال بررسی کنیم قدم اوّل شناختن فضای نمونه است. همان‌طور که گفته شد فضای نمونه مجموعه‌ای است که اعضای آن، که به آنها برآمد می‌گوییم، مشخص می‌کنند که نتیجهٔ آزمایش یا مشاهده‌ای که در حال بررسی آن هستیم چه حالت‌هایی دارد؛ مثلاً در پرتاب یک تاس، مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۶\}$ فضای نمونه است.

اگر بخواهیم نتایج حاصل از پرتاب دو تاس را بررسی کنیم از عمل ضرب دکارتی مجموعه‌ها استفاده می‌کنیم؛ مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۶\} \times \{۱,۲,...,۶\}$ که ۳۶ عضو دارد فضای نمونه است. البته لازم است که یکی از تاس‌ها را تاس اوّل و دیگری

را تاس دوم بنامیم تا مشخص شود که معنای برآمد (۱,۲) چیست. توجه داشته باشید که این برآمد غیر از برآمد (۲,۱) است.

در صورتی که آزمایشی متشکل از دو آزمایش با فضاهای نمونهٔ S_1 و S_2 باشد فضای نمونهٔ آن $S_1 \times S_2$ است. مشابه این موضوع برای هر تعداد آزمایش هم‌زمان نیز درست است.

مثال : یک رانندهٔ تاکسی خطی، در ایستگاه منتظر می‌ایستد تا حداکثر چهار مسافر سوار کند. البته ممکن است با کمتر از چهار مسافر نیز حرکت کند. در مسیر برگشت نیز همین اتفاق می‌افتد. فضای نمونه برای توصیف چنین پدیده‌ای، اگر فقط تعداد مسافرها در دو مسیر رفت و برگشت برای ما مهم باشد، چیست؟

حل : با توجه به اینکه تعداد این دو نوع مسافر در رفت و در برگشت عددی بین صفر و چهار است، می‌توان مجموعهٔ زیر را فضای نمونه گرفت :

$$S=\{۰,۱,۲,۳,۴\} \times \{۰,۱,۲,۳,۴\}$$

در این فضای نمونه، منظور از برآمد (۱,۲) این است که تاکسی با ۱ مسافر حرکت کرده و در برگشت ۲ مسافر سوار کرده است.

اصول احتمال

در حالت کلی شناختن فضای نمونه برای توصیف یک رویداد تصادفی کافی نیست. علاوه بر آن لازم است که بدانیم احتمال رخ دادن پیشامدهای مختلف که زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌اند، چقدر است. این موضوع را در درس بعد که در مورد احتمال غیرهم‌شانس است بهتر متوجه خواهید شد.

به‌عنوان مثال، به وضعیت آب و هوای قلهٔ دماوند در صبح نوروز سال آینده فکر کنید؛ می‌توان فضای نمونه را این‌چنین در نظر گرفت :

{ آفتابی، ابری }

آیا چون فضای نمونه دو عضوی است باید احتمال هر کدام ۵۰ درصد باشد؟

ممکن است کسی فضای نمونه را به شکل زیر انتخاب کند :

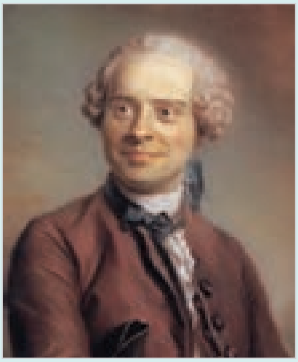
{ آفتابی، ابری بدون بارندگی، بارش باران، بارش برف، بارش تگرگ }

در این صورت آیا چون فضای نمونه پنج عضو دارد، باید احتمال هر کدام ۲۰ درصد باشد؟

اگر کسی به هر دو سؤال بالا جواب مثبت دهد، پس احتمال آفتابی بودن را یک بار ۵۰ درصد و یک بار ۲۰ درصد دانسته است!

خواندنی

یک اشتباه تاریخی



مشهور است که دالامبر[1]، ریاضی‌دان، فیزیک‌دان، فیلسوف و دائرةالمعارف‌نویس فرانسوی قرن هجدهم، تصور می‌کرد که اگر یک سکه را دو بار پرتاب کنیم، احتمال اینکه دقیقاً یک بار رو بیاید، برابر یک سوم است. او این‌گونه استدلال می‌کرد :

در چنین آزمایشی سه حالت وجود دارد : «هر دو رو»، «هر دو پشت» و «یک بار رو و یک بار پشت». در نتیجه احتمال وقوع هر یک از این حالات یک سوم است!

همان‌طور که گفته شد نکته این است در یک فضای نمونه برآمدهای مختلف ممکن است احتمال برابر نداشته باشند. در این حالت، محاسبهٔ احتمال برآمدها و پیشامدها ممکن است ساده نباشد، ولی احتمال پیشامدهای مختلف حتماً باید ویژگی‌هایی داشته باشد که به آنها اصول احتمال می‌گویند :

برای هر پیشامد مثل A، احتمال رخ دادن آن با $P(A)$ نمایش داده می‌شود که عددی حقیقی در بازهٔ $[0,1]$ است.

اصول احتمال عبارت‌اند از :

۱ $P(S)=1$

۲ برای هر دو پیشامد A و B که $A\cap B=\varnothing$ ، داریم $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

به خاصیتی که در بند ۲ برای دو پیشامد A و B فرض شده است، یعنی $A\cap B=\varnothing$، ناسازگاری این دو پیشامد گفته می‌شود و به این معناست که رخ دادن هر دوی آنها هم‌زمان محال است. در غیر این صورت، می‌گوییم A و B سازگارند.

