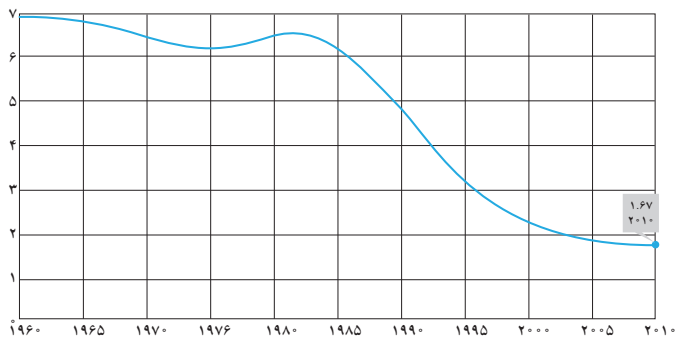


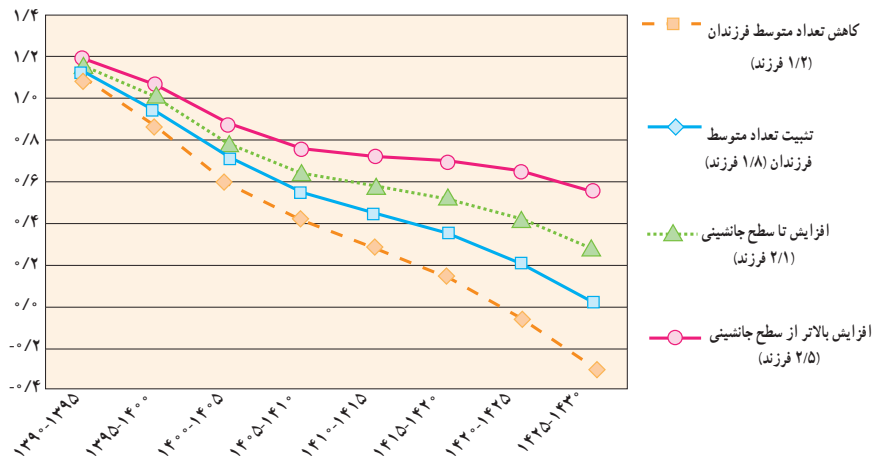


تابع یکی از مفاهیم مهم است که در ریاضیات و سایر علوم دارای کاربردهای فراوانی است. توابع به روش‌های گوناگونی نمایش داده می‌شوند. یکی از این روش‌ها استفاده از نمودارهاست. موضوعات متفاوتی به وسیله تابع قابل مدل‌سازی است. نمودار زیر روند کاهش متوسط تعداد فرزندان یک خانواده در کشورمان را نشان می‌دهد. نمودار بعدی جمعیت کل کشور را در چهار وضعیت مختلف پیش‌بینی می‌کند. کشور ما در معرض سالمند شدن می‌باشد. به طوری که اگر متوسط تعداد فرزندان یک خانواده تا سال ۱۴۳۰ میزان فعلی باشد در آن موقع، حدود ۳٪ جمعیت را افراد مسن تشکیل خواهند داد. کشور ما با نسبت سالمندی ۸٪ تا سال ۱۳۹۴ جزء جوان‌ترین کشورهای بوده است. همچنین با ادامه روند فعلی تغییرات جمعیت در یک دوره ۳۰ ساله، رشد جمعیت به صفر خواهد رسید و پس از آن رشد جمعیت کشور منفی خواهد شد. سالمندی جمعیت و منفی شدن رشد جمعیت، پیامدهای ناگواری را در پی دارد.

نمودار روند کاهش متوسط تعداد فرزندان یک خانواده در ایران



نمودار پیش‌بینی رشد جمعیت کل کشور در دوره‌های پنج ساله در چهار وضعیت مختلف تعداد متوسط فرزندان تا افق ۱۴۳۰ شمسی



- درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن
- درس دوم: دامنه و برد توابع
- درس سوم: انواع تابع

درس اول: مفهوم تابع و بازتابی‌های آن



همدان - گنج‌نامه



میبد، استان یزد - تارین قلعه

بسیاری از پدیده‌های پیرامون ما به نوعی با هم ارتباط دارند. یک نوع خاص از این ارتباط در موارد زیادی مشاهده می‌شود. به مثال‌های زیر توجه کنید:

دمایی که به ساعت معینی در یک مکان نسبت داده می‌شود.

