درس ۲

انواع توابع

شما تاکنون با توابع مختلفی آشنا شده‌اید. توابع در دنیای واقعی دارای کاربردهای زیادی هستند. تابع‌های ثابت، تابع‌های همانی، تابع‌های خطی و به‌طور کلی توابع چند جمله‌ای نمونه‌هایی از توابعی هستند که در مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این درس با انواع دیگری از توابع مهم و مفید آشنا می‌شویم.

توابع گویا

هر تابع به شکل $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم، که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای هستند و چند جمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست.

توابع زیر همگی گویا هستند:

$$h(x)=\frac{\sqrt{5}x+2}{x^3+1} \qquad g(x)=\frac{\frac{1}{3}x-4}{x^2-7x+1} \qquad f(x)=\frac{5}{x+2}$$

خواندنی

توابع گویا در دنیای واقعی کاربردهای فراوانی دارند. به‌طور مثال میانگین تعداد وسایل نقلیه‌ای که در یک صف منتظر ورود به یک پارکینگ هستند از تابع گویای $f(x)=\frac{x^2}{2(1-x)}$ بدست می‌آید که در آن x شدت ترافیک و عددی بین صفر و یک است.

فرودگاه امام خمینی(ره)

کار در کلاس

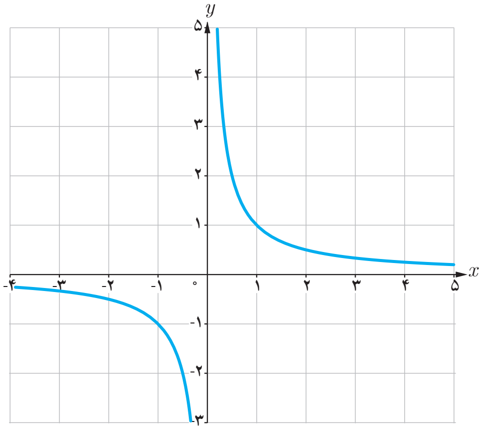
مشخص کنید که هر نمودار زیر متناظر با کدام تابع است؟ دلیل بیاورید.

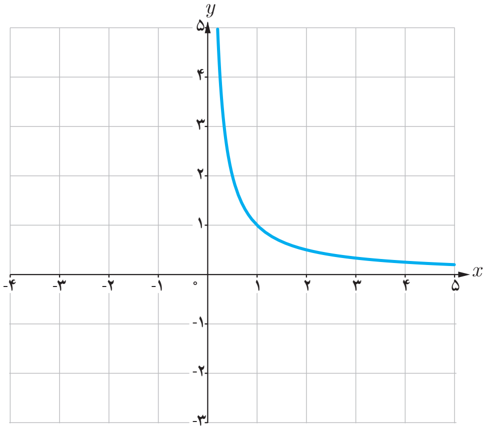
(الف) $\begin{cases} f:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \\ f(x)=\dfrac{۱}{x} \end{cases}$

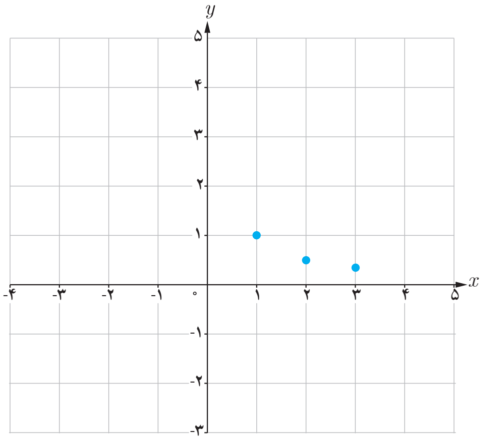
(ب) $\begin{cases} g:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R} \\ g(x)=\dfrac{۱}{x} \end{cases}$

