

اعمال روی توابع

همان گونه که عمل های جمع و ضرب در مورد دو عدد یا دو چند جمله ای انجام پذیر است، برای دو تابع نیز چنین اعمالی قابل انجام است. در فعالیت زیر مثالی واقعی از این موضوع بررسی می شود.

فعالیت

فاصله زمانی لحظه ای که راننده با یک مانع روبه رو می شود تا لحظه فشار دادن پدال ترمز را «زمان عکس العمل» می نامند.



فرض کنید خودرویی با سرعت ثابت در بزرگراهی در حال حرکت است. اگر خودرو با سرعت x کیلومتر بر ساعت حرکت کند، مسافتی که در «زمان عکس العمل» طی می کند از تابع $f(x) = \frac{1}{10}x$ به دست می آید که در آن مقدار تابع بر حسب متر است. همچنین مسافتی که خودرو پس از فشار دادن پدال ترمز تا توقف کامل طی می کند از تابع $g(x) = \frac{1}{100}x^2$ به دست می آید که در آن مقدار تابع بر حسب متر است و x سرعت خودرو بر حسب کیلومتر بر ساعت است.

الف) اگر خودرویی با سرعت 100 کیلومتر بر ساعت حرکت کند، پس از دیدن مانع، تا توقف کامل چه مسافتی طی می شود؟

ب) اگر سرعت خودرو x کیلومتر بر ساعت باشد، تابعی بنویسید که مسافت طی شده توسط خودرو پس از رؤیت مانع توسط راننده و ترمز کردن را نمایش دهد. این تابع را با $h(x)$ نمایش دهید.



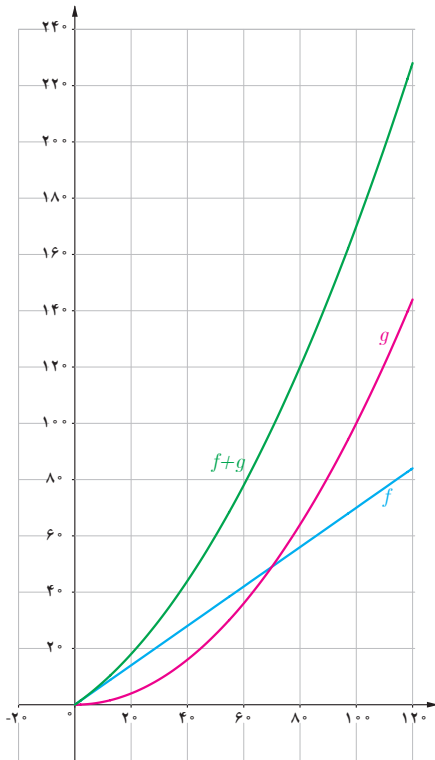
پ) اگر این خودرو پس از پیمودن 60 متر متوقف شود، با چه سرعتی در حال حرکت بوده است؟

مجموع فاصله طی شده در طول زمان عکس العمل و فاصله طی شده پس از ترمز کردن را «فاصله دید توقف» می نامند. این فاصله در طراحی جاده ها و بزرگراه ها کاربرد دارد.

۱- برای تعیین فاصله دید توقف، فاصله عکس العمل ترمز مبتنی بر زمان $2/5$ ثانیه و شتاب کاهنده $3/4$ متر بر مجذور ثانیه مورد استفاده قرار می گیرد.

اگر f و g دو تابع باشند، $f+g$ تابعی است که دامنه آن مجموعه $D_f \cap D_g$ است و به صورت زیر تعریف می شود:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad x \in D_f \cap D_g$$



در فعالیت قبل دامنه f و دامنه g در حالت کلی مجموعه \mathbb{R} است، ولی در این مسئله واقعی دامنه تابع مجموعه‌ای مانند $[0, 120]$ است. بنابراین دامنه $f+g$ نیز چنین است. نمودارهای سه تابع f ، g و $f+g$ ، فعالیت قبل، در شکل روبه‌رو رسم شده است. رابطه بین این توابع را به کمک نمودار آنها توضیح دهید.

