درس ۴

محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)

در این بخش، به محاسبه حد توابعی مانند $\frac{f}{g}$ می‌پردازیم که حد صورت و حد مخرج کسر در نقطه a، هر دو برابر صفر است. در این‌گونه موارد، نمی‌توانیم از قضیه حد خارج قسمت استفاده کنیم، بنابراین سعی می‌کنیم با تجزیهٔ صورت و مخرج کسر به عامل‌های مناسب، کسر را ساده نماییم. برای این امر از اتحادهای جبری و مثلثاتی استفاده می‌کنیم.[1]

مثال : مقدار $\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x-۳}$ را بیابید.

حل : با توجه به اینکه $\lim_{x\to ۳}(x-۳)=۰$ ، پس نمی‌توانیم از قضیه حد خارج قسمت استفاده کنیم. در واقع از $\frac{\lim_{x\to ۳}(x^۲-۹)}{\lim_{x\to ۳}(x-۳)}$ عبارت $\frac{0}{0}$ حاصل می‌شود. در این‌گونه موارد، سعی می‌کنیم کسر را ساده کرده و سپس حد را محاسبه نماییم :

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\cancel{(x-۳)}(x+۳)}{\cancel{(x-۳)}}=\lim_{x\to ۳}(x+۳)=۶$$

کار در کلاس

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۴x+۴}{x^۲-۴}$$

---

۱. در این کتاب، حد کسرهایی مورد بررسی قرار می‌گیرند که صورت و مخرج آنها چند جمله‌ای‌های حداکثر از درجه ۲ و عبارات رادیکالی به‌صورت $\sqrt{ax+b}$ باشند. همچنین، در عبارات شامل توابع مثلثاتی، توان تابع سینوس و کسینوس حداکثر ۲ و کمان آنها به‌صورت $x+b$ یا $۲x+b$ خواهند بود.

✤ **مثال :** مقدار $\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۸}-۳}{x-۱}$ را بیابید.

✤ **حل :** حد صورت و مخرج کسر در $x=۱$، برابر صفر می‌شود و در صورت کسر عبارت گنگ $\sqrt{x+۸}-۳$ وجود دارد. در این‌گونه موارد صورت و مخرج کسر را در یک عبارت مناسب ضرب می‌کنیم تا این عبارت گنگ، به عبارتی گویا تبدیل شود. در این مثال، صورت و مخرج کسر را در عبارت $\sqrt{x+۸}+۳$ ضرب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۸}-۳}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\left(\frac{\sqrt{x+۸}-۳}{x-۱}\times\frac{\sqrt{x+۸}+۳}{\sqrt{x+۸}+۳}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\left(\sqrt{x+۸}\right)^{۲}-(۳)^{۲}}{(x-۱)\left(\sqrt{x+۸}+۳\right)}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(x-۱)}}{\cancel{(x-۱)}\left(\sqrt{x+۸}+۳\right)}=\frac{۱}{\sqrt{۱+۸}+۳}=\frac{۱}{۶}$$

کار در کلاس

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^{۲}-۹}{\sqrt{۳x-۵}-۲}$$

✤ **مثال :**

۱) $$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{x}=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱-\cos x}{x}\times\frac{۱+\cos x}{۱+\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos^{۲}x}{x(۱+\cos x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^{۲}x}{x(۱+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{۱+\cos x}=۱\times ۰=۰$$

۲) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos ۲x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos^{۲}x-\sin^{۲}x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cancel{(\cos x-\sin x)}}{\cancel{(\cos x-\sin x)}(\cos x+\sin x)}=\frac{۱}{\cos\frac{\pi}{۴}+\sin\frac{\pi}{۴}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

کاردرکلاس

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{3x}$$

❖ **مثال :** مقدار $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ را بیابید.

❖ **حل :** قرار می‌دهیم : $t=\sqrt{1+x}$. پس اگر x به صفر نزدیک شود، t به ۱ نزدیک می‌شود و داریم $x=t^2-1$ و بنابراین،

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^2-1}=\lim_{t\to 1}\frac{\cancel{(t-1)}}{\cancel{(t-1)}(t+1)}=\frac{1}{2}$$

در مثال فوق، با تغییر متغیر مناسب، حد موردنظر را به یک حد ساده‌تر تبدیل کردیم و سپس حد جدید را محاسبه نمودیم.