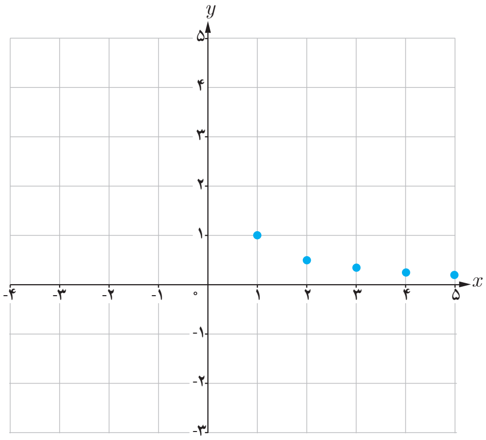
(پ) $\begin{cases} h:\{۱,۲,۳\}\to\mathbb{R} \\ h(x)=\dfrac{۱}{x} \end{cases}$

(ت) $\begin{cases} t:\mathbb{R}-\{۰\}\to\mathbb{R} \\ t(x)=\dfrac{۱}{x} \end{cases}$





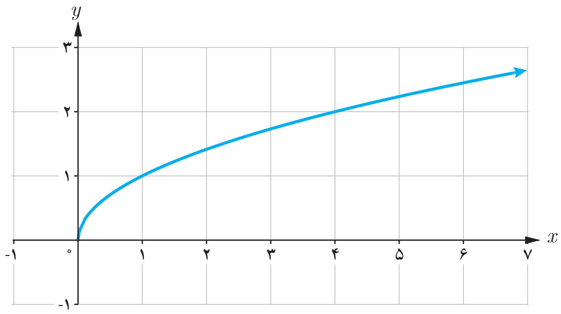




دامنه تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x}$ برابر $\mathbb{R}-\{۰\}$ است، اما ممکن است دامنه را به مجموعه‌های دیگری محدود کنیم. دامنه f را با D_f نمایش می‌دهیم. دامنه یک تابع گویا مجموعهٔ همهٔ مقادیری است که به‌ازای آنها، عبارت جبریِ گویایِ نمایش دهندهٔ ضابطهٔ تابع، تعریف‌شده باشد؛ مثلاً دامنه تابع $f(x)=\dfrac{۵}{x+۲}$ مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{-۲\}$ است.

توابع رادیکالی (تابع ریشه دوم)

تابعی را که هر عدد نامنفی را به ریشه دوم نامنفی آن نسبت می‌دهد تابع ریشه دوم می‌نامند و به‌صورت $f(x)=\sqrt{x}$ یا $y=\sqrt{x}$ نمایش می‌دهند. نمودار تابع در شکل نشان داده شده است. دامنه و برد این تابع، بازهٔ $[0,+\infty)$ است. تابع $f(x)=\sqrt{x}$ یک تابع رادیکالی است.