قیمتی که به اجناس یک فروشگاه نسبت داده می‌شود.

نمره‌هایی که به یک دانش‌آموز در دروس مختلف تعلق می‌گیرد.

عددی که به جمعیت شهرها نسبت داده می‌شود.

فعالیت ۱

در جدول‌های زیر مثال‌های بالا و مواردی دیگر به کمک جدول ارائه شده‌اند. جاهای خالی را پر کنید. جدول آخر را به سلیقه خودتان تکمیل کنید.

با توجه به جدول مشخص است که در یک زمان معین فقط یک دما را می‌توان به آن نسبت داد. درباره بقیه جدول‌ها مشابه این عبارت را بنویسید.

ساعت	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
دما	۱۵	۱۶	۱۷	۱۷	۱۸

به یک ساعت معین فقط یک دما را می‌توان نسبت داد؛ یعنی یک ساعت مشخص دو دمای متفاوت ندارد.

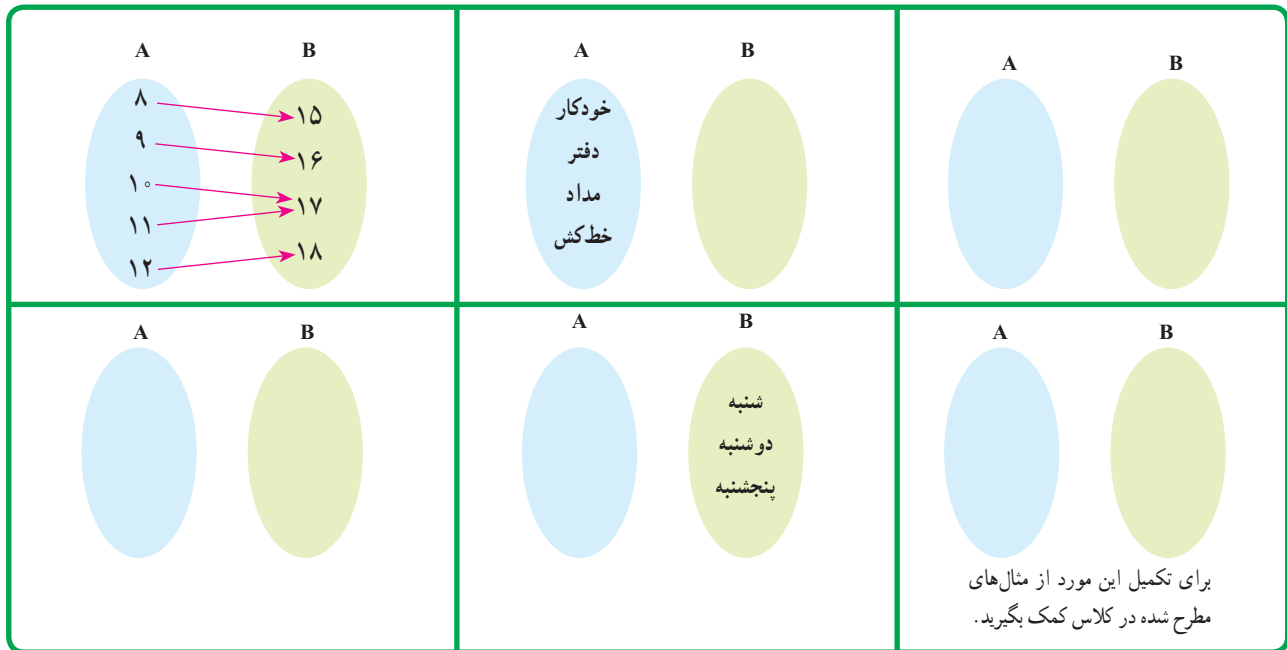
کالا	خودکار	دفتر	مداد	خط‌کش
قیمت (تومان)	۱۵۰۰	۳۰۰۰	۱۰۰۰	۱۵۰۰

درس	ریاضی	فیزیک	شیمی	ادبیات
نمره	۱۸	۱۶	۱۷	۱۸

فرد	امیدی	احسانی	کشاورز	رستگار
روز تولد	شنبه	دوشنبه	شنبه	پنجشنبه

یک شخص معین دو روز تولد متفاوت ندارد.

