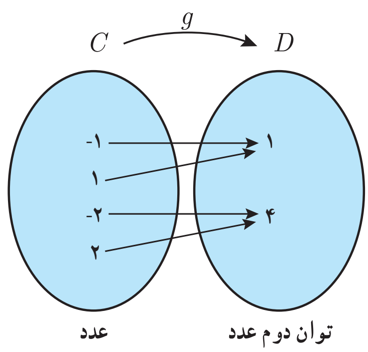
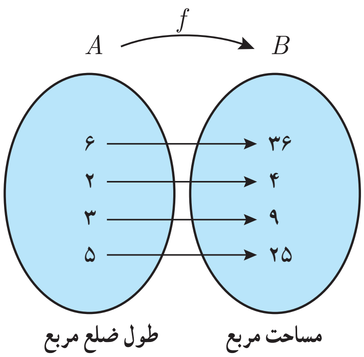
درس ۳

وارون توابع

فعالیت

دو تابع f و g را در نظر بگیرید :





الف) f و g را به‌صورت زوج‌های مرتب نمایش دهید و دامنه و برد هر یک را بنویسید.

$f=$

$g=$

$D_f=$ $\qquad\qquad$ $D_g=$

$R_f=$ $\qquad\qquad$ $R_g=$

ب) اگر جای دو مؤلفهٔ هر زوج مرتب در f و g را عوض کنیم، روابط جدیدی به‌دست می‌آید. آنها را به ترتیب h و k بنامید. h و k را وارون رابطه‌های f و g می‌نامیم. h و k را به‌صورت مجموعه زوج‌های مرتب بنویسید.

$h=$

$k=$

کدام‌یک از رابطه‌های h و k تابع است؟ دلیل بیاورید.

اگر رابطهٔ بین دو مجموعه به‌صورت زوج‌های مرتب داده شده باشد، رابطه‌ای را که از جابه‌جایی دو مؤلفه هر زوج مرتب رابطه به‌دست می‌آید وارونِ آن رابطه می‌نامیم.

اگر f یک تابع باشد واورن آن را با f^{-1} نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f^{-1}=\{(y,x)\,|\,(x,y)\in f\}$$

اگر f^{-1} تابع باشد آن‌گاه f را وارون‌پذیر (معکوس پذیر) و f^{-1} را «تابع وارون» f می‌نامیم.

توجه کنید که f^{-1} را نباید با $\frac{1}{f}$ اشتباه گرفت.

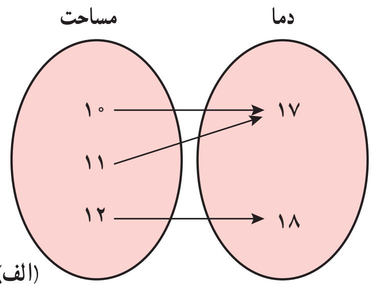
توابع یک‌به‌یک

چه توابعی وارون‌پذیرند؟ در فعالیت قبل تابع f وارون‌پذیر بود ولی تابع g وارون‌پذیر نبود. بنابراین سؤال اساسی این است که یک تابع باید چه شرطی داشته باشد تا وارون‌پذیر باشد؟

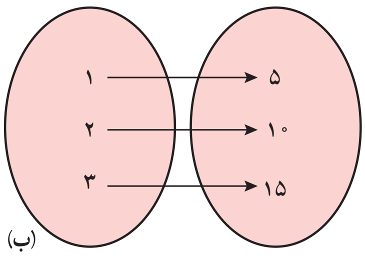
فعالیت

توابع زیر را در نظر بگیرید :

الف) کدام‌یک از آنها وارون‌پذیرند؟

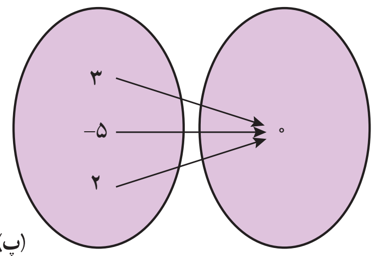


(الف)