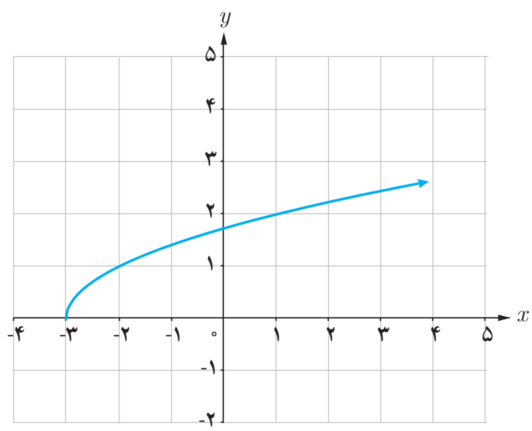


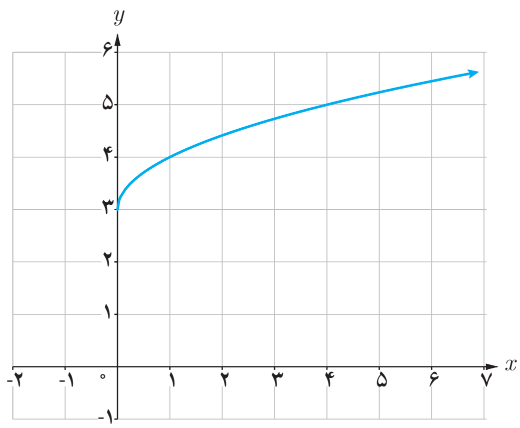
کار در کلاس

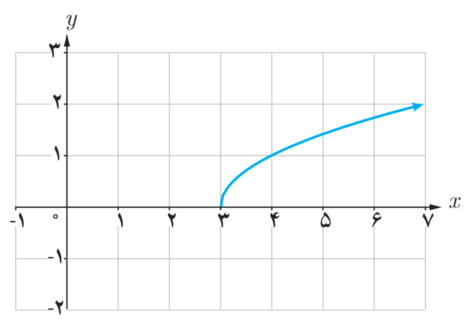
به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ نمودار چهار تابع:

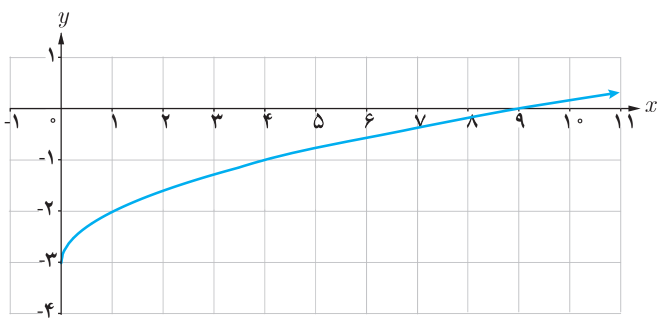
الف) $f(x)=\sqrt{x}+3$ ، ب) $h(x)=\sqrt{x}-3$ ، پ) $g(x)=\sqrt{x-3}$ ، ت) $r(x)=\sqrt{x+3}$

رسم شده‌اند. تابع مربوط به هر نمودار را مشخص و دامنه و برد آن را معلوم کنید.









مثال : دامنه تابع $f(x)=\sqrt{۳x-۵}$ برابر مجموعهٔ همه اعدادی است که برای آنها $۳x-۵\geq ۰$ و یا $x\geq \frac{۵}{۳}$

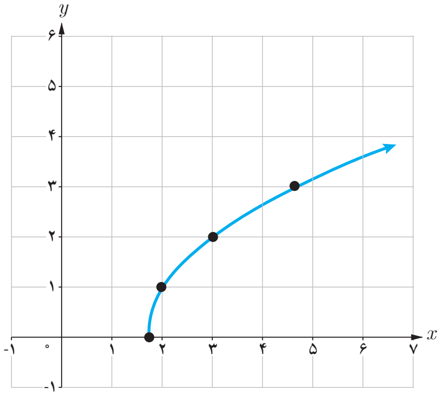
پس : $D_f=[\frac{۵}{۳},+\infty)$.

برد این تابع نیز مجموعه اعداد نامنفی است

یعنی : $R_f=[۰,+\infty)$

در جدول، مقادیر تابع f به‌ازای چند عدد در دامنه آن مشخص و نمودار تابع نیز در زیر جدول رسم شده است.

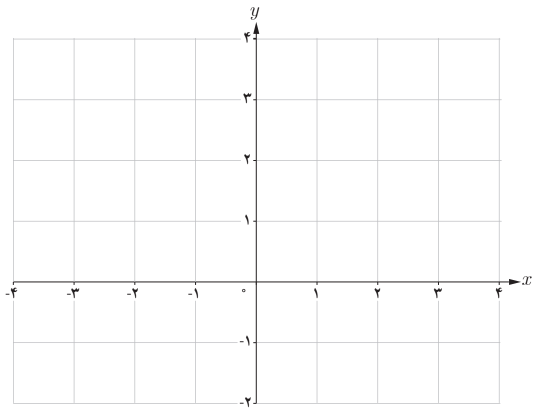
x	$\frac{۵}{۳}$	۲	۳	۴	$\frac{۱۴}{۳}$
$f(x)$	۰	۱	۲	$\sqrt{۷}$	۳

