

# ۳

فصل سوم

## روابط طولی در مثلث



عکس: فرهاد گوی‌وند

■ محاسبه فاصله‌های غیرقابل دسترس یکی از مهم‌ترین کاربردهای روابط طولی در هندسه است. از جمله آنها محاسبه ارتفاع کوه‌های بلند است. رشته‌کوه اشترانکوه که ارتفاع آن در برخی نقاط به بیش از ۴۰۰۰ متر می‌رسد در استان لرستان واقع است.



تئودولیت (زاویه‌یاب) یکی از ابزارهای لازم برای این‌گونه محاسبات عملی است.

## قضیه سینوس ها

## یادآوری

منظور از روابط طولی، رابطه‌هایی است که در مورد اندازه‌های پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها در شکل‌های مختلف، بحث می‌کند. در سال گذشته روابط طولی زیر را در مثلث قائم‌الزاویه دیدیم:

$$AB^2 = BC \cdot BH \quad 1$$

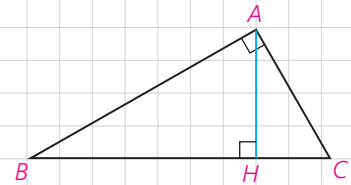
$$AC^2 = BC \cdot CH \quad 2$$

$$AH^2 = BH \cdot CH \quad 3$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad 4$$

$$AB \cdot AC = BC \cdot AH \quad 5$$

اینک به ادامه بحث در مثلث‌های دلخواه می‌پردازیم.



## ۱ فعالیت

در کتاب ریاضی ۱ (پایه دهم) با تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه آشنا شدید. با توجه به تعریف سینوس زاویه در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ، جاهای خالی را پر کنید:

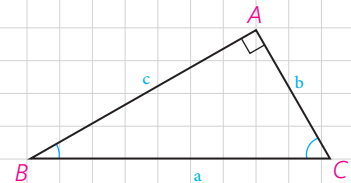
$$\sin B = \frac{\dots}{\dots} \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = \dots$$

$$\sin C = \frac{\dots}{\dots} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = \dots$$

$$\sin A = \sin 90^\circ = \dots \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \dots$$

بنابراین داریم:

در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازه هر ..... به ..... برابر است با اندازه .....  
.....



## ۲ فعالیت

در کتاب هندسه ۱ دیدیم که عمود منصف‌های اضلاع هر مثلث در یک نقطه هم‌رس‌اند و در این کتاب دیدیم که این نقطه، مرکز دایره محیطی مثلث است. دایره محیطی مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  را رسم می‌کنیم. مرکز این دایره، کجاست و چرا قطر آن با وتر مثلث برابر است؟

با توجه به نتیجه فعالیت (۱) می‌توانیم بگوییم:

در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه‌رو به آن ضلع برابر است با اندازه ..... دایره محیطی مثلث.

اکنون نشان می‌دهیم این نتیجه‌گیری برای هر مثلث دلخواه نیز درست است.

## ۳ فعالیت

مثلث دلخواه  $ABC$  ( $\hat{A} < 90^\circ$ ) و دایره محیطی آن به مرکز  $O$  را در نظر می‌گیریم. قطر  $BD$  را رسم، و  $D$  را به  $A$  وصل می‌کنیم.

۱- زوایای  $\hat{C}$  و  $\hat{D}$  چرا با هم برابرند؟

اندازه آنها برابر است با نصف ..... .

۲- چرا مثلث  $ABD$  در رأس  $A$  قائم‌الزاویه است؟

۳- با توجه به دو قسمت قبل، داریم:

$$\sin C = \sin D \text{ و } \sin D = \frac{\dots}{\dots} \Rightarrow \sin C = \frac{\dots}{2R} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = 2R$$

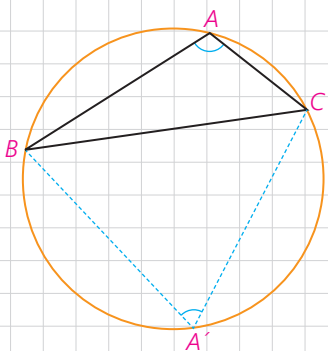
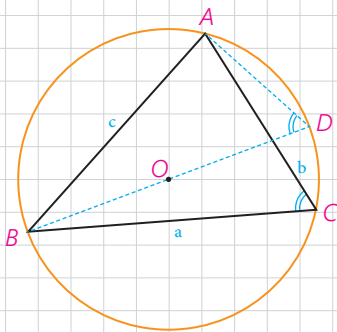
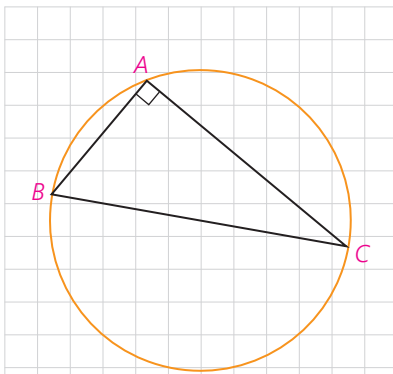
۴- به‌طور مشابه خواهیم داشت:

$$\frac{a}{\sin A} = \dots, \quad \frac{b}{\sin B} = \dots$$

۵- حال مثلث  $ABC$  ( $\hat{A} > 90^\circ$ ) را در نظر بگیرید. نقطه دلخواه  $A'$  روی کمان

$BC$  را به  $B$  و  $C$  وصل می‌کنیم. زوایای  $\hat{A}$  و  $\hat{A}'$  نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

$\hat{A} + \hat{A}' = \dots$  بنابراین  $\hat{A}'$  زاویه‌ای حاده است.



با توجه به آنچه از مثلثات می‌دانید، جاهای خالی را پر کنید :

$$\sin A = \sin(\dots - A') = \dots$$

در مثلث  $A'BC$ ، طبق نتیجه قسمت (۳) می‌توانیم بنویسیم :

$$\frac{a}{\sin A'} = \dots \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \dots$$

### نتیجه

در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازه هر ..... به ..... زاویه روبرو به آن برابر است با .....