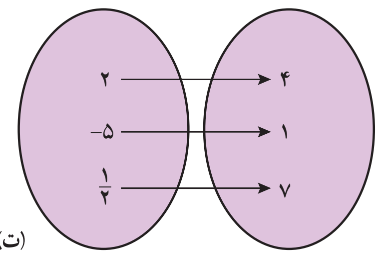


(ب)

ب) ویژگی مشترک توابع وارون‌پذیر چیست؟



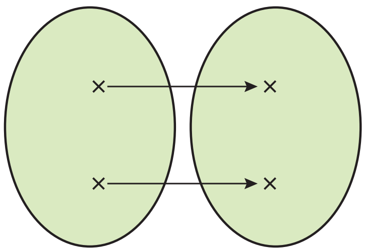
(پ)

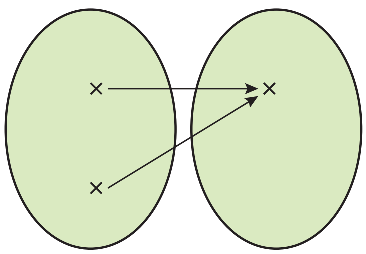


(ت)

اگر f یک تابع باشد و به هر عنصر در برد دقیقاً یک عنصر از دامنه نظیر شود تابع وارون‌پذیر است. اگر تابعی چنین ویژگی داشته باشد آن را یک به یک نامیم. به عبارت دیگر تابع f یک به یک است هرگاه هر دو عنصر متمایز در دامنه، به دو عنصر متمایز در برد نظیر شوند.

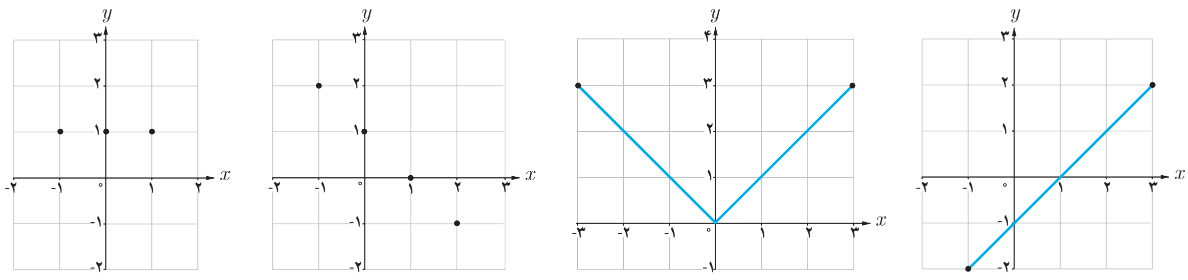
همان‌گونه که در فعالیت بالا دیده شد، اگر تابعی یک‌به‌یک باشد آن‌گاه وارون‌پذیر است.


تابع یک به یک است.


تابع یک به یک نیست.

فعالیت

توابع داده شده در (الف) و (پ) یک به یک هستند ولی توابع داده شده در (ب) و (ت) یک به یک نیستند. چرا؟ توضیح دهید.