جدول‌های فعالیت ۱ را می‌توان به کمک مجموعه‌ها و پیکان‌هایی که اعضای آنها را به هم مربوط می‌کنند، مشخص کرد. به این شیوه نمایش، نمودارهای پیکانی می‌گوییم. یک نمونه کامل شده است. بقیه را شما کامل کنید.



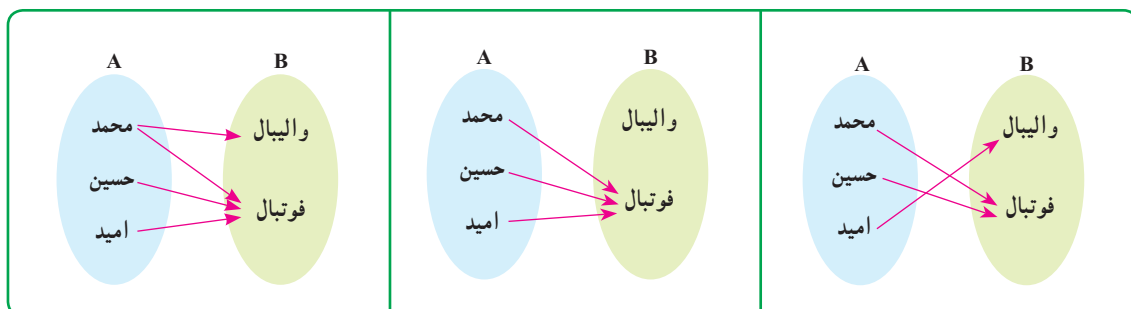
توجه دارید که در رابطه‌های بالا، از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک پیکان خارج شده است. این گونه رابطه بین دو مجموعه را یک «تابع» می‌نامند.

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود.

در فعالیت ۱، همه مثال‌های ارائه شده تابع‌هایی هستند که به صورت جدول نمایش داده شده‌اند.

کار در کلاس

۱ مجموعه A شامل سه دانش‌آموز به نام‌های محمد، حسین و امید و مجموعه B شامل دو رشته ورزشی است که دانش‌آموزان می‌توانند انتخاب کنند. کدام یک از نمودارهای پیکانی داده شده تابع است و کدام یک تابع نیست؟

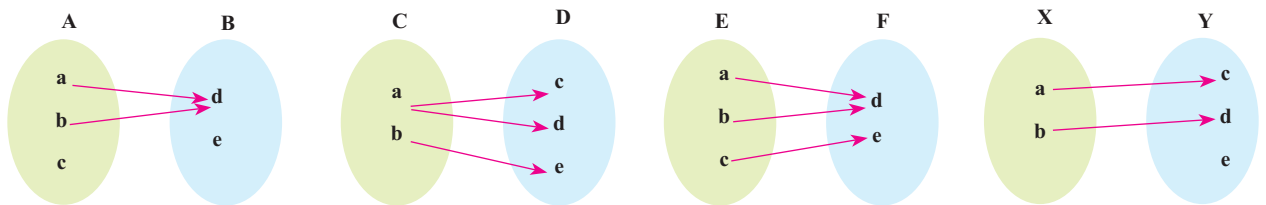


درس اول: مفهوم تابع و بازتاب‌های آن

۲ از مجموعه A به مجموعه B نمودار پیکانی را طوری رسم کنید که یک تابع را نمایش دهد. از مجموعه X به مجموعه Y این کار را به گونه‌ای انجام دهید که حاصل یک تابع نباشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



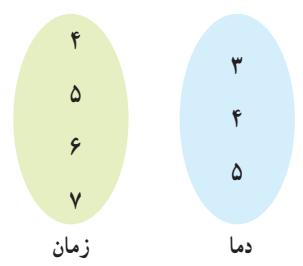
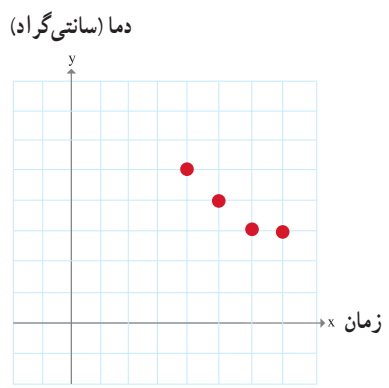
- ۳ الف) آیا رابطه‌ای که به افراد سن آنها را نسبت می‌دهد، یک تابع است؟ رابطه‌ای که به افراد وزن آنها را نسبت می‌دهد، چطور؟
 ب) آیا رابطه‌ای که به افراد غذای مورد علاقه آنها را نسبت می‌دهد، یک تابع است؟ توضیح دهید.
- ۴ کدام یک از نمودارهای پیکانی زیر یک تابع است؟