❖ **مثال :** مقدار $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x-\pi}{\cos x}$ را بیابید.

❖ **حل :** قرار می‌دهیم : $t=x-\frac{\pi}{2}$. پس اگر x به $\frac{\pi}{2}$ نزدیک شود، t به صفر نزدیک می‌شود و داریم $x=t+\frac{\pi}{2}$.

پس،

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x-\pi}{\cos x}=\lim_{t\to 0}\frac{2(t+\frac{\pi}{2})-\pi}{\cos(t+\frac{\pi}{2})}=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{-\sin t}=-2\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=-2\times 1=-2$$

کاردرکلاس

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-1}{4x-\pi}$$

تمرین

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{۲x^۲+x-۱}{۳x^۲+۳x}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{x^۲[x]-۸}{x-۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{\sqrt{x+۲}-۲}{x^۲-۴}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{۲-\sqrt{x}}{۳-\sqrt{۲x+۱}}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}}{x^۲+x}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱}$

۲ اگر $f(x)=\dfrac{x+۱}{۲x^۲-x-۱}$ و $g(x)=\dfrac{۲x+۱}{x}$، حاصل $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}} f(x)g(x)$ را بیابید.

۳ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\dfrac{۱-\sin x}{\cos x}$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}}\dfrac{\cos(x+\frac{\pi}{۴})}{\cos x-\sin x}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{x^۲}{|۱-\cos x|}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۲-۲\cos ۲x}{x\sin x}$

ث) $\lim\limits_{x\to -\pi}\dfrac{\cos x+۱}{x+\pi}$

ج) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

چ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۳}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{۳})}{۶x-۲\pi}$

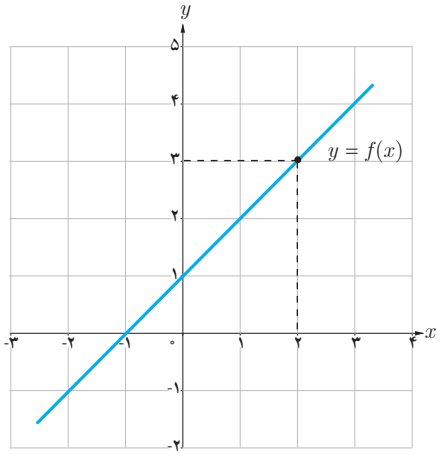
ح) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۲x-۳\sqrt{x}+۱}{x-۱}$

درس ۵

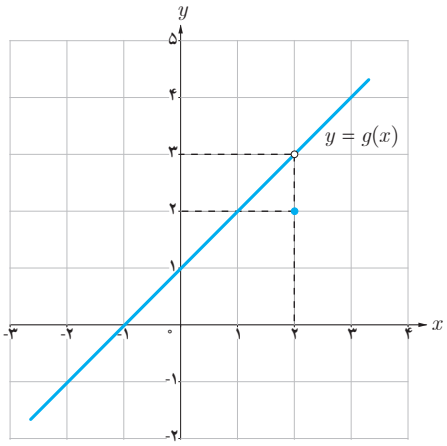
پیوستگی

فعالیت

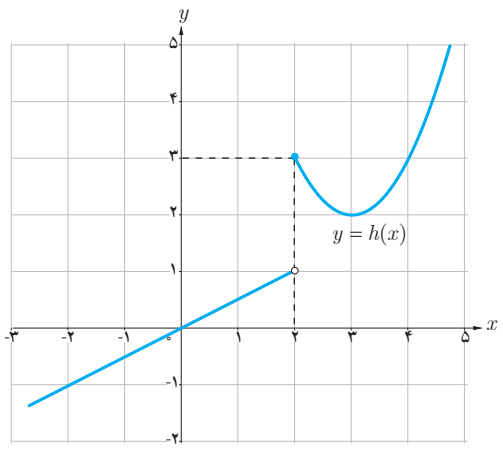
الف) با توجه به نمودارها، مقادیر زیر هر نمودار را (در صورت وجود) به دست آورید.