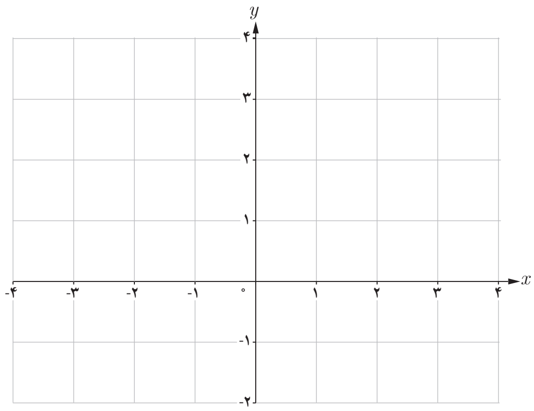


کار در کلاس

الف) دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۲x+۶}$ را به‌دست آورید. سپس به کمک نقطه‌یابی نمودار آن را رسم کرده و برد تابع را نیز معلوم کنید.

ب) نمودار تابع $g(x)=\sqrt{۲x+۶}-۲$ را به کمک انتقال رسم کنید.





فعالیت

تابع $f(x)=۷\sqrt{x}+۵۰$ قد متوسط کودکان را، به تقریب، و برحسب سانتی‌متر تا ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد. x نشان‌دهنده ماه‌های پس از تولد است. در حالت کلی دامنه این تابع رادیکالی بازهٔ $[۰,\infty)$ است ولی در این مثال که واقعی است دامنه آن بازهٔ $[۰,۶۰]$ می‌باشد.

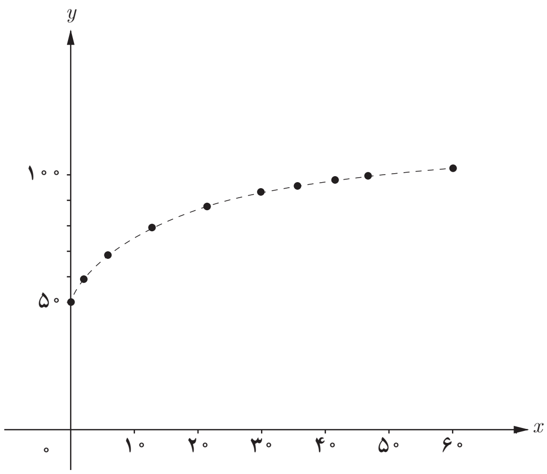
الف) جدول زیر را کامل کنید. در همین صفحه با استفاده از این جدول نمودار تقریبی f را رسم کرده‌ایم.

x	۰	۱	۴	۱۰	۱۶	۲۵	۳۰	۳۶	۴۹	۶۰
$f(x)$	۵۰			۷۲/۱		۸۵	۸۸/۳	۹۲		۱۰۴/۲

ب) برد این تابع چیست؟

پ) قد یک کودک چهار ساله تقریباً چقدر است؟

ت) با استفاده از ضابطه تابع یا نمودار آن مشخص کنید که کودکی با قد ۷۵ سانتی‌متر حدوداً چند ماهه است.



معادلات و توابع

معادلاتی که دارای دو متغیر مانند x و y هستند یک رابطه را نشان می‌دهند؛ مثلاً معادلهٔ ۲$=x+y$ شامل همه زوج‌های مرتبی است که مجموع مؤلفه‌های آنها برابر۲است. نمودار این معادله یک خط است. این معادله را به‌صورت $y=-x+۲$ یا $f(x)=-x+۲$ نیز نمایش می‌دهند. بسیاری از توابع با یک معادله بیان می‌شوند، اما الزاماً یک معادله با دو متغیر برحسب x و y یک تابع را مشخص نمی‌کند.

مثال

الف) در معادله $-x^۲+y=۴$، y را برحسب x به‌دست آورید. آیا y تابعی از x است؟

حل: داریم $y=x^۲+۴$. این معادله یک سهمی را مشخص می‌کند که همان تابع $f(x)=x^۲+۴$ است.