فعالیت

نمایش تابع به صورت زوج‌های مرتب و نمودار مختصاتی

نمودار زیر، دمای هوا را در چهار ساعت متفاوت در اردبیل نشان می‌دهد. رابطه بین زمان و دما را به صورت نمودار پیکانی نمایش دهید و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ جدول را هم کامل کنید.



ساعت	۴	۵	۶	۷
دما	۵	۴		

اگر در نمودار بالا محور افقی را محور طول و محور عمودی را محور عرض در نظر بگیریم، مختصات هر یک از نقاط داده شده را می‌توان با یک «زوج» از اعداد به صورت زیر نمایش داد:

- (۴, ۵), (۵, ۴), (۶, ۳), (۷, ۳)

ترتیب نوشتن اعداد در هر زوج مهم است. مثلاً زوج‌های (۴, ۵) و (۵, ۴) برابر نیستند و دو نقطه متفاوت در نمودار را نشان می‌دهند. به همین دلیل به هر یک از زوج‌های بالا یک «زوج مرتب» می‌گوییم.

اگر همه زوج‌های مرتب بالا را در مجموعه‌ای قرار دهیم، یک نمایش دیگر برای رابطه ارائه شده بین زمان و دما به دست می‌آید که به آن نمایش زوج مرتبی رابطه داده شده می‌گویند. برای نام‌گذاری این مجموعه جدید از حروفی مانند f و g استفاده می‌کنیم.

$$f = \{(4,5), (5,4), (6,3), (7,3)\}$$

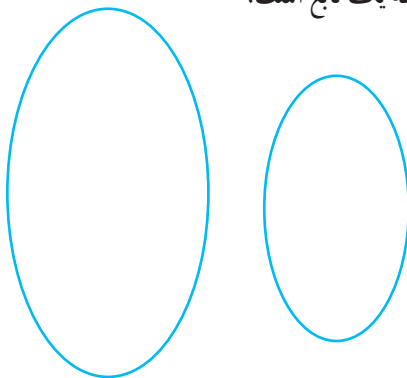
در هر زوج مرتب عضو اول را «مؤلفه اول» و عضو دوم را «مؤلفه دوم» می‌نامیم. به طور مثال در زوج مرتب (۳ و ۶)، مؤلفه اول ۶ و مؤلفه دوم ۳ است. مجموعه f یک تابع است. برای ساعت‌های دیگر موجود در نمودار دمایی را به زمان نسبت دهید و نمودار را به صورت زوج مرتب نمایش دهید.

کار در کلاس

۱ نام شهرهای تهران، مشهد، اصفهان، شیراز، تبریز و اهواز در یک سطر جدول زیر نوشته شده‌اند. در سطر دیگر، جمعیت آن شهرها را به طور تقریبی بنویسید (جمعیت دقیق لازم نیست).

شهر	تهران	مشهد	اصفهان	شیراز	تبریز	اهواز	کرمان
جمعیت							

رابطه بالا را به صورت پیکانی و زوج مرتب نمایش دهید. آیا این رابطه یک تابع است؟



۲ در هر سطر جدول زیر نمایش‌های مختلف یک رابطه داده شده است. جاهای خالی جدول را کامل و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ ردیف آخر را به دلخواه خودتان کامل کنید.

توصیف رابطه	مجموعه زوج‌های مرتب	نمودار پیکانی	جدول یا نمودار
به هر عدد طبیعی کمتر از ۴ مقسوم‌علیه‌های آن را نسبت می‌دهد.	$\{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3)\}$		
	$\{(2,4), (3,9), (4,16)\}$		
به اعداد ۴ و ۷ ریشه‌های دوم آنها را نسبت می‌دهد.			