قضیه

در مورد هر فضای نمونه، گزاره‌های زیر درست است :

۱ $P(A')=1-P(A)$

۲ $P(\varnothing)=0$

۳ اگر A، B و C پیشامدهایی دو به دو ناسازگار باشند، آن‌گاه

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

(این قسمت را می‌توان برای هر تعداد پیشامد نیز تعمیم داد).

۴ برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$.

1ـ Jean Baptiste le Rond d'Alembert (۱۷۱۷ـ۱۷۸۳)

۵ برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم : $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$.

اثبات.

۱ به این موضوع توجه کنید که A و A' دو پیشامد ناسازگارند و اجتماع آنها برابر S می‌شود، داریم :

$$۱=\mathrm{P}(S)=\mathrm{P}(A\cup A')=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A')$$

در نتیجه $\mathrm{P}(A')=۱-\mathrm{P}(A)$.

۲ با توجه به اینکه $\varnothing$ متمم S است داریم :

$$\mathrm{P}(\varnothing)=۱-\mathrm{P}(S)=۱-۱=۰$$

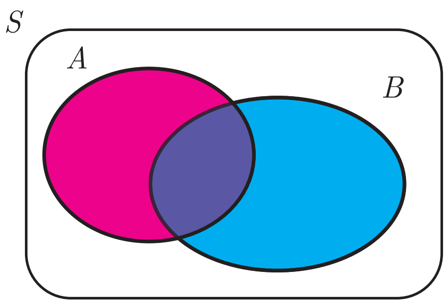
۳ توجه کنید که A و $B\cup C$ نیز دو پیشامد ناسازگارند و لذا

$$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}\big(A\cup(B\cup C)\big)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B\cup C)=\cdots$$

۴ واضح است که $A=(A-B)\cup(A\cap B)$ و پیشامدهای $A-B$ و $A\cap B$ ناسازگارند، پس

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A-B)+\mathrm{P}(A\cap B)$$

و این نتیجه می‌دهد که $\mathrm{P}(A-B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$.



۵ توجه کنید که $A\cup B=B\cup(A-B)$ و به‌علاوه دو پیشامد B و $A-B$ ناسازگارند. در نتیجه

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A-B)$$

با استفاده از شمارهٔ ۴ حکم نتیجه می‌شود. (چرا؟)

کار در کلاس

مشخص کنید که در هر قسمت دو پیشامدی که آمده است با هم سازگارند یا ناسازگار؟

۱ دانش‌آموزی که به تصادف از کلاس انتخاب می‌کنید،

A : متولد ماه مهر باشد،

B : متولد فصل تابستان باشد.

۲ سکه‌ای که سه بار پرتاب می‌کنید،

A : هر سه بار مشابه بیاید،

B : زوج بار رو بیاید.

۳ فردا

A : خورشید در آسمان دیده شود،

B : باران ببارد.

۴ تاسی را پی در پی پرتاب می‌کنید،

A : برای اوّلین بار در مرتبهٔ سوم ۶ بیاید،

B : تا پرتاب سوم دو بار ۶ بیاید.

تمرین

۱ احمد و عباس با هم یک مرتبه سنگ، کاغذ، قیچی بازی می‌کنند. فضای نمونه برای این بازی چیست؟ فضای نمونه چند عضو دارد؟ در چه تعداد از برآمدها احمد برندهٔ بازی است؟

۲ یک تیم والیبال ۱۴ عضو دارد که قد هیچ دو عضوی برابر نیست. فرض کنید آنها یکی پس از دیگری وارد سالن می‌شوند. اگر برای ما فقط ترتیب قدّ آنها اهمیت داشته باشد، فضای نمونه را توصیف کنید. اگر اعضای تیم کاملاً تصادفی وارد سالن شده باشند، احتمال اینکه اوّلین کسی که وارد می‌شود، بلند قدترین عضو تیم باشد چقدر است؟

۳ در یک ایستگاه هواشناسی، در هر لحظه وضعیت آب و هوا با پنج چیز مشخص می‌شود : دمای هوا، رطوبت هوا، سرعت باد، وضعیت هوا (صاف یا ابری) و مقدار بارش در ۲۴ ساعت گذشته. ما برای سادگی، وضعیت آب و هوا را به این شکل خلاصه می‌کنیم : آیا از نظر دما سرد یا گرم است؟ آیا از نظر رطوبت خشک یا مرطوب است؟ آیا باد می‌وزد یا نمی‌وزد؟ آیا هوا صاف، نیمه‌ابری یا ابری است؟ و آیا در ۲۴ ساعت گذشته بارندگی رخ داده است یا خیر؟ برای وضعیت هوا در یک لحظه در یک ایستگاه هواشناسی فضای نمونه را به شکل حاصل‌ضرب دکارتی چند مجموعه بنویسید. این فضا چند عضو دارد؟

۴ فقط با استفاده از اصول احتمال و قضایای اثبات‌شده، گزاره‌های زیر را ثابت کنید :

الف) اگر $B\subseteq A$ داریم : $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

ب) اگر $B\subseteq A$، آن‌گاه $P(B)\leq P(A)$.

۵ عددی به‌تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید :

الف) عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشد.

ب) عدد انتخابی بر ۲ بخش‌پذیر باشد، ولی به ۳ بخش‌پذیر نباشد.

پ) عدد انتخابی نه بر ۲ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۳.