ب) آیا در معادله $x-y^۲=۴$، y تابعی از x است؟

حل: اگر y را برحسب x به‌دست آوریم داریم: $y=\pm\sqrt{x-۴}$ به‌ازای $x=۵$ داریم: $y=\pm۱$. یعنی نقاط (۵,۱) و (۵,۱-) روی نمودار معادله قرار دارند. بنابراین، این معادله یک تابع را نمایش نمی‌دهد.

کار در کلاس

کدام‌یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟ دلیل بیاورید.

الف) $y = |x|+1$

ب) $x = |y|+1$

تابع پله‌ای ــ تابع جزء صحیح

هزینهٔ ارسال بسته‌های پستی به‌طور معمول تابعی از وزن آنهاست. هزینهٔ توقف خودرو در یک توقفگاه (پارکینگ) نیز تابعی از زمان توقف است. در فعالیت زیر با نمونه‌ای از این توابع آشنا می‌شویم.

فعالیت

هزینه ارسال یک بستهٔ پستی به مقصدی معین در جدول زیر داده شده است.

x (وزن بسته) کیلوگرم	$0 < x \leq 2$	$2 < x \leq 5$	$5 < x \leq 10$	$10 < x \leq 12$
$f(x)$ (هزینه ارسال) برحسب هزار تومان	۵	۱۰	۱۷	۲۰

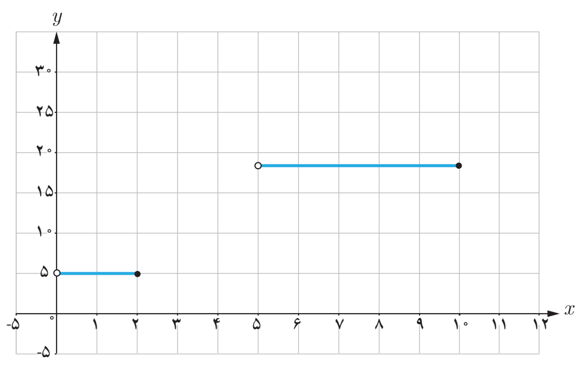
اگر حداکثر وزن بسته‌های ارسالی ۱۲ کیلوگرم باشد،

الف) ضابطهٔ تابعی را که جدول فوق نشان می‌دهد بنویسید و دامنه و برد آن را به‌دست آورید :

$$f(x) = \begin{cases} 5 & 0 < x \leq 2 \\ & \\ & \\ & \end{cases}$$

ب) برای ارسال دو بسته به وزن‌های ۹ کیلوگرم و ۱۱/۵ کیلوگرم چه هزینه‌ای باید پرداخت؟

پ) قسمتی از نمودار این تابع در شکل روبه‌رو رسم شده است. بقیه نمودار را رسم کنید.

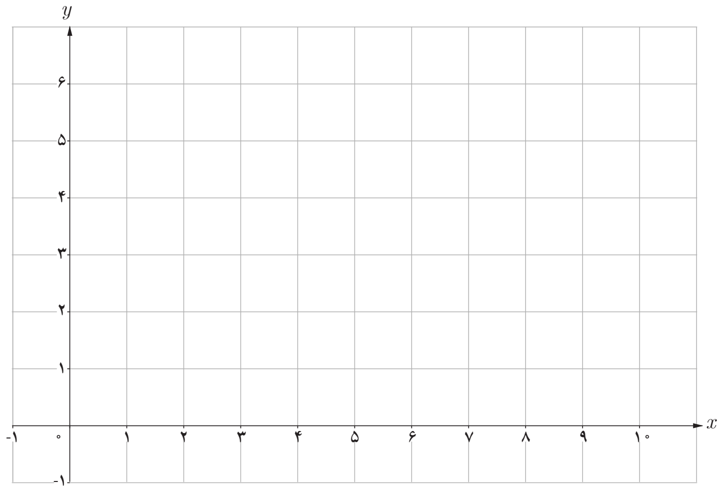


توابعی مانند تابع فوق را که بتوان دامنه آنها را به تعدادی بازه تقسیم کرد به‌گونه‌ای که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها ثابت باشد، تابع پله‌ای می‌نامند.