۳ الف) کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟

$$g = \{(1,5), (2,9), (2,5), (3,10)\}$$

$$f = \{(1,5), (2,9), (3,10)\}$$

ب) با تکمیل جمله زیر برای تشخیص تابع بودن یک رابطه، هنگامی که رابطه به صورت زوج مرتبی ارائه می‌شود، معیاری به دست آورید:

اگر یک رابطه به صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این رابطه یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن



- ۱ کدام یک از روابط زیر یک تابع را معلوم می‌کند؟ توضیح دهید.
- (الف) رابطه‌ای که به ضلع یک مربع، محیط مربع را نسبت می‌دهد.
- (ب) رابطه‌ای که به هر فرد، دمای بدن او را در یک زمان معین نسبت می‌دهد.
- (ج) رابطه‌ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می‌دهد.
- (د) رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز، دوستان او را نسبت می‌دهد.
- (ه) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه‌های دوم آن عدد را نسبت می‌دهد.
- (و) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه سوم آن را نسبت می‌دهد.

- ۲ مجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{1, 2\}$ داده شده‌اند.
- (الف) به کمک نمودار پیکانی دو رابطه از A به B ارائه کنید که تابع باشند.
- (ب) دو رابطه ارائه کنید که تابع نباشند.
- (ج) چهار رابطه به دست آمده را به کمک زوج‌های مرتب و نمودار نمایش دهید.

۳ کدام یک از مجموعه‌های زیر یک تابع است؟

$$f = \{(2, 1), (3, -5), (3, 7)\}$$

$$h = \{(2, 3), (3, 2), (1, 1)\}$$

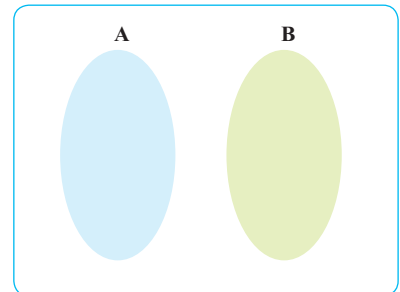
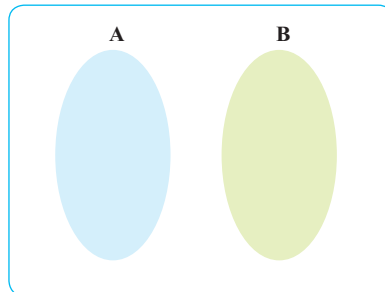
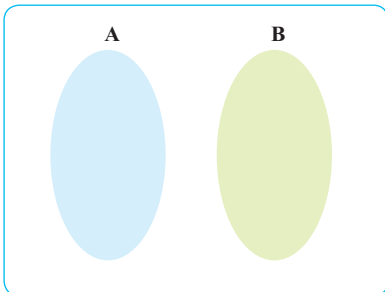
$$r = \{(2, 0), (-7, 0)\}$$

$$g = \{(0, 1), (\frac{3}{5}, 1), (-5, 1), (8, 1)\}$$

$$k = \{(2, 5)\}$$

$$l = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), \dots\}$$

- ۴ A و B مجموعه‌هایی غیر عددی‌اند، در شکل زیر در A و B اعضای دلخواه بگذارید و یک تابع از A به B به کمک نمودار پیکانی ارائه کنید. سعی کنید لاقبل سه تابع مختلف بنویسید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



درس دوم: دامنه و برد توابع

فعالیت

در جدول زیر رابطه بین تعدادی چند ضلعی و مجموع زوایای داخلی آنها داده شده است. جدول را کامل کنید.

چندضلعی	مثلث	مربع	لوزی	پنج ضلعی
مجموع زوایای داخلی (درجه)	180°			

این رابطه را به صورت زوج مرتبی نمایش دهید.

$$f = \{ (پنج ضلعی, \quad), (لوزی, \quad), (مربع, \quad), (مثلث, 180^\circ) \}$$

چرا f یک تابع است؟

مجموعه همه مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل دهنده هر تابع را «دامنه» و مجموعه همه مؤلفه‌های دوم را «برد» آن تابع می‌نامند. در فعالیت بالا:

$$f \text{ دامنه} = \{ پنج ضلعی, لوزی, مربع, مثلث \}$$

$$f \text{ برد} = \{ 180^\circ, 360^\circ, 540^\circ \}$$

کاردر کلاس

۱ در جدول زیر رابطه بین ضلع یک مربع و محیط آن داده شده است. جدول را کامل کنید.