کارد کلاس

۱ اگر $f(x) = x + 2$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ را محاسبه کنید. دامنه تابع $f+g$ را به دست آورید.

۲ اگر $f = \{(1, 2), (-2, 5), (0, 7)\}$ و $g = \{(1, 5), (2, 4), (0, -1)\}$

ابتدا دامنه $f+g$ را به دست آورید و سپس $f+g$ را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.

به طور کلی اگر f و g دو تابع باشند توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

❖ **مثال:** اگر $f(x) = \sqrt{x+2}$ و $g(x) = \sqrt{3-x}$ و $h(x) = \frac{x+2}{2x+1}$ توابع gh ، $g-h$ ، $f+g$ را محاسبه کنید و دامنه آنها را به دست آورید. کدام یک از مقادیر $(f+g)(2)$ و $(f+g)(5)$ وجود دارند؟

❖ **حل:** ابتدا دامنه هریک از توابع را به دست می آوریم:

$$D_h = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

$$D_g = (-\infty, 3]$$

$$D_f = [-2, \infty)$$

$(f+g)(2) = 3$ ولی $(f+g)(5)$ وجود ندارد.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-2, 3]$$

$$(g \cdot h)(x) = g(x)h(x) = (\sqrt{3-x})\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)$$

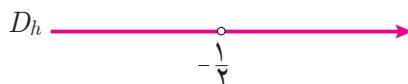
$$D_{g \cdot h} = D_g \cap D_h = (-\infty, 3] - \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

$$(g-h)(x) = g(x) - h(x) = \sqrt{3-x} - \frac{x+2}{2x+1}$$

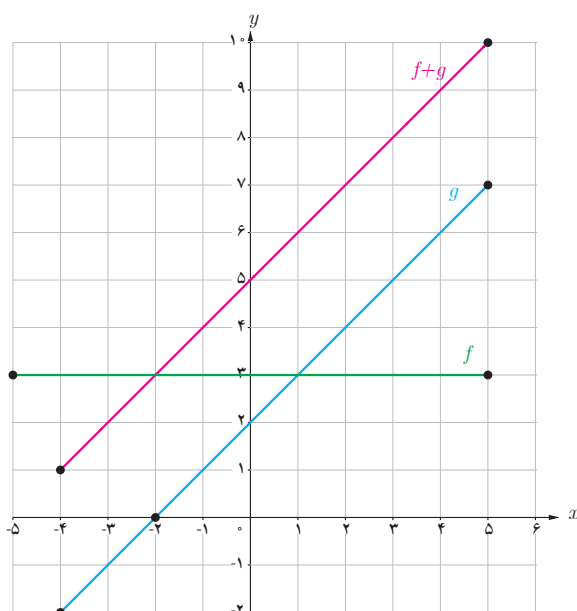
$$D_{g-h} = D_g \cap D_h = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 3]$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{3-x}}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = [-2, 3] - \{3\}$$



فعالیت



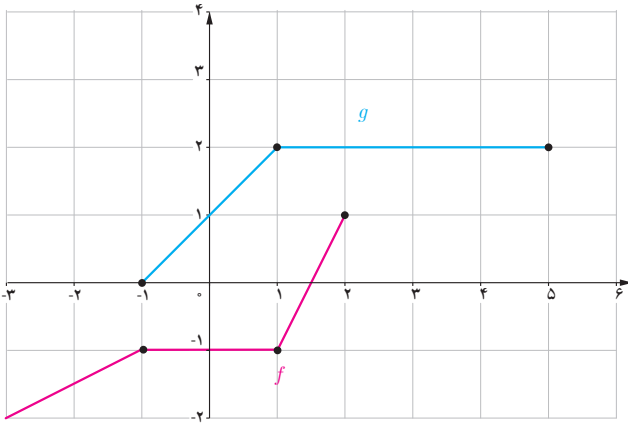
– در شکل روبه‌رو نمودارهای دو تابع f و g داده شده‌اند.

الف) دامنه f و دامنه g و ضابطه‌های f و g را بنویسید.

ب) دامنه و ضابطه توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

پ) نمودار $f+g$ در شکل رسم شده است. توضیح دهید چگونه این نمودار را رسم کرده‌ایم.