کار در کلاس

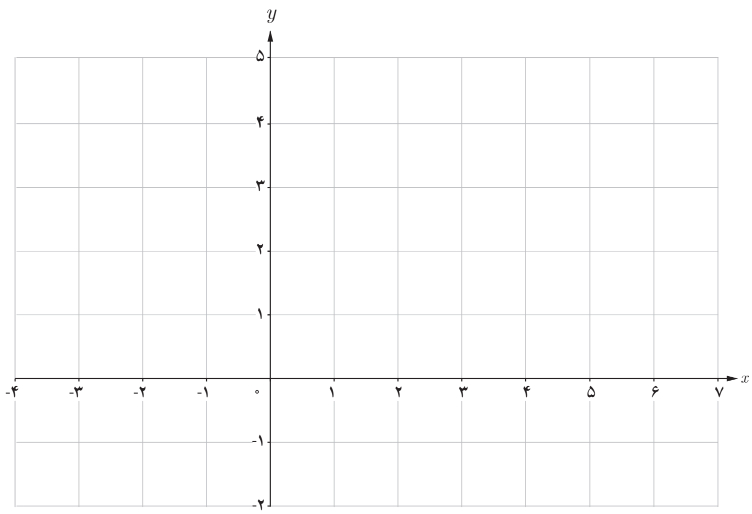
۱ توقفگاه (پارکینگ) یک مجتمع تفریحی ـ ورزشی برای چهار ساعت اول توقف یک خودرو ۳ هزار تومان و برای هر دو ساعت اضافه یا زمانی کمتر از آن ۱۰۰۰ تومان دریافت می‌کند. اگر حداکثر مدت توقف در این توقفگاه ده ساعت باشد، نمودار تابعی را که هزینه توقف را به‌ازای همه ساعات ممکن نشان دهد رسم کنید. دامنه و برد تابع را نیز مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۳ & ۰< x\le ۴ \\ & \\ & \end{cases}$$



۲ نمودار تابع پله‌ای زیر را رسم کنید:

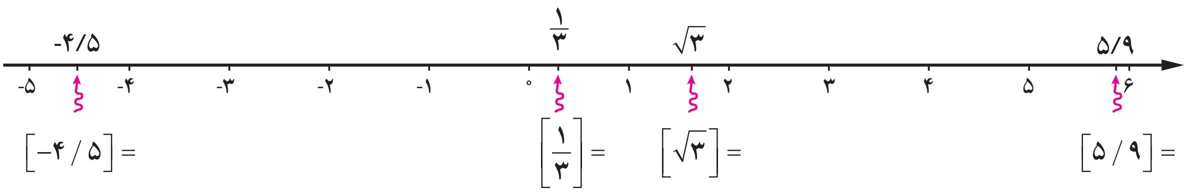
$$f(x)=\begin{cases} ۲ & -۳\le x\le -۲ \\ -۱ & -۲< x\le ۰ \\ ۴ & ۰< x\le ۴ \\ ۰ & ۴< x< ۵ \end{cases}$$



گونه خاصی از توابع پله‌ای که دارای کاربردهای زیادی نیز هست تابع جزء صحیح نام دارد. ابتدا با جزء صحیح یک عدد آشنا می‌شویم.

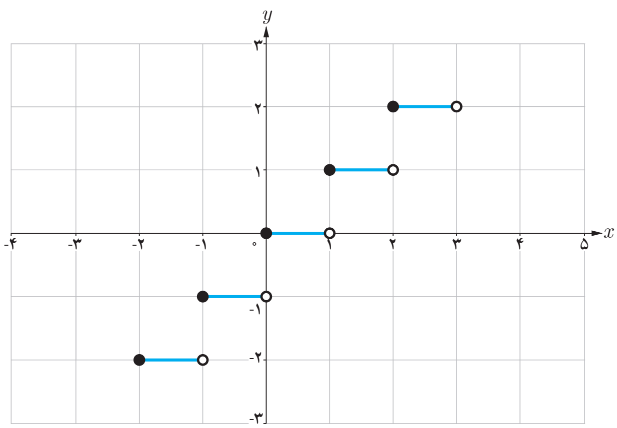
برای هر عدد حقیقی مانند x، جزء صحیح آن بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نباشد. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم، به‌طور مثال $[-۲/۸]=-۳$ و $[۳/۴۹]=۳$. مطابق با تعریف، جزء صحیح یک عدد همواره: $[x]\le x$. اگر x یک