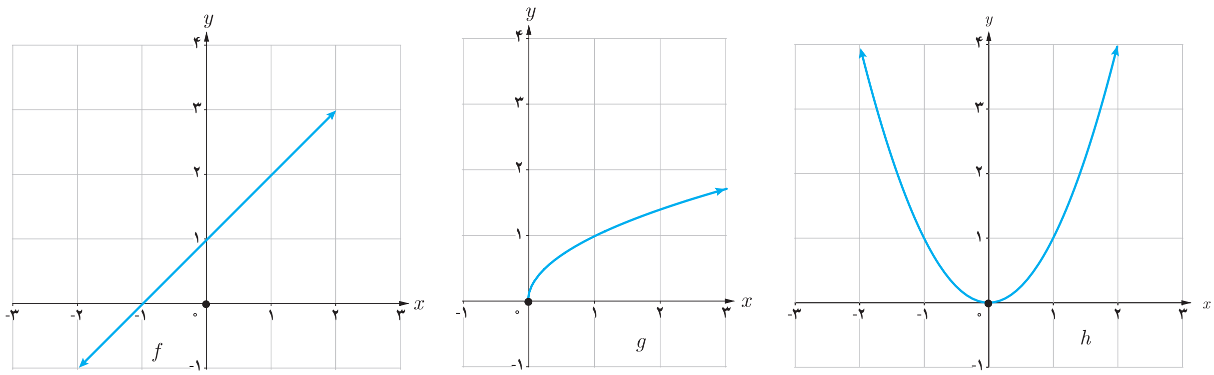


(الف) (ب) (پ) (ت)

به‌طور کلی می‌توان گفت که یک تابع در صورتی یک به یک است که هر خط موازی محور xها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

کاردرکلاس

۱ کدام‌یک از توابع زیر یک به یک هستند؟



$k = \{(۱,۲), (۳,۴), (۸,۹)\}$

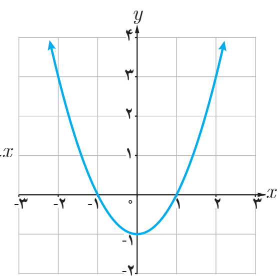
$l = \{(۳,۷), (۲,۵), (۱,۵)\}$

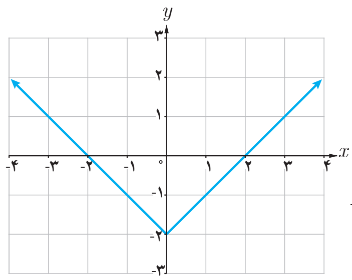
۲ فرض کنید به هر یک از اعضای یک کلاس کد ملی آنها را نسبت دهیم. توضیح دهید که چگونه رابطهٔ بین افراد و کد ملی آنها تابعی یک به یک را معلوم می‌کند.

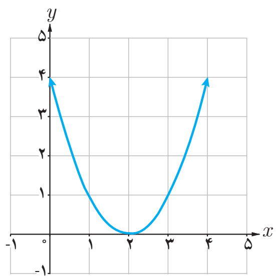
کار در کلاس

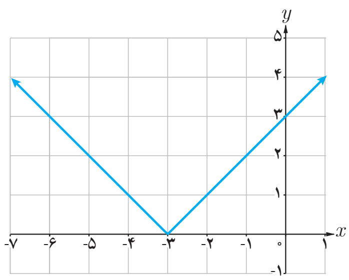
تابع‌های زیر یک به یک نیستند. چرا؟ با محدود کردن دامنه هر یک از توابع، تابعی یک به یک بسازید.