**قضیه سینوس‌ها:** در مثلث  $ABC$  با اضلاع  $BC=a$ ،  $AC=b$  و  $AB=c$  داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} =$$

که  $R$  شعاع دایره محیطی مثلث است.

**مثال ۱:** در مثلث  $ABC$ ،  $BC=10\text{ cm}$  و  $\hat{A}=12^\circ$  و  $AC = \frac{10\sqrt{6}}{3}$  مقدار شعاع دایره محیطی مثلث و اندازه زوایای  $\hat{B}$  و  $\hat{C}$  را به دست آورید.

**حل:** به کمک قضیه سینوس‌ها می‌توان نوشت :

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{10}{\sin 12^\circ} = 2R \text{ و } \sin 12^\circ = \sin(18^\circ - 6^\circ) = \sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

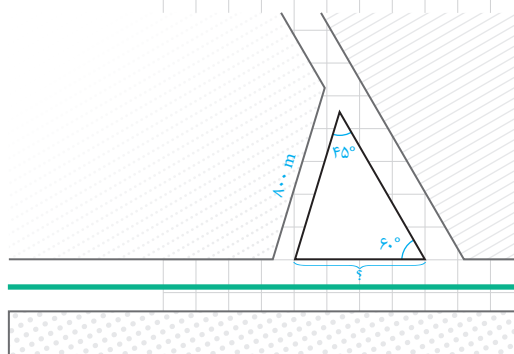
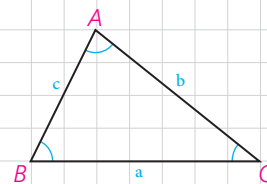
$$\Rightarrow 2R = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ و } R = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

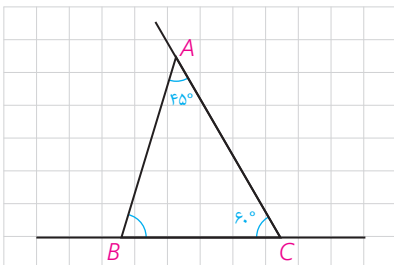
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow \frac{10\sqrt{6}}{3} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin B = \frac{10\sqrt{6}}{20\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow B=45^\circ \text{ یا } 135^\circ \text{ و } \hat{A}=12^\circ \Rightarrow \hat{B}=45^\circ \Rightarrow \hat{C}=15^\circ$$

**مثال ۲:** از یک بلوار افقی، یک خیابان فرعی باریک با زاویه  $6^\circ$

جدا شده است. اکنون شهرداری منطقه می‌خواهد یک خیابان فرعی دیگر به طول  $800$  متر بنا کند تا با زاویه  $45^\circ$  از خیابان فرعی اول جدا، و به بلوار منتهی شود. این خیابان از چه فاصله‌ای از رأس زاویه  $6^\circ$  باید شروع شود و با بلوار چه زاویه‌ای می‌سازد؟





**حل:** با یک شکل مناسب مسئله را مدل سازی می کنیم. اولاً با توجه به مجموع اندازه های زوایای داخلی مثلث، روشن است که  $\hat{B} = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$ ؛ یعنی خیابان فرعی باید با زاویه  $75^\circ$  از بلوار جدا شود. ثانیاً به کمک قضیه سینوس ها در مثلث ABC داریم:

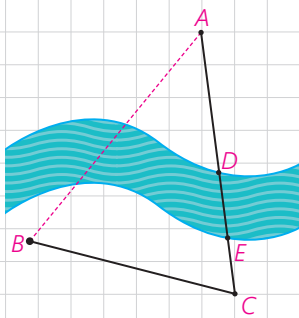
$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{800}{\sin 60^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ} \Rightarrow BC = \frac{800 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$\frac{800 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{800 \cdot \sqrt{6}}{3} \approx 653 / 2 \text{ m}$$

یعنی خیابان فرعی را باید از فاصله تقریبی  $653/2$  متر با زاویه  $75^\circ$  بنا کنیم.

### کاردرکلاس

می خواهیم روی یک رودخانه عمیق بین دو نقطه A و B در دو طرف رودخانه، پلی بنا کنیم. برای محاسبات مربوط به احداث پل، باید فاصله ابتدا و انتهای آن (یعنی طول AB) را به دست بیاوریم؛ اما امکان اندازه گیری مستقیم (به دلیل وجود رودخانه) وجود ندارد. برای این کار از نقطه A در جهتی حرکت می کنیم تا با عبور از قسمت کم عمق رودخانه (DE) به نقطه C برسیم و طول BC را اندازه گیری می کنیم؛ سپس با زاویه یاب (تئودولیت) زاویه دید AC از نقطه B ( $\hat{B}$ ) و زاویه دید AB از C ( $\hat{C}$ ) را اندازه می گیریم. به صورت زیر نشان دهید با داشتن طول BC و زوایای  $\hat{B}$  و  $\hat{C}$  می توان فاصله AB را به دست آورد:



$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin(\hat{C})} \Rightarrow \frac{BC}{\sin(180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}))} = \frac{AB}{\sin(\hat{C})} \Rightarrow AB = \frac{BC \times \sin(\hat{C})}{\sin(\hat{B} + \hat{C})}$$

اگر  $BC = 3 \text{ km}$  و  $\hat{B} = 70^\circ$  و  $\hat{C} = 60^\circ$  به کمک ماشین حساب طول AB را به دست آورید.