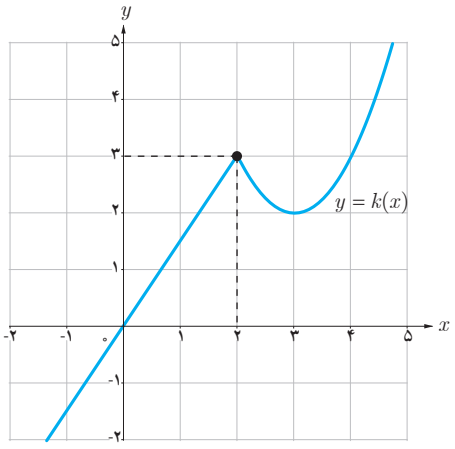
$f(۲)= \cdots$ $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = \cdots$



$g(۲)= \cdots$ $\lim\limits_{x\to ۲} g(x) = \cdots$



$h(۲)= \cdots$ $\lim\limits_{x\to ۲} h(x) = \cdots$



$k(۲)= \cdots$ $\lim\limits_{x\to ۲} k(x) = \cdots$

ب) برای کدام‌یک از توابع، حد تابع در ۲ با مقدار تابع در ۲ برابر است؟

پ) در نمودار کدام‌یک از توابع، در نقطه‌ای به طول ۲، گسستگی وجود ندارد؟

همان‌طور که در شکل‌های فوق مشاهده می‌کنید نمودار تابع f (و همچنین تابع k) در نقطه‌ای به طول ۲، هیچ گسستگی ندارد. در این حالت اصطلاحاً گوییم «تابع f (و همچنین تابع k) در نقطه $x=۲$ *پیوسته* است».

تعریف پیوستگی

گوییم تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته است هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

بنابراین، برای پیوسته بودن تابع f در نقطه a، باید شرایط زیر برقرار باشند :

الف) تابع f در a تعریف شده باشد.

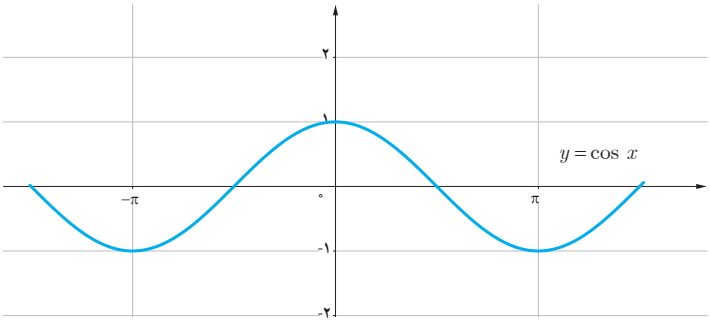
ب) حد تابع f در a موجود باشد.

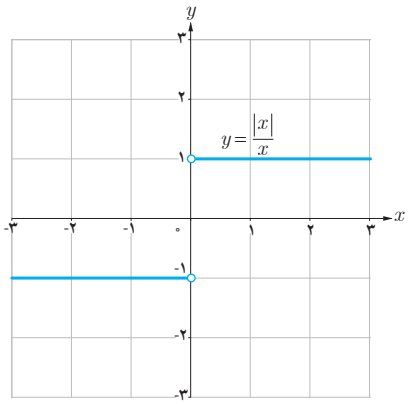
پ) مقدار حد تابع f در a با مقدار $f(a)$ برابر باشد.

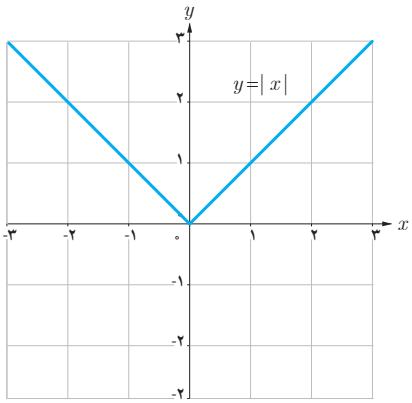
هنگامی که تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته نیست، گوییم f در $x=a$ ناپیوسته است.