ت) $y=x^{۲}-۱$ پ) $y=|x|-۲$ ب) $y=(x-۲)^{۲}$ الف) $y=|x+۳|$



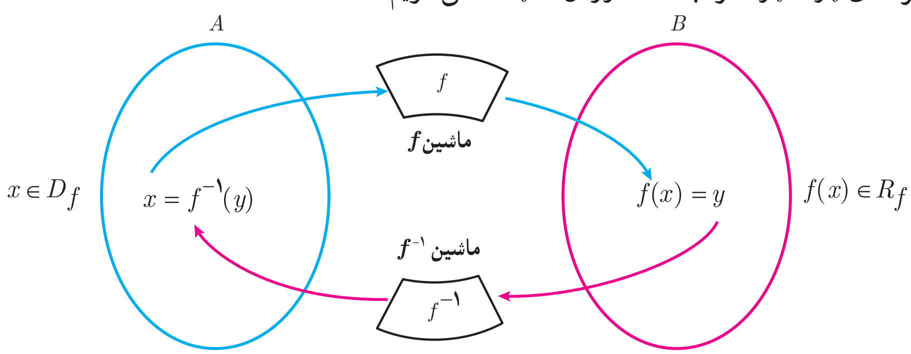






محاسبه وارون یک تابع

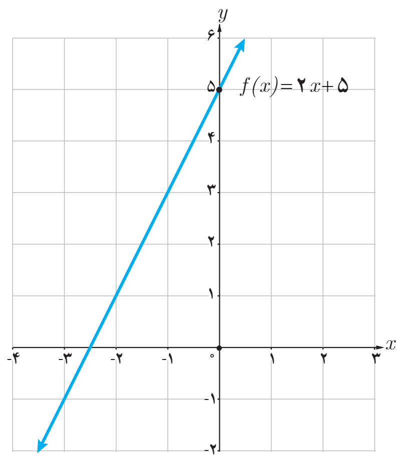
اگر f تابعی یک به یک باشد و $f^{-۱}$ تابع وارون آن باشد، نمودار زیر کارکرد f و $f^{-۱}$ را نشان می‌دهد. در فعالیت بعد به‌صورت جزئی‌تر با کارکردهای f و $f^{-۱}$ و نحوهٔ به‌دست آوردن $f^{-۱}$ آشنا می‌شویم.



فعالیت

تابع $\begin{cases} f: \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=۲x+۵ \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

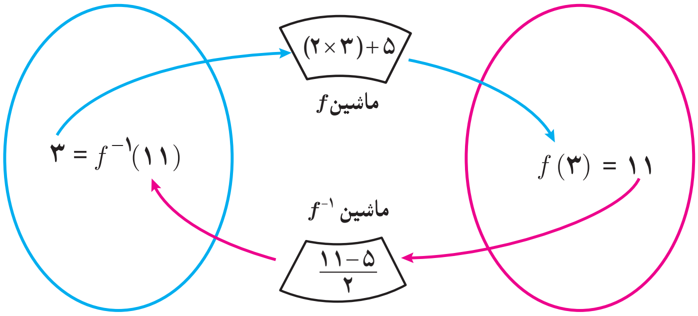
الف) به کمک نمودار f توضیح دهید که چرا f یک به یک است.



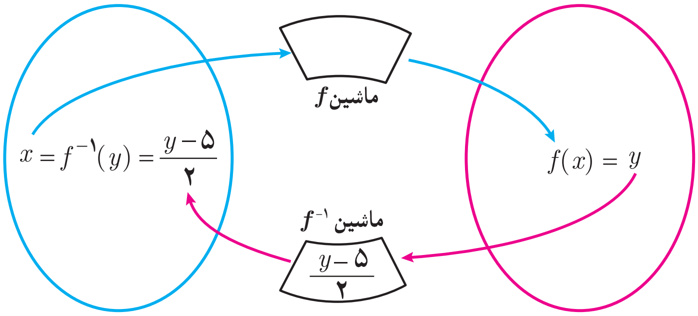
ب) نمودار روبه‌رو را توضیح دهید :

$(۳,۱۱) \in f$ و $(۱۱,۳) \in f^{-۱}$

به عبارت دیگر $f(۳) = ۱۱$ و $f^{-۱}(۱۱) = ۳$



پ) در حالت کلی برای هر عنصر $x \in D_f$، نمودار مقابل را مانند ب کامل کنید.



ت) بنابراین می‌توان نوشت :

$$f(x) = ۲x + ۵ \qquad (x \in D_f)$$

$$f^{-۱}(y) = \frac{y-۵}{۲} \qquad (y \in R_f)$$

$f^{-۱}$ را به‌صورت‌های دیگری هم می‌توانیم نمایش دهیم. یک نمایش دیگر را بنویسید :

$$\begin{cases} f^{-۱} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-۱}(y) = \frac{y-۵}{۲} \end{cases} \qquad \begin{cases} f^{-۱} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-۱}(t) = \frac{t-۵}{۲} \end{cases} \qquad \begin{cases} f^{-۱} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

آنچه که اهمیت دارد این است که دامنه $f^{-۱}$ همان برد f است. بنابراین یک نمایش مناسب برای $f^{-۱}$ به‌صورت زیر است :