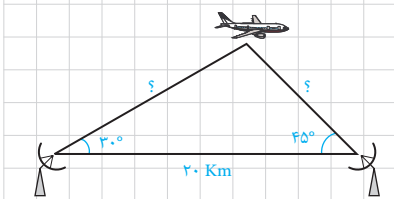


### تمرین

۱- ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه ABC ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) با ارتفاع  $AH = h_a$  داریم:

$$\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

۲- دو ایستگاه رادار، که در فاصله  $20$  کیلومتری از هم واقع اند، هواپیمایی را با زاویه های  $30^\circ$  و  $45^\circ$  درجه رصد کرده اند. فاصله هواپیما را از دو ایستگاه به دست آورید.



## قضیه کسینوس ها

می دانیم که در مثلث قائم الزاویه  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) با داشتن طول های دو ضلع ( $AB=c$ ) و ( $AC=b$ ) می توانیم اندازه وتر مثلث ( $BC=a$ ) را بر حسب  $b$  و  $c$  به دست آوریم:  $a^2 = b^2 + c^2$  حال می بینیم که اگر  $\hat{A}$  مساوی  $90^\circ$  هم نباشد، می توانیم این کار را انجام دهیم.

## فعالیت ۱

در مثلث  $ABC$  ( $\hat{A} < 90^\circ$ )، ارتفاع  $BH$  را رسم کرده ایم. با توجه به تعریف نسبت های مثلثاتی در مثلث های قائم الزاویه، جاهای خالی را پر کنید:

$$\cos A = \frac{\dots}{\dots} \Rightarrow AH = \dots \times \dots \quad \text{و} \quad CH = b - AH = \dots$$

$$\sin A = \frac{\dots}{\dots} \Rightarrow BH = \dots \times \dots$$

$$\Delta BHC: BC^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow a^2 = (\dots)^2 + (\dots)^2$$

حال به کمک اتحاد های جبری و اتحاد مثلثاتی  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ، نشان دهید:

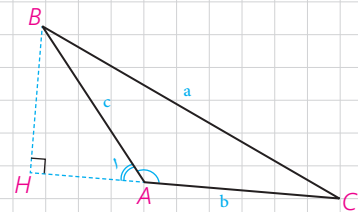
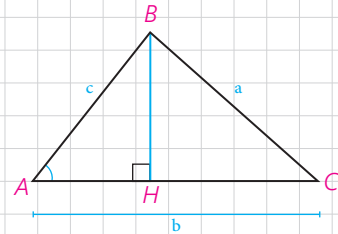
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

اکنون در مثلث  $ABC$  ( $\hat{A} > 90^\circ$ ) ارتفاع  $BH$  را در بیرون مثلث رسم می کنیم. اگر زاویه خارجی رأس  $A$  باشد با توجه به اینکه  $\hat{A}_1 = 180^\circ - \hat{A}$  داریم:  $\sin A_1 = \dots$  و  $\cos A_1 = \dots$  و در مثلث  $ABH$  نیز با توجه به تعریف نسبت های مثلثاتی می توان نوشت:

$$\cos A_1 = \frac{\dots}{\dots} \quad \text{و} \quad \sin A_1 = \frac{\dots}{\dots} \Rightarrow AH = \dots \times \dots$$

$$BH = \dots \times \dots \quad \text{و} \quad CH = b + AH = \dots$$

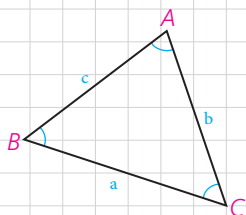
$$\Delta BHC: BC^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow a^2 = (\dots)^2 + (\dots)^2$$



و با ساده کردن عبارت‌ها نشان دهید :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

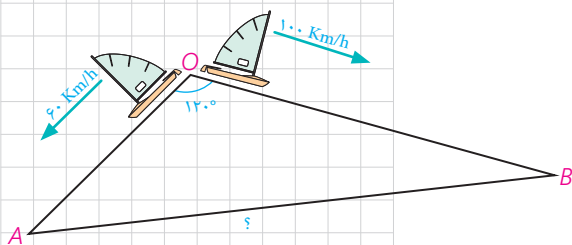
**سؤال :** در حالتی که زاویه A قائمه باشد، این رابطه به چه صورت در می‌آید؟



**قضیه کسینوس‌ها:** در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آنها:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A, \quad b^2 = \dots + \dots - \dots$$

$$c^2 = \dots + \dots - \dots$$



**مثال :** دو قایق از یک نقطه در دریاچه‌ای با سرعت‌های ۶۰ km/h و ۱۰۰ km/h و با زاویه ۱۲۰° از هم دور می‌شوند. نیم ساعت بعد دو قایق در چه فاصله‌ای از یکدیگر هستند؟

**حل :** با توجه به نقطه شروع دو قایق و سرعت‌های ثابت، نیم ساعت بعد، مسافت طی شده توسط هر قایق محاسبه می‌شود :

$$OA = 60 \times 0.5 = 30 \text{ و } OB = 100 \times 0.5 = 50$$

حال به کمک قضیه کسینوس‌ها می‌نویسیم :

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos 120^\circ \text{ و } \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$AB^2 = 900 + 2500 - 2 \times 30 \times 50 \left(-\frac{1}{2}\right) = 4900 \Rightarrow$$

$$AB = 70 \text{ km}$$

### کاردرکلاس

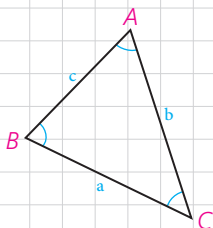
در مثلث ABC،  $AB = 2\sqrt{2}$  و  $AC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$  و  $\hat{A} = 60^\circ$

۱- طول ضلع BC را به کمک قضیه کسینوس‌ها به دست آورید.

$$BC^2 = \dots + \dots - 2 \times \dots \times \dots \times \dots \Rightarrow$$

$$BC^2 = \dots + \dots - \dots \Rightarrow$$

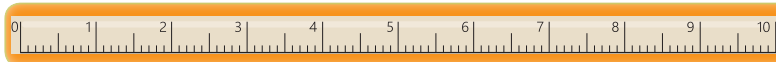
$$BC = \dots \text{ و } BC^2 = \dots$$



۲- اندازه  $\hat{C}$  را به کمک قضیه سینوس ها به دست آورید و از آنجا اندازه  $\hat{B}$  را هم بیابید.