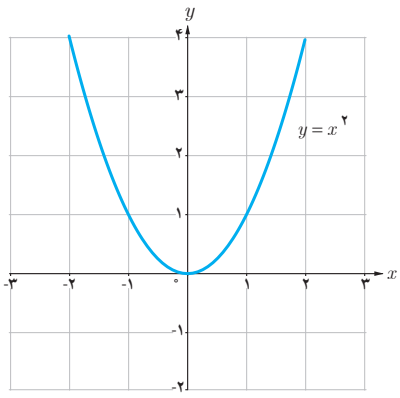
مثال : در بخش‌های قبل دیدیم که در هر نقطه a، $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$ و $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{a}$. پس توابع $y=\sin x$ و $y=\sqrt[3]{x}$ در هر عدد a، پیوسته‌اند.

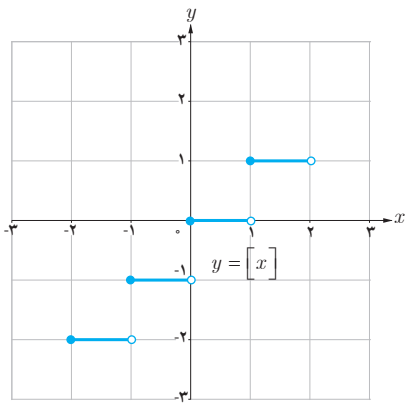
همچنین توابع $y=\cos x$ ، $y=|x|$ و $y=x^2$ و نیز چندجمله‌ای‌ها در هر عدد حقیقی a پیوسته‌اند. اما توابع $y=\frac{|x|}{x}$ و $y=[x]$ این‌چنین نیستند. این مطلب را از روی نمودار این توابع نیز می‌توان تشخیص داد.











مثال : توابع $f(x)=\frac{x^{۲}-۹}{x-۳}$ و $g(x)=\begin{cases}\frac{x^{۲}-۹}{x-۳} & x\neq ۳\\ ۶ & x=۳\end{cases}$ داده شده‌اند. درباره پیوستگی f و g در نقطه ۳ بحث کنید.

حل : از آنجایی که f در ۳ تعریف نشده است، پس تابع f در ۳ پیوسته نیست.

در مورد تابع g داریم :

$$\lim_{x\to ۳} g(x)=\lim_{x\to ۳}\frac{x^{۲}-۹}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)}{(x-۳)}=۶=g(۳)$$

پس تابع g در ۳ پیوسته است.

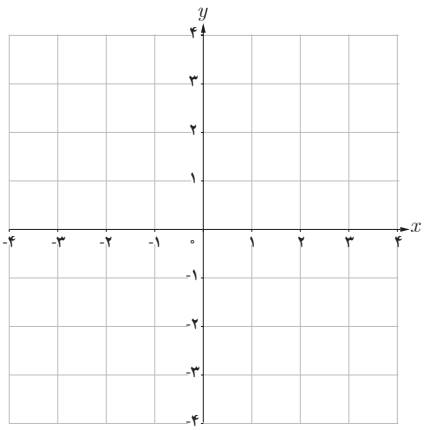
کار در کلاس

۱ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطهٔ ۳ تعریف نشده باشد اما حد تابع در $x=۳$ وجود داشته باشد. (توجه کنید که این تابع در $x=۳$ پیوسته نیست)

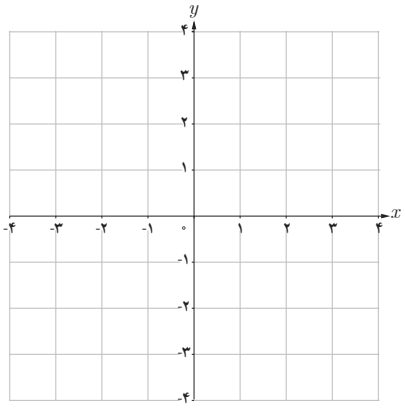
۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد و حد تابع هم در نقطه a موجود باشد اما با مقدار تابع در a برابر نباشد. (توجه کنید که این تابع در a پیوسته نیست).

۳ نمودار تابعی را رسم کنید که در هر عدد حقیقی پیوسته باشد.