عدد صحیح باشد x = [x]. جزء صحیح اعداد نشان داده شده روی محور را بیابید.



تابعی که به هر عدد حقیقی x، جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد تابع جزء صحیح نامیده می‌شود و آن را به صورت $f(x)=[x]$ نمایش می‌دهند. $D_f=\mathbb{R}$ و $R_f=\mathbb{Z}$. نمودار تابع با توجه به جدول در بازه $[-۲,۳)$ رسم شده است.

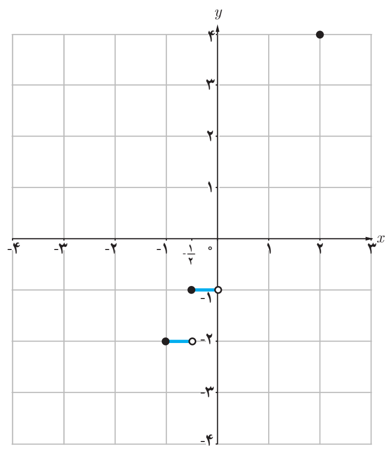
x	$y=[x]$
$-۲ \leq x < -۱$	$y=-۲$
$-۱ \leq x < ۰$	
$۰ \leq x < ۱$	
$۱ \leq x < ۲$	
$۲ \leq x < ۳$	



کار در کلاس

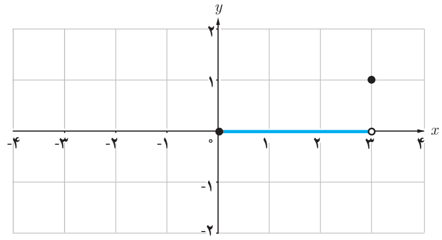
۱ نمودار تابع $f(x)=[۲x]$ را در بازهٔ $[-۱,۲]$ رسم کنید (جدول و نمودار داده شده را کامل کنید).

$$-۱ \leq x \leq ۲ \Rightarrow -۲ \leq ۲x \leq ۴$$



$۲x$	$-۲ \leq ۲x < -۱$	$-۱ \leq ۲x < ۰$			$۲ \leq ۲x < ۳$	
$[۲x]$	-۲		۰	۱		
x	$-۱ \leq x < -\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲} \leq x < ۰$				$\frac{۳}{۲} \leq x < ۲$

۲ نمودار تابع $f(x)=\left[\frac{۱}{۳}x\right]$ را در بازهٔ $[-۳\,,۳]$ رسم کنید (کامل کنید).



$$\circ\le\frac{۱}{۳}x<۱ \quad\Rightarrow\begin{cases}\left[\frac{۱}{۳}x\right]=\circ\\ \circ\le x<۳\end{cases}$$