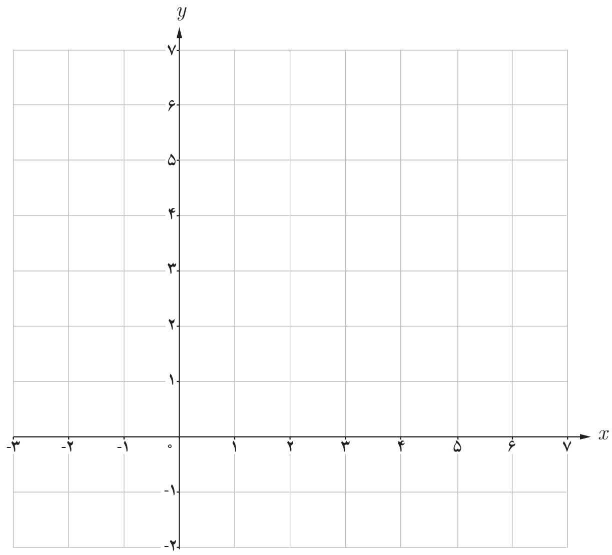
$$\begin{cases} f^{-۱} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-۱}(x) = \frac{x-۵}{۲} \end{cases}$$

برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

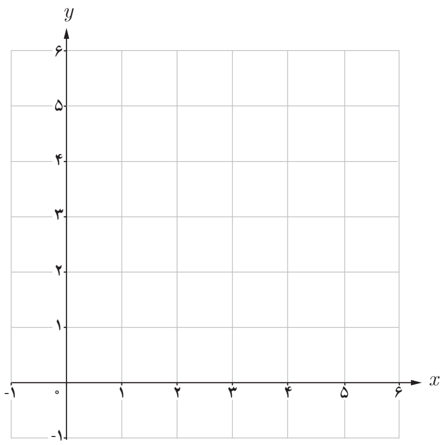
عملیات به‌دست آوردن f^{-1} را به کمک نمودارهای صفحه قبل توضیح دهید.

$$f(x) = ۲x+۵ \Rightarrow y= ۲x+۵$$
$$\Rightarrow ۲x= y-۵$$
$$\Rightarrow x= \frac{y-۵}{۲}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(y)= \frac{y-۵}{۲}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(x)= \frac{x-۵}{۲}$$

کار در کلاس



۱ با توجه به فعالیت قبل اگر داشته باشیم $f(x) = ۲x+۵$، نمودار f و $f^{-۱}$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

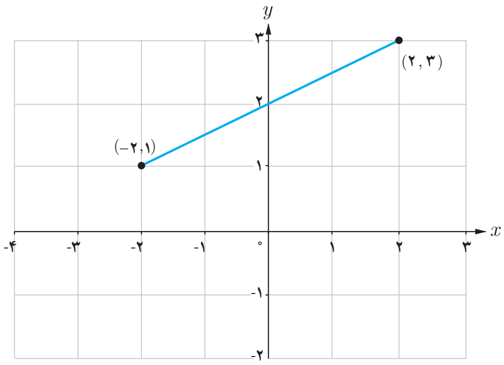


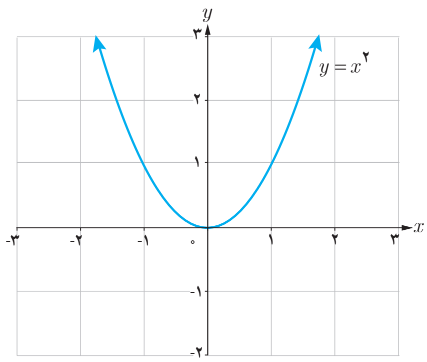
۲ اگر داشته باشیم $f(x) = \sqrt{x-۲}$ ، دامنه و برد f را به‌دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.
در معادلهٔ $y = \sqrt{x-۲}$ ضابطه $f^{-۱}$ را بنویسید. نمودار $f^{-۱}$ را رسم و دامنه و برد $f^{-۱}$ را معلوم کنید.