ت) توضیح دهید بقیه نمودارهای توابع داده شده در قسمت (ب) را چگونه می‌توان رسم کرد.



نمودارهای توابع f و g داده شده است.
 الف) مقادیر $(f+g)(1)$ و $(f+g)(-1)$ را به دست آورید.
 ب) با استفاده از نمودارهای f و g نمودار تابع $f+g$ را در همین شکل رسم کنید.
 پ) ضابطه توابع $f+g$ ، f و g را به دست آورید.
 ت) نمودار $f+g$ را به کمک ضابطه آن رسم کنید و با ب) مقایسه کنید.

ترکیب توابع

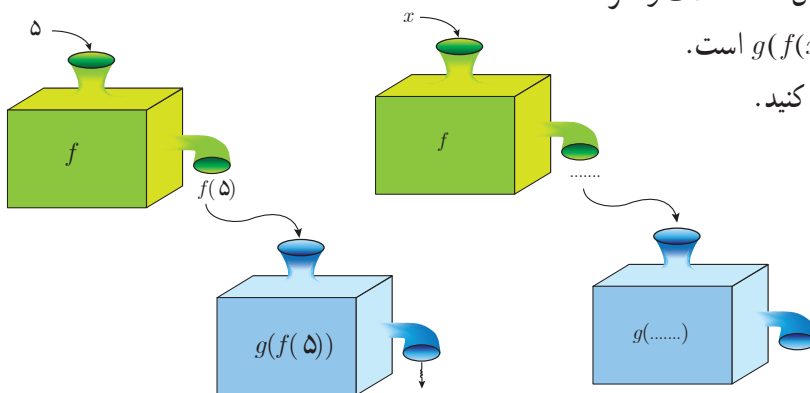
با داشتن دو تابع f و g به شیوه‌ای دیگر هم می‌توان تابع جدیدی ساخت. در فعالیت زیر با این موضوع آشنا می‌شویم.

فعالیت

تابع $f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی‌گراد تبدیل می‌کند.
 الف) $f(32) = 0$ به چه معنی است؟ 0° درجه فارنهایت چند درجه سانتی‌گراد است؟
 ب) تابع $g(x) = x + 273$ درجه سانتی‌گراد را به درجه کلون تبدیل می‌کند. $g(0) = 273$ به چه معنی است؟
 پ) مطابق نمودارهای داده شده می‌توانیم f و g را همانند دو ماشین در نظر بگیریم. یکی از ماشین‌ها فارنهایت را به سانتی‌گراد و دیگری سانتی‌گراد را به کلون تبدیل می‌کند. به کمک نمودارها نشان دهید که 5 درجه فارنهایت معادل چند درجه کلون است؟

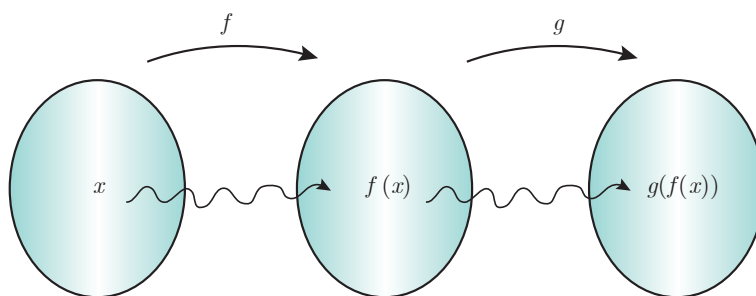
$$f(5) = \dots\dots$$

$$g(f(5)) = g(\dots)$$



ت) اگر x ورودی تابع f باشد، خروجی آن $\dots\dots$ است و اگر ورودی تابع g ، $\dots\dots$ باشد خروجی آن $g(f(x))$ است.
 ث) ت را با تکمیل نمودارهای زیر تکرار کنید.