طول ضلع	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$	۲		
محیط	۲	۴				۲۰

نمایش رابطه داده شده را به صورت مجموعه زوج‌های مرتب بنویسید. چرا این رابطه تابع است؟ دامنه و برد این تابع را بنویسید.

۲ الف) تابعی مثال بزنید که دامنه آن سه عضو و برد آن دو عضو داشته باشد.

ب) آیا تابعی وجود دارد که دامنه آن دو عضو و برد آن سه عضو داشته باشد؟

۳ اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد، می‌دانیم که دامنه f همان مجموعه A است. آیا همیشه برد تابع f با مجموعه B برابر است؟ مثال بزنید.

فعالیت

دنباله شکل‌های زیر را در نظر بگیرید :



جدول را کامل کنید.

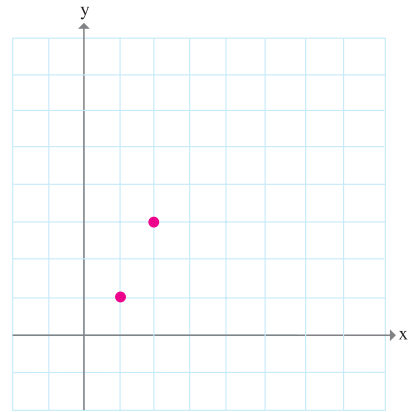
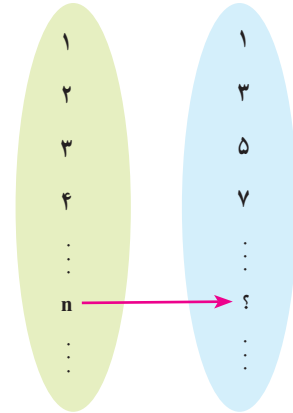
شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...	۱۰۰	...	n	...
تعداد دایره‌ها	۱	۳				

چرا این جدول یک تابع را نشان می‌دهد؟ نمایش زوج مرتبی این تابع :

$$f = \{(1,1), (2,3), (3,5), \dots, (100, \quad), \dots, (n, \quad), \dots\}$$

نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی این تابع را رسم کنید.

دامنه و برد این تابع را بنویسید. دامنه و برد چه مجموعه‌هایی هستند؟ نام ببرید.



همان‌گونه که از نمایش‌های مختلف تابع دیده می‌شود، عضو ۱ از دامنه به ۱ از برد و عضو ۲ از دامنه به ۳ از برد نظیر می‌شود. به جای این می‌توان با یک قرارداد کار را ساده‌تر کرد. معمولاً می‌نویسند $f(1)=1$ و $f(2)=3$ و گفته می‌شود که مقدار تابع f در نقطه ۱ برابر ۱ است و مقدار تابع f در نقطه ۲ برابر ۳ است. به همین ترتیب می‌توان نوشت :

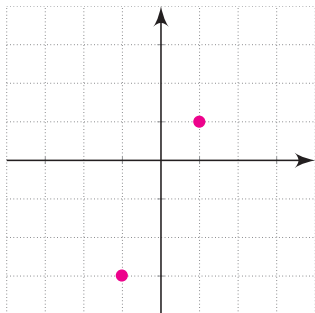
$$f(3)=5, f(4)=7, \dots, f(n)=2n-1, \dots$$

رابطه بین دامنه و برد تابع f را می‌توان به صورت یک عبارت ریاضی به شکل $f(n)=2n-1$ نوشت که در آن n یک عدد طبیعی است. این گونه نمایش تابع را نمایش جبری می‌نامند. برای مشخص کردن تابع f به صورت جبری باید به دامنه و برد آن هم توجه کنیم. دامنه تابع f مجموعه اعداد طبیعی است.

در بسیاری از موقعیت‌ها کار با نمایش جبری یک تابع، ساده‌تر و مناسب‌تر از کار با دیگر نمایش‌های تابع است.

کاردر کلاس

اگر تابعی با نمایش جبری $f(n) = n^2 + 1$ داده شده باشد و دامنه آن $A = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد، برد تابع f را به دست آورید.