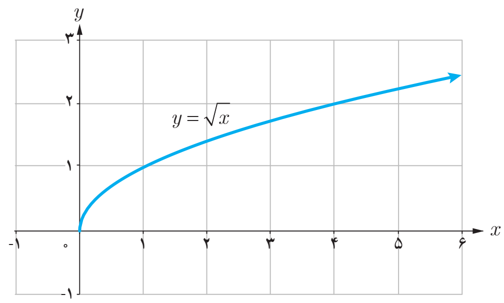
اگر f یک تابع یک به یک باشد، برای به‌دست آوردن نمودار تابع $f^{-۱}$ کافی است قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به خط $y= x$ (نیمساز ربع اول و سوم) به‌دست آوریم.

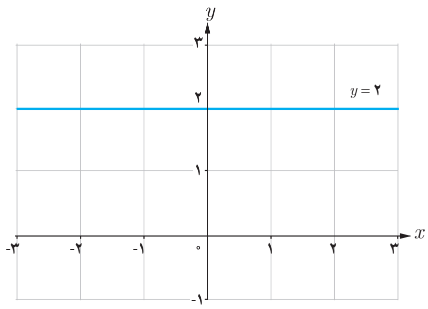
کار در کلاس

نمودار «تابع وارون» هر کدام از تابع‌های زیر را که یک به یک است در همان دستگاه مختصات رسم کنید.

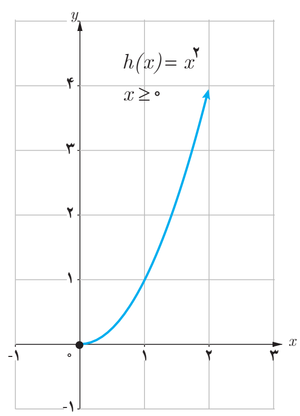




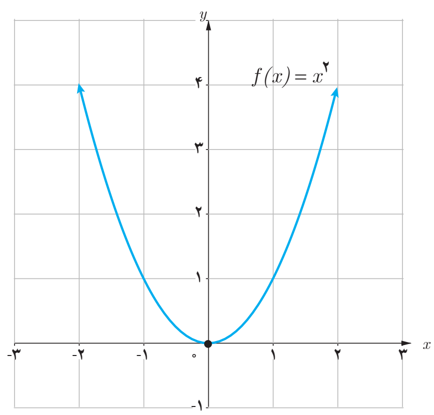




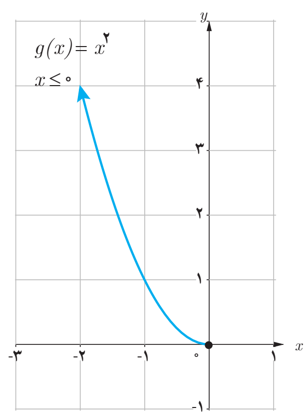
اگر تابعی یک به یک نباشد وارون‌پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنه یک تابع، می‌توان تابعی یک به یک به‌دست آورد. به‌طور مثال تابع $f(x) = x^۲$ یک به یک نیست، ولی با محدود کردن تابع به بازهٔ $[۰, \infty)$ و یا $(-\infty, ۰]$ تابعی یک به یک به‌دست می‌آید.



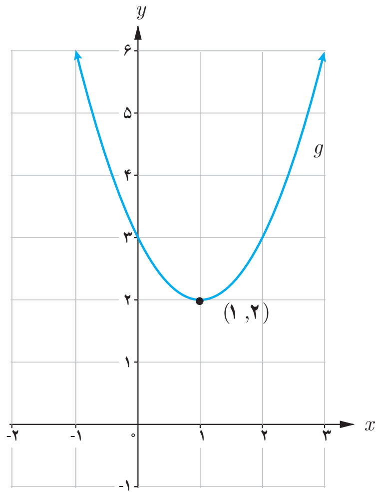
h یک به یک و وارون‌پذیر است.



f یک به یک نیست، وارون‌پذیر هم نیست.



g یک به یک و وارون‌پذیر است.