$$-۱\le\frac{۱}{۳}x<\circ \quad\Rightarrow$$

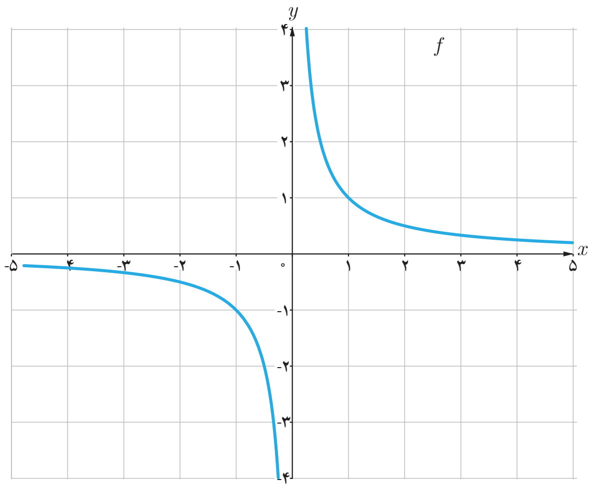
تمرین

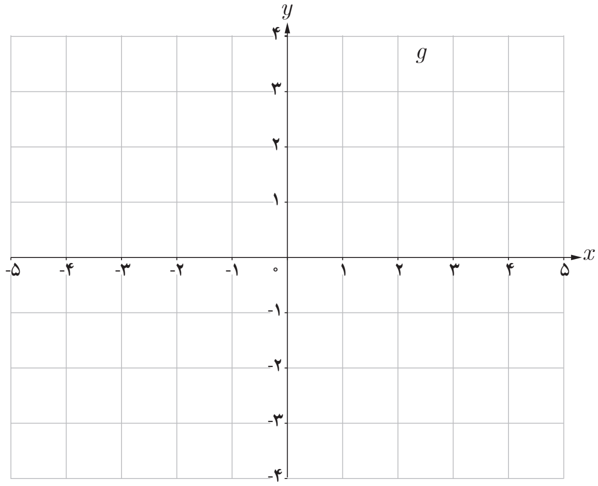
۱ دامنهٔ توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\frac{x-۱}{۲-x}$ ب) $f(x)=\frac{-۳x}{x^۲+۱}$ پ) $f(x)=\frac{۲x+۳}{x^۲+x-۱۲}$

ت) $f(x)=\sqrt{۳x+۱}$ ث) $f(x)=۲\sqrt{x}-۳$ ج) $f(x)=\sqrt{۸-x}$

۲ توضیح دهید که چگونه با استفاده از نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ می‌توان نمودار تابع $g(x)=-\frac{۱}{x}$ را رسم کرد.





۳ نمودار تابع $y=-\sqrt{x}$ را با استفاده از نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم کنید.

۴ نمودار توابع زیر را رسم نموده و دامنه و برد هر یک را معلوم کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{x} & x>۰\\ x-۲ & x\leq ۰\end{cases}$

ب) $f(x)=\sqrt{x-۲}+۵$

پ) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+۲ & x>۰\\ \sqrt{x+۲} & -۲\leq x\leq ۰\end{cases}$

ت) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{۱}{x} & x<۰\\ -\sqrt{x} & x\geq ۰\end{cases}$

۵ کدام‌یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟

الف) $۳x+۲y=۱۲$ ب) $x=۱$ پ) $y=-۲$ ت) $f(x)=\begin{cases}x+۳ & x\leq ۰\\ x-۱ & x\geq ۰\end{cases}$ ث) $y^۲=x^۲$ ج) $y=|x|$

۶ هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای، به‌وسیله تابع $f(x)=\dfrac{۲۵۵x}{۱۰۰-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است.

الف) هزینه پاک‌سازی ۵۰٪ از آلودگی این رودخانه چقدر است؟

ب) دامنه این تابع در این حالت (واقعی) را به کمک یک بازه نمایش دهید.

۷ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=[x]+۱ \quad , \quad -۲\leq x<۳$

ب) $f(x)=[\frac{۱}{۲}x] \quad , \quad -۴\leq x<۴$

۸ نمودارهای دو تابع $y=[x-۳]$ و $y=[x]-۳$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. چه رابطه‌ای بین این دو تابع وجود دارد؟

۹ اگر تعداد افرادی که،طی یک مدت معین، به‌وسیله یک نوع ویروس آلوده می‌شوند با دستور $n(t)=\dfrac{۹۵۰۰t-۲۰۰۰}{۴+t}$ به‌دست آید که در آن $t>۰$ زمان برحسب ماه است :

الف) تعداد افرادی که در انتهای ماه پنجم آلوده شده‌اند چقدر است؟

ب) پس از چند ماه تعداد افراد آلوده به ۵۵۰۰ نفر خواهد رسید؟