جدول را کامل کنید و از آن برای رسم نمودار خط $y = 2x - 1$ استفاده کنید.

x	۱	۲	۳	-۱	۰			
y	۱	۳	۵	-۳				

آیا می‌توانید شباهت و تفاوت این جدول را با جدول فعالیت قبل نشان دهید؟ چرا این جدول هم یک تابع را نشان می‌دهد؟ این تابع را g بنامید.

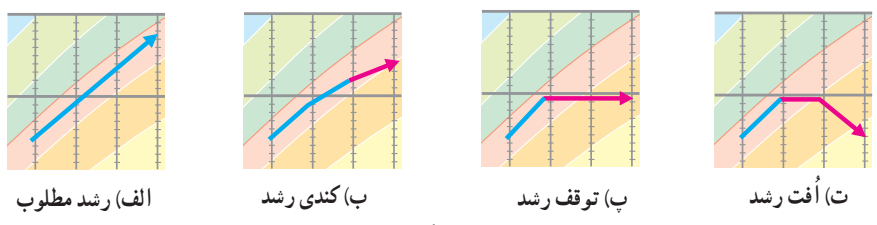
نمودار این تابع و تابع داده شده در فعالیت قبل چه تفاوتی با هم دارند؟ دامنه و برد این تابع را به دست آورید و با دامنه و برد تابع $f(n) = 2n - 1$ که در آن $n \in \mathbb{N}$ مقایسه کنید. جاهای خالی را کامل کنید.

$g(-\frac{1}{5}) =$ $g(0) =$ $g(\frac{2}{\sqrt{5}}) =$ $g(\sqrt{5}) =$ $g(10) =$
 نمایش جبری تابع داده شده در این «کار در کلاس» را بنویسید. $g(x) = \dots\dots\dots$
 در اینجا x یک عدد $\dots\dots\dots$ است.

هر تابع که بتوان آن را به شکل $y = ax + b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

فعالیت

هنگامی که پزشکان می‌خواهند دربارهٔ رشد یک کودک اظهار نظر کنند، نمودار وزن او را با نمودار شکل (۱) مقایسه می‌کنند. در مقایسهٔ نمودار وزن هر کودک با نمودار شکل (۱)، چهار وضعیت متفاوت ممکن است رخ دهد که در شکل (۲) نشان داده شده‌اند.



شکل ۲

جدول زیر نشان دهندهٔ وزن یک کودک است که آن را پزشک (یا مرکز بهداشتی) در پایان هر ماه طی یک سال، ثبت کرده است. این جدول یک تابع را نشان می‌دهد.

زمان (ماه)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
وزن (کیلوگرم)	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{2}$	۵	۵	۵	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{2}$	۸	$\frac{8}{5}$

شاید بیشتر شما نمودارهای وزن یا قد یک کودک را از بدو تولد تا هنگام ورود به مدرسه دیده باشید. شکل زیر نمودار تغییرات وزن یک کودک طبیعی را از هنگام تولد تا یک سالگی نشان می‌دهد. وزن یک کودک تابعی از زمان است.

شکل ۱- نمودار تغییرات در وزن یک کودک طبیعی

الف) به نظر شما در فاصله زمانی تولد تا سه ماهگی، رشد کودک با کدام یک از چهار وضعیت نشان داده شده در شکل (۲) مطابقت دارد؟

ب) در چه فاصله زمانی ای وزن او ثابت مانده است؟

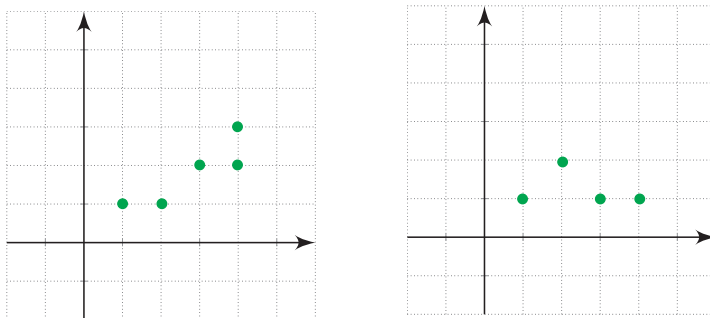
پ) اعداد داده شده در جدول را روی شکل (۱) مشخص کنید. نقاط به دست آمده را به یکدیگر وصل کنید تا نمودار جدیدی به دست آید. با مقایسه این نمودار با نمودار اصلی، رشد کودک از نظر وزن را در طی یک سال بررسی کنید.