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin C} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \sin C = \dots \text{ و } \hat{C} = \dots$$

$$\Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = \dots$$



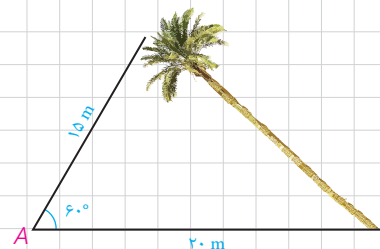
### تمرین

۱- یک درخت کج از نقطه A روی زمین، که در فاصله ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویه  $60^\circ$  دیده می شود. اگر فاصله A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است:

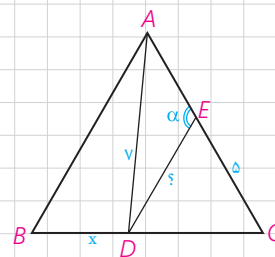
الف) طول درخت

ب) سینوس زاویه ای که درخت با سطح زمین می سازد.

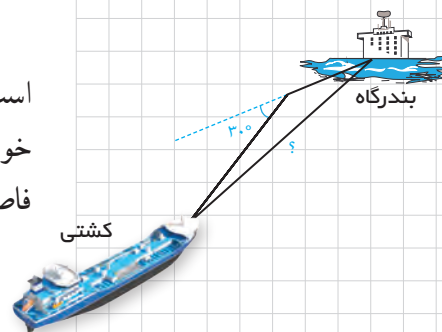
پ) فاصله نوک درخت از زمین



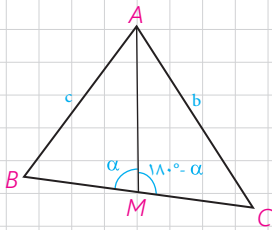
۲- در مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه D، که به فاصله ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله ای دارد؟ (CD > BD) نقطه E، که به فاصله ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله ای است؟ اندازه زاویه AED چند درجه است؟



۳- یک کشتی از یک نقطه با سرعت  $60$  کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با  $30^\circ$  انحراف به راست با سرعت  $40$  کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می گیرد. فاصله بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟



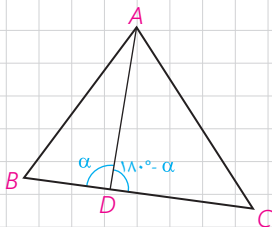




۴- در مثلث  $ABC$ ، میانه  $AM$  را رسم کرده ایم ( $MB = MC = \frac{a}{2}$ ). با نوشتن قضیه کسینوس‌ها در دو مثلث  $AMB$  و  $AMC$ ،  $b^2$  و  $c^2$  را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2} \quad (\text{قضیه میانه‌ها})$$

در حالت خاص  $AB=4$  و  $AC=6$  و  $BC=8$ ، طول میانه  $AM$  را به دست آورید.



۵- در مثلث  $ABC$ ، نقطه دلخواه  $D$  روی  $BC$  مفروض است. به کمک قضیه کسینوس‌ها در دو مثلث  $ADB$  و  $ADC$  درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC \quad (\text{قضیه استوارت})$$

به کمک قضیه استوارت، درستی قضیه میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

۶- مسئله ۲ را بار دیگر، این بار به کمک قضیه استوارت حل کنید.

## قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها

### ۱- قضیه نیمسازهای زوایای داخلی

**قضیه ۱:** در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 : \text{فرض}$$

$$\text{حکم} : \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

**اثبات:** مطابق شکل از نقطه C خطی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطه E قطع کند.

الف) چرا  $\widehat{A}_1 = \widehat{E}$  و چرا  $\widehat{A}_2 = \widehat{C}$ ؟

ب) با توجه به فرض، چه نتیجه‌ای درباره زوایای E و C می‌توان گرفت؟ مثلث AEC چه نوع مثلی است؟

پ) با توجه به قضیه تالس در مثلث EBC ( $AD \parallel EC$ ) نسبت  $\frac{BD}{CD}$  با کدام نسبت برابر است؟ با توجه به نتیجه قسمت (ب) اثبات را کامل کنید:

$$AD \parallel EC \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} = \dots$$

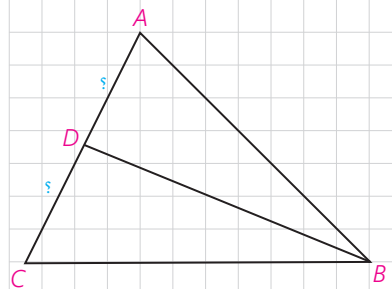
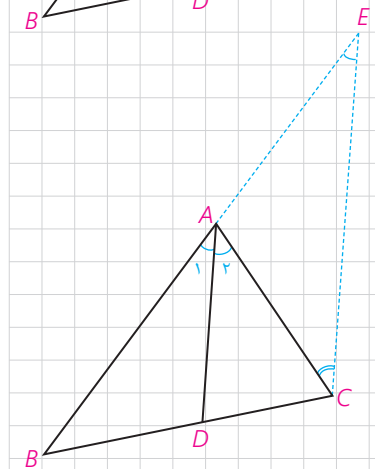
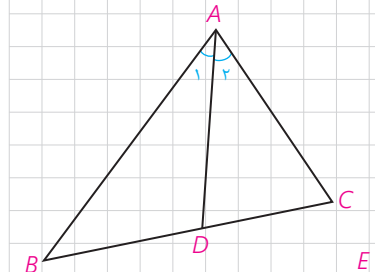
یکی از نتایج فوری این قضیه این است که در هر مثلث به سادگی می‌توان طول‌های قطعاتی را که هر نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند با داشتن طول‌های اضلاع مثلث، محاسبه کرد:

**مثال:** در مثلث ABC،  $AB=7$ ،  $AC=5$  و  $BC=8$  است. طول‌های دو قطعه‌ای را به دست آورید که نیمساز زاویه B روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

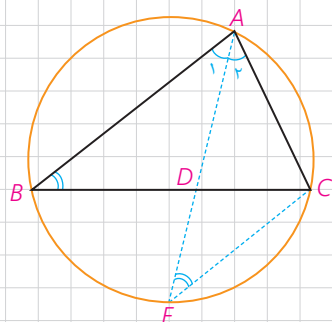
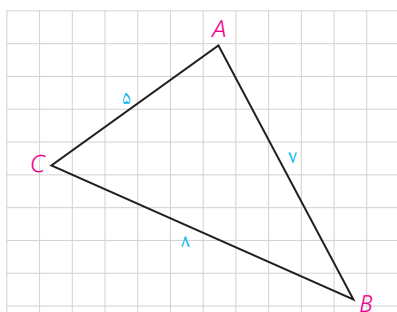
**حل:**

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{AD+CD}{CD} = \frac{7+8}{8} \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{15}{8} \Rightarrow$$

$$CD = \frac{8 \times 5}{15} = \frac{8}{3}, AD = AC - CD = 5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$$



در شکل روبه‌رو نیمساز زاویه C را رسم کنید و طول‌های دو قطعه‌ای را به دست آورید که این نیمساز روی AB جدا می‌کند.



## ۲- محاسبه طول نیمسازهای زوایای داخلی مثلث

در مثلث ABC برای محاسبه طول نیمساز داخلی زاویه  $\hat{A}$  ( $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ )، یعنی AD، AD را امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث را در E قطع کند و E را به C وصل می‌کنیم.

الف) چرا  $\hat{E} = \hat{B}$ ؟

ب) چرا مثلث‌های ABD و AEC متشابه‌اند؟

پ) نسبت‌های اضلاع متناظر آنها را بنویسید.

$$\frac{AC}{\dots} = \frac{AE}{\dots} = \frac{BD}{BD}$$

ت) از تناسب اول نتیجه می‌گیریم:

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE = AD(AD+DE) = AD^2 + AD \cdot DE$$

و چون  $AD \cdot DE = BD \cdot DC$  (چرا؟) بنابراین:

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

**قضیه ۲:** در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با

حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

**مثال:** در مثلث ABC،  $AB=3$ ،  $AC=5$  و  $BC=7$  است. طول نیمساز زاویه A را بیابید.

**حل:** به کمک قضیه (۱) طول‌های BD و CD را به دست می‌آوریم:

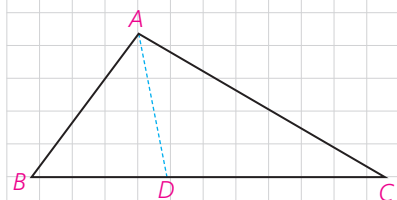
$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BD+CD}{CD} = \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{7}{CD} = \frac{8}{5} \Rightarrow CD = \frac{35}{8}, BD = 7 - \frac{35}{8} = \frac{21}{8}$$

حال با توجه به قضیه (۲) داریم:

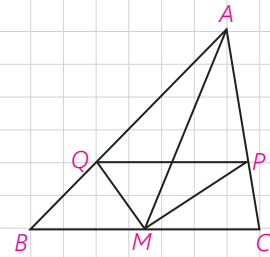
$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD = 3 \times 5 - \frac{35}{8} \times \frac{21}{8} =$$

$$15 - \frac{735}{64} = \frac{225}{64} \Rightarrow AD = \frac{15}{8}$$



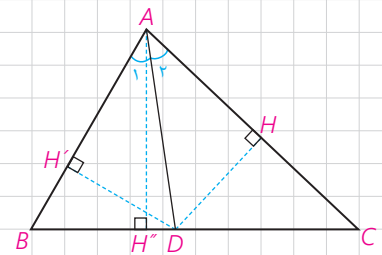


۱- در مثلث  $ABC$ ،  $M$  وسط  $BC$  و  $MP$  و  $MQ$  نیمسازهای زوایای  $AMC$  و  $AMB$  هستند؛ ثابت کنید:  $PQ \parallel BC$



۲- در مثلث  $ABC$ ،  $AB=7$  و  $AC=4$  و  $BC=10$  است. طول نیمساز زاویه داخلی  $C$  را به دست آورید.

۳- با پر کردن جاهای خالی با فرض اینکه در شکل مقابل  $AD$  نیمساز زاویه  $\hat{A}$  است، روش دیگری برای اثبات قضیه نیمسازهای زوایای داخلی ارائه کنید:  
الف) چرا  $DH = DH'$ ؟



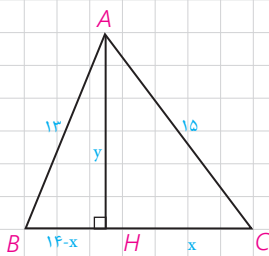
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}DH' \times \dots}{\frac{1}{2}DH \times \dots} = \frac{\dots}{\dots} \quad (1)$$

ب)

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}BD \times \dots}{\frac{1}{2}CD \times \dots} = \frac{\dots}{\dots} \quad (2)$$

از مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:  $\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

## قضیه هرون (محاسبه ارتفاعها و مساحت مثلث)



با مسئله زیر در کتاب هندسه ۱ مواجه شدید :

در مثلث ABC با اضلاع ۱۳، ۱۴، ۱۵، ارتفاع AH رسم شده است. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلثهای AHB و AHC اندازه‌های x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را نیز محاسبه کنید :

به عنوان یادآوری، مسئله را با هم حل می‌کنیم :

$$\left. \begin{aligned} CH^2 + AH^2 &= \dots \\ BH^2 + AH^2 &= \dots \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \dots \\ (14-x)^2 + y^2 = \dots \end{cases}$$

طرفین این دوتساوی را از هم کم می‌کنیم که با حذف  $y^2$  معادله‌ای بر حسب x به دست می‌آید :

$$x^2 - (14-x)^2 = \dots \Rightarrow x^2 - 196 - x^2 + 28x = \dots$$

$$\Rightarrow x = \dots, y = \dots, S = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \dots$$

اگر همین روش را در حالت کلی در مثلث ABC، که  $BC=a$ ،  $AB=c$  و  $AC=b$  به کار ببریم، نتیجه می‌شود :

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \quad (\text{دستور هرون})$$

که در این دستور  $P = \frac{a+b+c}{2}$  نصف محیط مثلث است.