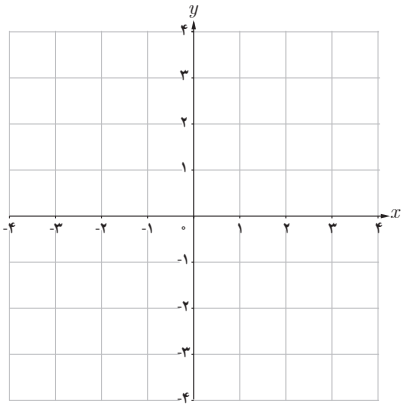
۴ نمودار تابعی را رسم کنید که همه جا پیوسته باشد به‌جز در دو نقطه.



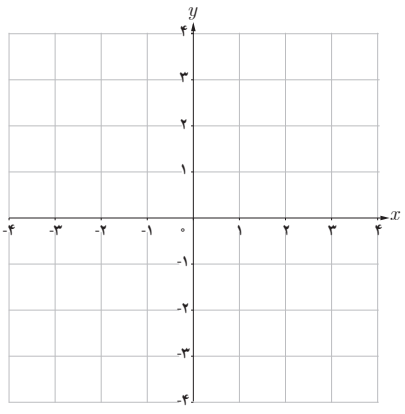
(۱)



(۲)

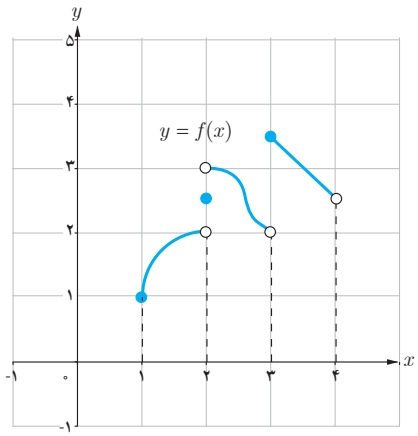


(۳)



(۴)

فعالیت



نمودار تابع f به‌صورت روبه‌رو رسم شده است.

الف) تابع f در کدام‌یک از نقاط مجموعه $\{۱,۲,۲/۵,۳,۴\}$ ناپیوسته است.

ب) آیا تساوی $\lim_{x\to ۳^+} f(x)=f(۳)$ برقرار است؟

پ) آیا تساوی $\lim_{x\to ۳^-} f(x)=f(۳)$ برقرار است؟

ت) در کدام نقطه a از مجموعه $\{۱,۲,۲/۵,۳,۴\}$ تساوی $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ برقرار است؟

تعریف

گوییم تابع f در a از راست پیوسته است (یا پیوستگی راست دارد) هرگاه : $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

گوییم تابع f در a از چپ پیوسته است (یا پیوستگی چپ دارد) هرگاه : $\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

بنابراین، هرگاه تابع f در یک همسایگی (دوطرفه) a تعریف شده باشد :

f در a پیوسته است اگر و تنها اگر f در a هم از راست و هم از چپ پیوسته باشد.

مثال : تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x^۲+x & x<۰ \\ ۲ & x=۰ \\ ۲\cos x-\sin x & x>۰ \end{cases}$ داده شده است. پیوستگی تابع f در صفر را بررسی کنید.

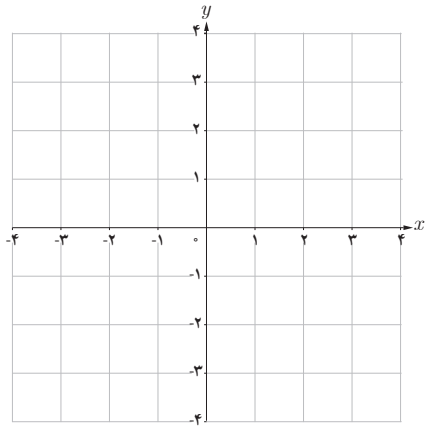
حل : داریم $f(۰)=۲$. همچنین

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}(۳x^۲+x)=۰\neq f(۰)$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}(۲\cos x-\sin x)=۲\cos(۰)-\sin(۰)=۲=f(۰)$$

بنابراین f در صفر پیوسته نیست اما در صفر پیوستگی راست دارد.

کار در کلاس



الف) با رسم نمودار تابع $f(x)=[x]$ مشخص کنید که در کدام‌یک از نقاط مجموعه $\{۲ , \frac{۱}{۲} , ۰\}$ ،

۱ تابع f پیوسته است.