نمودارهای صفحه قبل را به صورت زیر هم می توان نمایش داد :



اما $g(f(x))$ را چگونه می توان محاسبه کرد؟ داریم :

$$g(f(x)) = g\left(\frac{5}{9}(x - 32)\right)$$

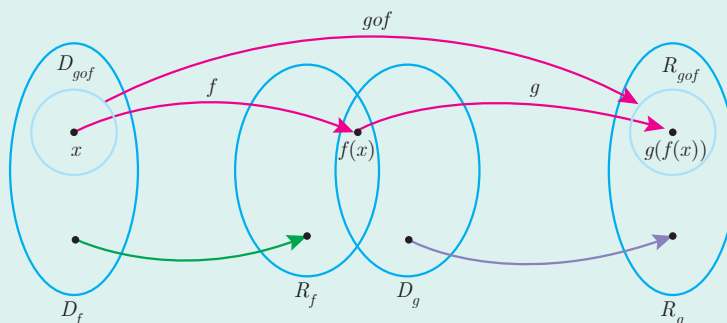
و می دانیم تابع g به هر ورودی 273 واحد اضافه می کند. پس :

$$g(f(x)) = \frac{5}{9}(x - 32) + 273$$

این یک تابع جدید است که درجه فارنهایت را به کلین تبدیل می کند و به دلیل شیوه محاسبه آن با gof (بخوانید جی او اف) نمایش داده می شود. در حقیقت gof نیز همانند ماشینی عمل می کند که ورودی x را به $g(f(x))$ تبدیل می کند.

اگر f و g دو تابع باشند ترکیب g با f را با gof نمایش می دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم: به شرط آنکه مقادیر f دامنه g قرار داشته باشند :

$$(gof)(x) = g(f(x))$$



$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

و

به طور مشابه ترکیب f با g یعنی fog را می توان تعریف کرد.

اگر $g(x) = 2x + 3$ و $f(x) = x^2 + 1$
 الف) دامنه و ضابطه تابع‌های $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.
 ب) آیا تابع‌های $f \circ g$ و $g \circ f$ مساوی‌اند؟

❀ **مثال:** اگر داشته باشیم $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = x^2 + 3$ ، دامنه و ضابطه توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.
 حل: داریم،

$$D_g = \mathbb{R} \text{ و } D_f = [1, \infty)$$

$$(f \circ g)(x) = f(x^2 + 3) = \sqrt{x^2 + 3 - 1} = \sqrt{x^2 + 2}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in [1, \infty)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3 \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq -2\} = \mathbb{R}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [1, \infty) \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = [1, \infty)$$

$$(g \circ f)(x) = g(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 + 3$$

توجه کنید که $g \circ f$ برای اعداد کمتر از ۱ تعریف نشده است. به طور مثال $(g \circ f)(\frac{1}{4})$ یا $(g \circ f)(0)$ معنی ندارد. با این شرط
 $(g \circ f)(x)$ را به صورت زیر هم می‌توان نمایش داد:

$$(g \circ f)(x) = x - 1 + 3$$

$$(g \circ f)(x) = x + 2 \quad x \in [1, \infty)$$

اگر $f = \{(11, 7), (-2, 4), (3, -5), (2, -5)\}$ و $g = \{(2, 11), (4, -2), (6, 3), (3, 2)\}$ ، ابتدا $D_{f \circ g}$ و سپس توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را محاسبه کنید.

۱ اگر $f(x) = 4x$ و $g(x) = 2 - x$ ، توابع $\frac{f}{g}$ ، $f - g$ و $f \circ g$ را به همراه دامنه آنها به دست آورید.

۲ برای دو تابع $f(x) = \frac{1}{x-3}$ و $g(x) = \frac{4}{x}$ تابع $f \circ g$ و دامنه آن را به دست آورید.

۳ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $g(4) = 7$ و $f(7) = 5$ آن گاه $(f \circ g)(4) = 35$

ب) اگر $f(x) = x + 4$ و $g(x) = 3x$ آن گاه $(\frac{f}{g})(2) = 1$

پ) اگر $g(x) = 2x - 1$ و $f(x) = \sqrt{x}$ آن گاه $(f \circ g)(5) = g(2)$

ت) برای هر دو تابع f و g داریم: $f \circ g = g \circ f$

ث) اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ، آن گاه $(f \circ g)(5) = -25$ و $(f \circ g)(x) = -x^2$

ج) برای هر دو تابع f و g داریم: $fg = gf$

۴ فرض کنیم $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ و $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ به این صورت تعریف شود: $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ که در آن:

$$g(n) = 2n$$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ توابع $f + g$ و $f \circ g$ را به دست آورید.