مثال : نمودار تابع $g(x)=x^{۲}-۲x+۳$ نشان می‌دهد که این تابع یک‌به‌یک نیست. به‌طور مثال $g(۲)=g(۰)$. می‌توان دامنه این تابع را محدود کرد و تابعی یک به یک به‌دست آورد و سپس وارون آن را حساب کرد.

در مورد تابع g داریم :

$$g:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad D_g=\mathbb{R} \text{ و } R_g=[۲,+\infty)$$
$$g(x)=x^{۲}-۲x+۳=(x-۱)^{۲}+۲$$

دامنه f را به بازهٔ $[۱,+\infty)$ محدود می‌کنیم و تابع جدید را f می‌نامیم.
بنابراین تابع جدید به‌صورت زیر خواهد بود که تابع یک به یک و وارون‌پذیر است.

$$\begin{cases} f:[۱,+\infty)\to\mathbb{R} \\ f(x)=(x-۱)^{۲}+۲ \end{cases} \qquad D_f=[۱,+\infty) \quad , \quad R_f=[۲,+\infty)$$

اکنون سعی می‌کنیم x را برحسب y به‌دست آوریم :

$$y=(x-۱)^{۲}+۲ \Rightarrow y-۲=(x-۱)^{۲} \Rightarrow (x-۱)^{۲}=y-۲ \Rightarrow x-۱=\pm\sqrt{y-۲}$$

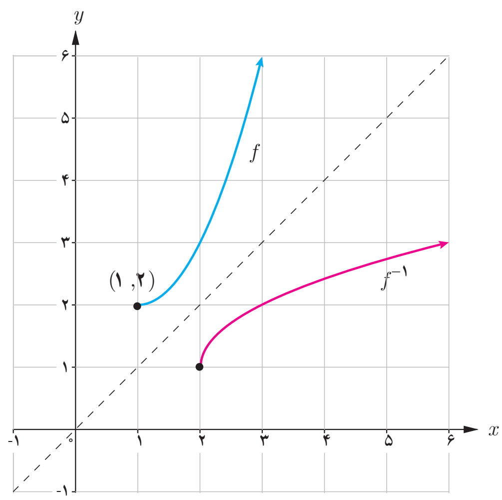
جواب منفی قابل قبول نیست (چرا؟) بنابراین :

$$x-۱=\sqrt{y-۲} \Rightarrow x=\sqrt{y-۲}+۱ \Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۲}+۱$$

در حقیقت داریم :

$$\begin{cases} f^{-۱}:[۲,\infty)\to\mathbb{R} \\ f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۲}+۱ \end{cases} \qquad D_{f^{-۱}}=[۲,+\infty) \qquad R_{f^{-۱}}=[۱,+\infty)$$

نمودار f و $f^{-۱}$ در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند.



تمرین

۱ تابعی از دنیای واقعی مثال بزنید که یک‌به‌یک نباشد.

۲ آیا تابع $f(x)=\frac{۲}{۵}$ وارون تابع $g(x)=\frac{۵}{۲}$ است؟

۳ به کمک رسم نمودار وارون‌پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون‌پذیرند، به‌دست آورید:

الف) $f(x)=(x+۵)^۲ \quad , \quad x\geq -۵$

ب) $f(x)=-|x-۱|+۱ \quad , \quad x\geq ۲$

پ) $f(x)=(x-۳)^۲$

ت) $f(x)=\sqrt{x+۲}-۳$

۴ اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h برحسب متر) بعد از t ثانیه از رابطهٔ $h(t)=۱۰۰-۵t^۲$ به‌دست می‌آید.

الف) دامنه و برد h را به‌دست آورید.

ب) چرا h تابعی یک به یک است؟

پ) تابع وارون h را به‌دست آورید.

۵ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که وارون‌پذیر نباشد و برای هر عدد حقیقی x، $x<f(x)$.

۶ وارون تابع $f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۳$ را بیابید و نمودار f و وارون آن را رسم کنید.

آبشار پیران (استان کرمانشاه)