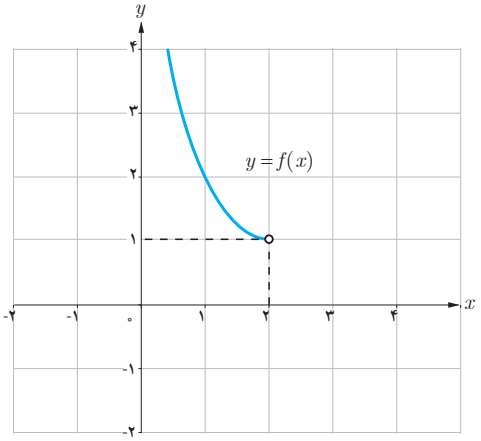
۲ تابع f پیوستگی راست دارد.

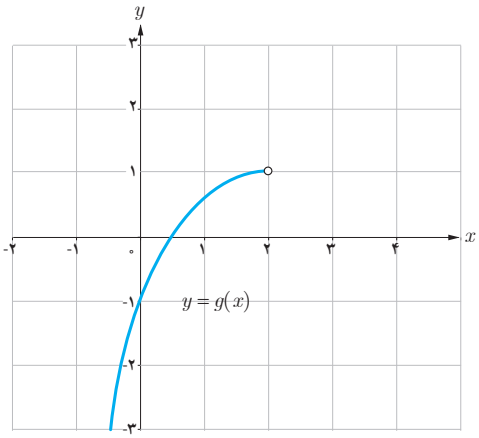
۳ تابع f پیوستگی چپ دارد.

ب) در شکل‌های زیر نمودار دو تابع f و g در طرف چپ نقطه ۲ رسم شده‌اند. در نقطه $x=۲$ و در طرف راست نقطه ۲، نمودارها را طوری تکمیل نمایید که :

۱ تابع f در نقطه ۲ پیوستگی راست داشته باشد، اما در ۲ پیوسته نباشد.

۲ تابع g در نقطه ۲ پیوسته باشد.





تعریف (پیوستگی بر بازه)

تابع f را بر بازهٔ باز (a , b) پیوسته گوییم هرگاه در هر نقطه (a , b) پیوسته باشد.

تابع f را بر بازهٔ بسته $[a , b]$ پیوسته گوییم هرگاه تابع f در هر نقطه (a , b) پیوسته باشد و در a از راست پیوسته و در b از چپ پیوسته باشد.

کار در کلاس

پیوستگی روی بازه‌های $(a\ ,\ b]$ و $[a\ ,\ b)$ را به‌طور مشابه تعریف کنید.

مثال :

۱) تابع $f(x)=\sqrt{x}$ بر بازهٔ $[۰,۲]$ پیوسته است.

۲) تابع $f(x)=[x]$ بر بازهٔ $(۰\ ,\ ۱)$ پیوسته است، اما بر بازهٔ بسته $[۰\ ,\ ۱]$ پیوسته نیست.

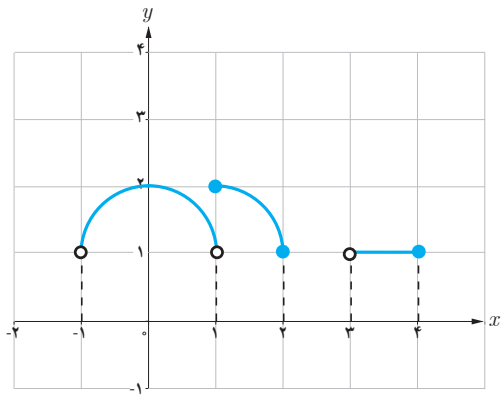
کار در کلاس

در شکل روبه‌رو نمودار تابع f رسم شده است. کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست هستند؟

الف) تابع f بر بازه $[۱\ ,\ ۲]$ پیوسته است.

ب) تابع f بر بازه $[۳\ ,\ ۴]$ پیوسته است.

پ) تابع f بر بازه $[۰\ ,\ ۲]$ پیوسته است.