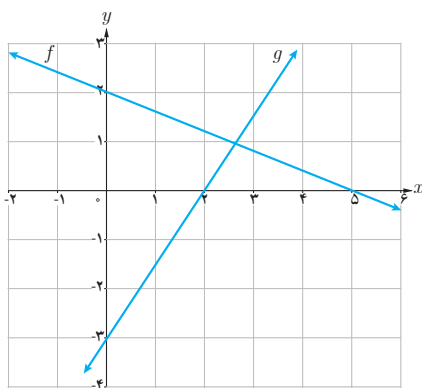
۵ اگر $f = \{(3, -5), (\frac{5}{2}, 0), (0, 5), (-1, 7), (-4, 13)\}$ و $g = \{(-4, -7), (-2, -5), (0, -3), (3, 0), (5, 2), (9, 6)\}$

توابع $f + g$ و $f - g$ را به دست آورید.

۶ اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ و $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ، دامنه و ضابطه توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.

۷ اگر $f(x) = x^2 - 9$ و $g(x) = x + 3$ ، ضابطه $\frac{f}{g}$ و دامنه آن در ادامه محاسبه شده‌اند. چه اشتباهی در محاسبه رخ داده است؟

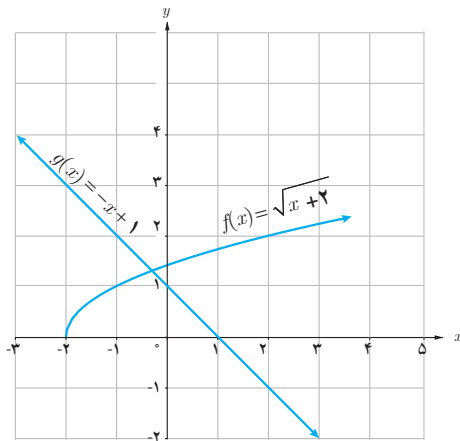
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3} = x - 3, \quad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R}$$



۸ اگر $f(x) = 2x + 5$ ، $f^{-1}(x)$ و $f \circ f^{-1}$ را به دست آورید.

۹ نمودار توابع f و g داده شده‌اند. ضابطه $f + g$ ، $f - g$ و fg را محاسبه کنید.

۱۰ با توجه به نمودار مقابل، هر کدام از عبارات‌های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.



الف) $(f+g)(2)$ ب) $(f+g)(-3)$ پ) $(fg)(\frac{1}{4})$
 ت) $(fog)(-4)$ ث) $(\frac{f}{g})(0)$ ج) $(gof)(-1)$

۱۱ نشان دهید که وارون (معکوس) هر تابع خطی به صورت $y = ax + b$ ($a \neq 0$) باز هم یک تابع خطی است.

۱۲ تابع $f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی‌گراد تبدیل می‌کند. تابعی بنویسید که درجه سانتی‌گراد را به عنوان ورودی دریافت کند و درجه فارنهایت را به عنوان خروجی تحویل دهد.

۱۳ در تصاویر زیر طرح جلد چند کتاب پرفروش در حوزه خاطرات دفاع مقدس را می‌بینید:

یکی از این کتاب‌ها در چاپ اول ۱۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ‌های دیگر ۷ هزار نسخه تولید شده است.

کتاب دیگر در چاپ اول ۲۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ‌های بعدی ۹ هزار نسخه به چاپ رسیده است.

الف) تابع‌هایی بنویسید که تعداد نسخه‌های چاپ شده هر یک از این دو کتاب را برحسب شماره چاپ نمایش دهند.

ب) تابعی بنویسید که مجموع نسخه‌های چاپ شده هر دو کتاب را نمایش دهد.

ت) نمودار هر سه تابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