(اثبات کامل این دستور را می‌توانید در مجله ریاضی انتهای فصل ببینید.)

**مثال:** مساحت مثلث با اضلاع به طول‌های ۱۳، ۱۴ و ۱۵ به کمک دستور هرون

برابر است با :

$$2P = 13 + 14 + 15 = 42 \Rightarrow P = 21$$

$$s = \sqrt{21 \times 6 \times 7 \times 8} = \sqrt{7^2 \times 3^2 \times 2^4} = 84$$

و طول های سه ارتفاع مثلث نیز برابرند با :

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \times 14}{14} = 12, \quad h_b = \dots, \quad h_c = \dots$$

### کاردکلاس

چهارضلعی ABCD یک مزرعه کشاورزی را نشان می دهد که تنها دو ضلع آن بر هم عمودند. طول های اضلاع زمین به سادگی قابل اندازه گیری، و اندازه های آنها در شکل مشخص شده است. با انجام دادن مراحل زیر مساحت این زمین را به دست آورید :

الف) اگر B را به D وصل کنیم، طول BD را چگونه به دست می آورید؟  
 $BD^2 = \dots + \dots = \dots + \dots = \dots \Rightarrow BD = \dots$

ب) مساحت مثلث ABD را چگونه به دست می آورید؟

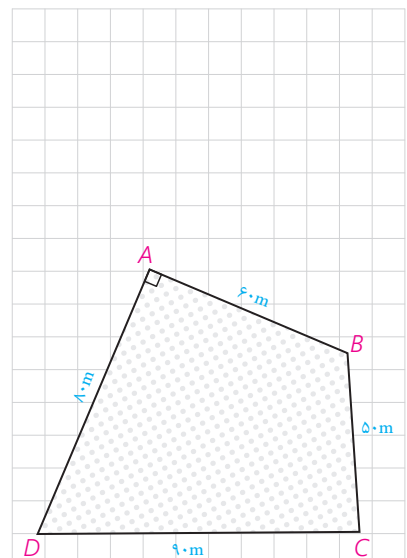
$$S_{ABD} = \frac{\dots \times \dots}{2} = \dots$$

پ) مساحت مثلث CBD را به کمک دستور هرون به دست آورید.

$$P = \frac{\dots + \dots + \dots}{2} = \dots, \quad S_{CBD} = \dots$$

ت) مساحت زمین کشاورزی برابر است با :

$$S = \dots + \dots = \dots$$



### فعالیت

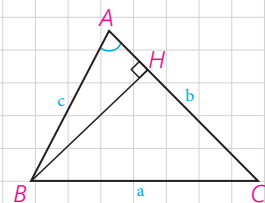
می خواهیم دستور دیگری برای محاسبه مساحت مثلث به کمک نسبت های مثلثاتی به دست آوریم.

۱- در مثلث ABC، ارتفاع BH را رسم کرده ایم.

$$\sin A = \frac{\dots}{\dots} \Rightarrow BH = \dots$$

۲- مساحت مثلث ABC را به کمک ارتفاع BH بنویسید.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \times AC = \dots$$



### نتیجه

مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه های هر دو ضلع در سینوس زاویه بین آنها:

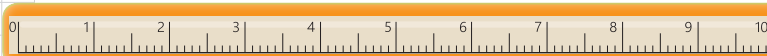
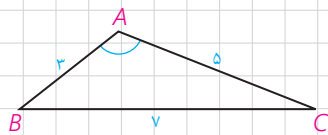
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B$$

۱- مثلث ABC با اضلاع ۳ و ۵ و ۷ مفروض است. مساحت مثلث را با استفاده از دستور هرون به دست آورید.

$$P = \frac{\dots + \dots + \dots}{2} = \dots \Rightarrow S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \dots$$

۲- مساحت مثلث را با استفاده از دستور  $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$  بنویسید.

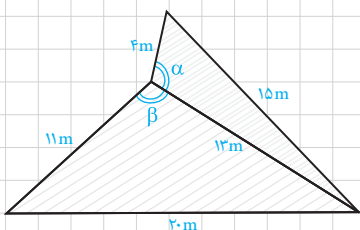
۳- از مقایسه نتایج ۱ و ۲، اندازه زاویه منفرجه  $\hat{A}$  را به دست آورید.



تمرین

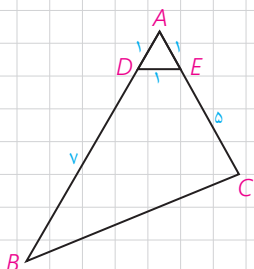
۱- در مثلث ABC،  $AB=10$ ،  $AC=6$  و  $\hat{A}=60^\circ$ . الف) طول BC را به دست آورید. ب) مساحت مثلث را تعیین کنید. پ) مقدار  $\sin B$  را پیدا کنید.

۲- دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده اند. ابعاد زمین‌ها هم در شکل مشخص شده اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چقدر می‌شود؟  
 نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه‌های برابر می‌سازد.  
 $(\alpha = \beta)$



۳- دستور محاسبه مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون به دست آورید.

۴- در شکل مقابل، اولاً طول BC را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی DECB را بیابید.