نقش رستم ـ استان فارس

تمرین

۱ با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

الف) $y=|x-1|+2$

ب) $y=x-[x]$

پ) $y=[x]+[-x]$

ت) $y=\begin{cases} x(x-1) & x\le 1 \\ -x+2 & x>1 \end{cases}$

۲ در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطه $x=1$ پیوسته باشد.

الف) $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x<1 \\ a & x=1 \\ -x+2 & x>1 \end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} & x\neq 1 \\ a & x=1 \end{cases}$

پ) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & 0<x<1 \\ [x]+a & x\ge 1 \end{cases}$

ت) $k(x)=([x]-a)[x]$

۳ نشان دهید به ازای هیچ مقداری برای a، توابع زیر در $x=0$ پیوسته نیستند.

الف) $f(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ a & x=0 \\ 2x+1 & x>0 \end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{|x|} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$

۴ الف) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.

ب) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در دو نقطه ۲ و ۳ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.

پ) ضابطه یک تابع f را بنویسید طوری که فقط در دو نقطه ناپیوسته باشد.

۵ تابع $f(x)=[x]$ در بازه $(2,k)$ پیوسته است. حداکثر مقدار k چقدر است؟

۶ بازهٔ بسته‌ای را ارائه کنید که تابع $f(x)=2-\sqrt{3-x}$ بر آن بازه پیوسته باشد.

۷ مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & x>0 \\ b-1 & x=0 \\ x-2a & x<0 \end{cases}$ در $x=0$ پیوسته باشد.

منابع

۱ استوارت، جیمز، (۲۰۰۲)، حسابگان عام، دیفرانسیل و انتگرال، ترجمهٔ محمدحسین علامت ساز و علی اکبر محمدی حسن آبادی، چاپ اول، تهران، انتشارات آبیژ، ۱۳۹۸.

۲ استوارت، جیمز، (۲۰۱۲)، حساب دیفرانسیل و انتگرال، ترجمهٔ ارشک حمیدی، جلد اول، تهران، انتشارات فاطمی، ۱۳۹۵.

۳ اصلاح‌پذیر، بهمن؛ بروجردیان، ناصر؛ ریحانی، ابراهیم؛ طاهری تنجانی، محمدتقی؛ عالمیان، وحید، حسابان (کد کتاب ۲۵۸/۱). تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش،۱۳۹۵.

۴ ایرانمنش، علی؛ جمالی، محسن؛ ربیعی، حمیدرضا؛ریحانی، ابراهیم؛ شاهورانی، احمد و عالمیان، وحید، ریاضیات ۲ (کد کتاب ۲۳۴/۲). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش،۱۳۹۴.

۵ ایوز، هاوارد و، (۱۹۸۳). آشنایی با تاریخ ریاضیات، ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل، تهران : مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸.

۶ تورنس، نلسون. (۲۰۰۳)، ریاضیات در عمل، ترجمهٔ فاطمه معصومه راعی، تهران : کانون فرهنگی آموزش، ۱۳۸۴.

۷ سافیر، فرد، (۲۰۰۲). ریاضیات سری شومز جلد۱. ترجمهٔ محمد مازوچی، تهران : کانون فرهنگی آموزش،۱۳۸۴.

۸ سیلورمن، ریچارد، (۱۹۶۹)، حساب دیفرانسیل و انتگرال، ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده، جلد اول، تهران انتشارات علمی و فنی،۱۳۹۰.

۹ Adams, R.A. Essex, C.(2010) Calculus: A Complete Course. Toronto. Onario: Pearson Education, Inc.

۱۰ Barnett, R. Ziegler, M. Byleen, K. and Sobecki, D. (2008). College Algebra with Trigonometry (8th Edition). Mc Graw – Hill Education.

۱۱ Beecher, J.A. Penna, J.A. & Bittinger, M.L. (2012). Precalculus. A Right Triangle Approach (4th Edition). Boston, MA. Pearson Education, Inc.

۱۲ Crauder, B. Evans, B. & Noell, A. (2008). Functions and change, a modeling approach to college algebra and trigonometry. Boston. AM. Houghton Mifflin.

۱۳ Hungerford, T. W. Shaw, D. J. (2008). Contemporary Precalculus: A Graphing approach.(5th Edition). Belmont, CA. Thomson Brooks/Cole.

۱۴ Larson, R. Hostetler, R.P. Edwards, B.H. (2004). College algebra. a graphing approach. New Jersey. Brooks Cole.

۱۵ Rockswold, K. (2011) Essentials of College Algebra with Modeling and Visualization (4th Edition) Boston, MA. Pearson Education, Inc.

۱۶ Sullivan, M. (2008). Algebra and Trigonometry. New Jersey. Pearson Education. Inc.

۱۷ Sullivan, M. (2012). Precalculus (9th Edition). Boston, MA. Pearson Education, Inc.

۱۸ Sullivan, M. Sullivan III, M. (2015). Precalculus Concepts Through Functions, A Unit Circle Approach to Trigonometry (3th Edition). Upper Saddle River, New Jersey. Pearson Education, Inc

۱۹ Swokowski, E.W. Cole, J. A. (2009). Cole–algebra and Trigonometry with Analytic Geometry, Classic 12th Edition. New Jersey. Brooks Cole.

۲۰ Swokowski, E.W.Cole, J.A. (2012).Precalculus, functions and graphs. Belmont, CA.Cengage Learning.

اسامی دبیران و هنرآموزان شرکت‌کننده در اعتبارسنجی کتاب حسابان(۱) ــ کد ۱۱۱۲۱۴

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایفای نقش خطیر خود در اجرای سند تحول بنیادین در آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، مشارکت معلمان را به‌عنوان یک سیاست اجرایی مهم دنبال می‌کند. برای تحقق این امر در اقدامی نوآورانه سامانه تعاملی بر خط اعتبارسنجی کتاب‌های درسی راه‌اندازی شد تا با دریافت نظرات معلمان دربارهٔ کتاب‌های درسی نونگاشت، کتاب‌های درسی را در اولین سال چاپ، با کمترین اشکال به دانش‌آموزان و معلمان ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب این فرایند، همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پرورشی استان‌ها، گروه‌های آموزشی و دبیرخانهٔ راهبری دروس و مدیریت محترم پروژه آقای محسن باهو نقش سازنده‌ای را بر عهده داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش تمامی این همکاران، اسامی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائهٔ نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌شود.

ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت	ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت
۱	فرزانه نوروزی	شهرتهران	۲۰	رحیمه قربانیان	آذربایجان شرقی
۲	خلیل تیموری	ایلام	۲۱	منصور قاسم زاده باریکی	مازندران
۳	کامران کبیری	چهارمحال وبختیاری	۲۲	مهری میرفخار	قزوین
۴	زهره رشیدیان	مرکزی	۲۳	رامین میرنجمی	آذربایجان غربی
۵	علی همتی دهکردی	چهارمحال وبختیاری	۲۴	فیروزه شاهین شالکوهی	گیلان
۶	فاطمه رحیمی	شهرستانهای تهران	۲۵	محمدعلی تیموری ماسوله	گلستان
۷	سکینه حبیبی	لرستان	۲۶	زهره ایراندوست	کرمان
۸	محسن امیری بیدشکی	کرمان	۲۷	اسدالله لطفی زاده	ایلام
۹	محمود مهاجر وطن	گلستان	۲۸	طیبه دهقانی	هرمزگان
۱۰	عارف درآیش	هرمزگان	۲۹	مجتبی بیات	همدان
۱۱	محمد طالبی	خراسان رضوی	۳۰	محمد نصیری زارع	زنجان
۱۲	جمال نوین	یزد	۳۱	مهدی مفیدی احمدی	زنجان
۱۳	هما ترحمی	سمنان	۳۲	حسن کریمی نژاد	قزوین
۱۴	جواد کاوانلویی	خراسان شمالی	۳۳	رضا علیوند	اردبیل
۱۵	صدیقه باهنر	خراسان جنوبی	۳۴	کاظم صباغی	آذربایجان شرقی
۱۶	سمیه قلی زاده	کرمانشاه	۳۵	محمد حسن محمدی	شهرستانهای تهران
۱۷	جواد باهنر	خراسان جنوبی	۳۶	فرخ حسن زاده	کهگیلویه وبویراحمد
۱۸	مهدی نورانی	فارس	۳۷	لیلا حسین پور	بوشهر
۱۹	لیلا مقصدی	مازندران			