۵- در شکل صفحه بعد AD نیمساز زاویه  $\hat{A}$  است. با پر کردن جاهای خالی، دستوری دیگر برای محاسبه طول نیمساز زاویه A به دست آورید.

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \dots \times \dots \times \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \dots \times \dots \times \sin \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow AB \cdot AC \cdot \sin A = AD \cdot \sin \frac{A}{2} (\dots + \dots)$$

$$\Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{(\dots + \dots) \sin \frac{A}{2}} = \frac{2AB \cdot AC \cdot \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{(\dots + \dots) \sin \frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow AD = \dots \Rightarrow (A \text{ نیمساز رأس } A) d_a = \frac{2bc \cdot \cos \frac{A}{2}}{b+c}$$

۶- در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۵ و ۶، به فاصله ۲ و ۳ سانتی متر است از ضلع بزرگ‌تر چه فاصله‌ای دارد؟  
راهنمایی: از مساحت مثلث استفاده کنید.

۷- در شکل، اولاً اندازه زاویه A را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی ABCD را بیابید.  
راهنمایی: B را به D وصل کنید.

۸- ثابت کنید مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه بین آن دو ضلع.

۹- به کمک قضیه کسینوس‌ها ثابت کنید در مثلث ABC:

الف)  $\hat{A} > 90^\circ$  اگر و تنها اگر  $a^2 > b^2 + c^2$

ب)  $\hat{A} < 90^\circ$  اگر و تنها اگر  $a^2 < b^2 + c^2$

پ)  $\hat{A} = 90^\circ$  اگر و تنها اگر  $a^2 = b^2 + c^2$

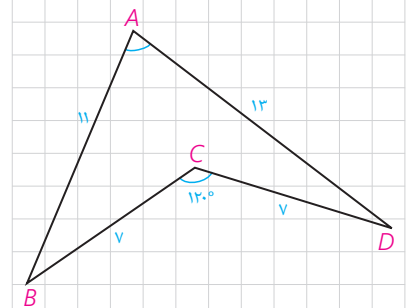
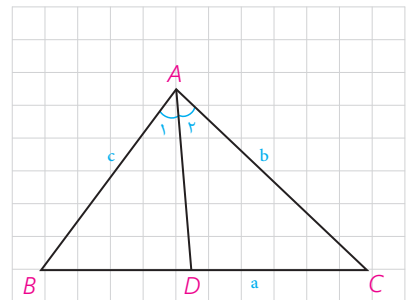
۱۰- به کمک نتیجه تمرین ۹، حاده (تند)، قائمه یا منفرجه (باز) بودن زاویه A را در هر

یک از مثلث‌های زیر تعیین کنید:

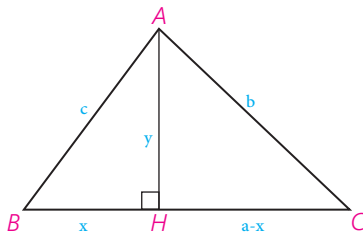
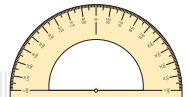
الف)  $BC=9$  ،  $AC=6$  ،  $AB=10$

ب)  $BC=9$  ،  $AC=4$  ،  $AB=8$

پ)  $BC=17$  ،  $AC=15$  ،  $AB=8$







### اثبات دستور هرون (برای محاسبه مساحت مثلث)

در مثلث  $ABC$ ،  $AB=c$  و  $AC=b$  و  $AH=y$  و  $BC=a$  و  $BH=x$  و  $CH=a-x$ . با نوشتن قضیه فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه  $ABH$  و  $ACH$  و تفاضل روابط به دست آمده خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2 \\ (a-x)^2 + y^2 = b^2 \end{cases} \Rightarrow b^2 - c^2 = (a-x)^2 - x^2 = a^2 + x^2 - 2ax - x^2 = a^2 - 2ax \Rightarrow x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \Rightarrow$$

$$y = \sqrt{c^2 - x^2} = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2}$$

با ساده کردن این عبارت جبری و تجزیه آن به کمک اتحادهای جبری نتیجه می‌شود:

$$y = AH = \sqrt{\frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}} = \frac{1}{2a} \sqrt{(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)}$$

$$= \frac{1}{2a} \sqrt{[(a+c)^2 - b^2][b^2 - (a-c)^2]} =$$

$$\frac{1}{2a} \sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a)}$$

حال با فرض  $a+b+c=2p$  خواهیم داشت:

$$a+c-b = a+c+b-2b = 2p-2b = 2(p-b)$$

و به همین صورت:

$$b+c-a = 2(p-a), \quad b+a-c = 2(p-c)$$

و بنابراین:

$$AH = \frac{1}{2a} \sqrt{2p \times 2(p-a) \times 2(p-b) \times 2(p-c)} =$$

$$\frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad S = \frac{1}{2} AH \cdot a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- ادوین ا، موئیز، هندسه مقدماتی از دیدگاه پیشرفته، ترجمه امیر خسروی و محمود نصیری (۱۳۷۷)، انتشارات مبتکران: تهران.
- حاجی بابایی، جواد و همکاران، (۱۳۹۳)، کتاب درسی هندسه ۲ پایه سوم ریاضی و فیزیک، تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، چاپ هجدهم.
- حسن‌زاده ماکویی، علی، طاهری، هوشنگ و فیروزنیا، احمد، (۱۳۷۱)، کتاب درسی مثلثات پایه سوم ریاضی و فیزیک، تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
- خسروی، امیر، دارابی، ابراهیم و نصیری، محمود (۱۳۷۱)، کتاب درسی هندسه ۱، تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
- خسروی، امیر، دارابی، ابراهیم و نصیری، محمود (۱۳۷۱)، کتاب درسی هندسه ۲، تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
- گرینبرگ، ماروین. جی. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی، ترجمه م. ه. شفیع‌یها، (۱۳۶۱)، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی: تهران.
- گویا، زهرا و همکاران، (۱۳۹۳)، کتاب درسی هندسه ۱ پایه دوم ریاضی و فیزیک، تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، چاپ بیستم.
- نصیری، محمود، (۱۳۹۴)، هندسه متوسطه میانی و مفهومی‌ها، انتشارات مبتکران.
- هاورد، ایوز، (۱۳۷۹). آشنایی با تاریخ ریاضیات (جلد اول)، ترجمه: محمدقاسم وحیدی اصل، تهران: مرکز نشر دانشگاهی، چاپ چهارم.
- Byer, O., Lazebnik, F., & Smeltzer, D. L. (2010). *Methods for Euclidean geometry*. MAA.
- Dodge, C. W. (2012). *Euclidean geometry and transformational*. Courier Corporation.
- Hvidsten. M. (2005). *Geometry with geometry explorer™*. McGraw-Hill,
- Kinsey, L. C., Moore. T. E., & Prassidis. S. (2011). *Geometry & symmetry*. John Wiley & Sons.
- Libeskind, S. (2008). *Euclidean and transformational geometry: A deductive inquiry*. Jones & Bartlett Publishers.
- Martin, G. E. (2012). *The foundations of geometry and the non-Euclidean plane*. Springer Science & Business Media.
- O'Leary, M.L. (2010). *Revolutions of Geometry (Vol. 87)*. John Wiley & Sons.
- Posamentier. A. S. (1984). *Excursions in advanced Euclidean geometry* Addison – Wesley.
- Tapp, K. (2011). *Symmetry: a mathematical exploration*. Springer Science & Business Media.
- Umble, R. N., & Han, Z. (2014). *Transformational Plane Geometry*. CRC Press.



سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایفای نقش خطیر خود در اجرای سند تحول بنیادین در آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، مشارکت معلمان را به‌عنوان یک سیاست اجرایی مهم دنبال می‌کند. برای تحقق این امر در اقدامی نوآورانه سامانه تعاملی بر خط اعتبارسنجی کتاب‌های درسی راه‌اندازی شد تا با دریافت نظرات معلمان درباره کتاب‌های درسی نوگاشت، کتاب‌های درسی را در اولین سال چاپ، با کمترین اشکال به دانش‌آموزان و معلمان ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب این فرایند، همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پرورشی استان‌ها، گروه‌های آموزشی، دبیرخانه راهبری دروس و مدیریت محترم پروژه آقای محسن باهو نقش سازنده‌ای را بر عهده داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش تمامی این همکاران، اسامی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائه نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌شود.

### کتاب هندسه ۲ با کد ۱۱۱۲۱۳

| ردیف | نام و نام خانوادگی    | استان محل خدمت     | ردیف | نام و نام خانوادگی    | استان محل خدمت      |
|------|-----------------------|--------------------|------|-----------------------|---------------------|
| ۱    | محمد نیازی            | چهارمحال و بختیاری | ۲۳   | اکرم حبیب الهی        | سمنان               |
| ۲    | زهرا صیدی             | ایلام              | ۲۴   | مولود حاج رفیعی       | قزوین               |
| ۳    | لیلی دوستی            | آذربایجان شرقی     | ۲۵   | زهرا اصلانی           | شهرستانهای تهران    |
| ۴    | مرضیه خدایی           | سمنان              | ۲۶   | محمدسعید حکیمی        | کردستان             |
| ۵    | ماریا عزیزی           | ایلام              | ۲۷   | میترا سلماسی          | خراسان شمالی        |
| ۶    | نرگس اصلانی           | آذربایجان شرقی     | ۲۸   | علی خالقی             | فارس                |
| ۷    | عیسی دار              | هرمزگان            | ۲۹   | فاطمه محمدیها         | شهر تهران           |
| ۸    | کیانوش کمانی          | مرکزی              | ۳۰   | معصومه مؤذن زاده      | هرمزگان             |
| ۹    | جمال نوین             | یزد                | ۳۱   | علی نصیری             | قزوین               |
| ۱۰   | نسرین رنجبران         | همدان              | ۳۲   | کمیل ایزدپناه         | گلستان              |
| ۱۱   | شهریار ساکنیان دهکردی | چهارمحال و بختیاری | ۳۳   | معصومه سمیع انارستانی | گیلان               |
| ۱۲   | حمیدرضا مومنی         | کرمان              | ۳۴   | یوسف کرمی             | اردبیل              |
| ۱۳   | معصومه عرب پور داهوئی | کرمان              | ۳۵   | راضیه کاظمی           | خراسان جنوبی        |
| ۱۴   | علی مراد سبزه کار     | خراسان جنوبی       | ۳۶   | فرخ حسن زاده          | کهگیلویه و بویراحمد |
| ۱۵   | قاسم شعبانی چالوسر    | مازندران           | ۳۷   | محمد نبرد رحمانی      | کردستان             |
| ۱۶   | ایرج پویا             | آذربایجان غربی     | ۳۸   | جابر عامری            | خوزستان             |
| ۱۷   | قباد خالدی کوره       | آذربایجان غربی     | ۳۹   | لیلا محرابی نسب       | خراسان شمالی        |
| ۱۸   | نسرین دخت نجیبی       | فارس               | ۴۰   | مسعود منعمی           | مازندران            |
| ۱۹   | شیرین جهانگیری        | کرمانشاه           | ۴۱   | کبری پور قبادی        | لرستان              |
| ۲۰   | سیما حقیقی اذر        | گلستان             | ۴۲   | بهرام وره نوی         | اردبیل              |
| ۲۱   | محسن حجابی            | شهر تهران          | ۴۳   | حامد رنجبر کهخا       | سیستان و بلوچستان   |
| ۲۲   | شهناز مترجم           | کرمانشاه           |      |                       |                     |