وزن کودک در فاصله بین ماه‌ها اندازه‌گیری نشده بود؛ ولی به کمک نموداری که رسم کرده‌اید، می‌توانید وزن او را در فاصله بین ماه‌ها نیز به صورت تقریبی تعیین کنید.

ت) دامنه و برد این تابع را به دست آورید و نمودار پیکانی آن را نیز رسم کنید.

کار در کلاس

کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟ توضیح دهید.



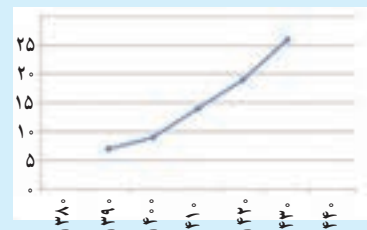
می‌توانید نمایش زوج مرتبی نمودارهای بالا را بنویسید و به کمک آن تابع بودن یا تابع نبودن آنها را معلوم کنید. دامنه و برد هر کدام را که تابع است، مشخص کنید.

با تکمیل جمله زیر معیاری برای تشخیص تابع بودن یک رابطه که به صورت نمودار ارائه می‌شود، به دست آورید.

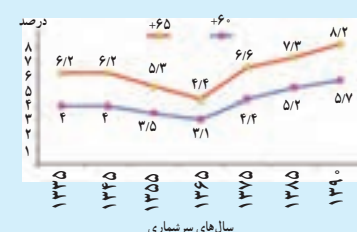
اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، هنگامی این نمودار تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها، نمودار را حداکثر در قطع کند.

از سال ۱۹۹۹، کمیسیون جمعیت و توسعه سازمان ملل شصت سالگی را به عنوان آستانه سالمندی در نظر گرفته است که هر روز افراد بیشتری در جهان به آن می‌رسند. منظور از سالمندی جمعیت، افزایش نسبت تعداد افراد ۶۰ ساله و بالاتر به ازای هر ۱۰۰ نفر جمعیت زیر ۱۵ سال است. طبق آمارهای سازمان ملل در سال ۲۰۱۲، در صورت تثبیت وضعیت حاضر، کشور ایران در سال ۲۰۵۰ میلادی (۱۴۳۰ شمسی) جزء پیرترین کشورها خواهد بود و حدود ۳۰٪ جمعیت را افراد مسن تشکیل خواهند داد. این در حالی است که در زمان انتشار این آمار (۲۰۱۲)، کشور ما با نسبت سالمندی ۸٪ جزء جوان‌ترین کشورها بوده است. نتایج پیش‌بینی‌های اخیر سازمان ملل در سال ۲۰۱۰ در مورد تحولات حجم جمعیت ایران تا ۱۰۰ سال آینده نشان می‌دهد که با ادامه روند کنونی سال ۱۴۸۰ جمعیت به حدود ۳۱ میلیون نفر با شاخص سالخوردگی ۴۷/۴ درصد کاهش خواهد یافت.

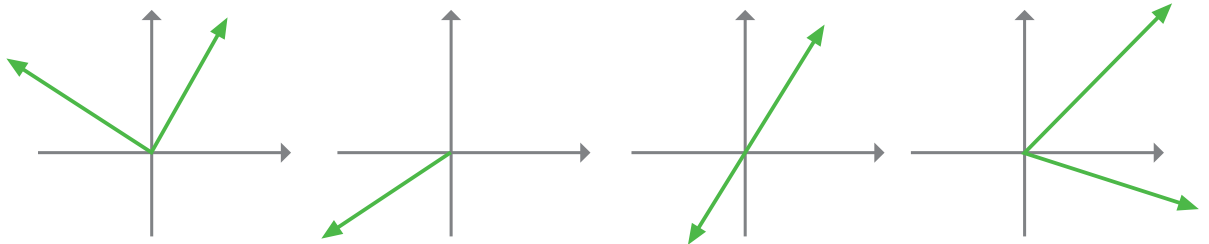
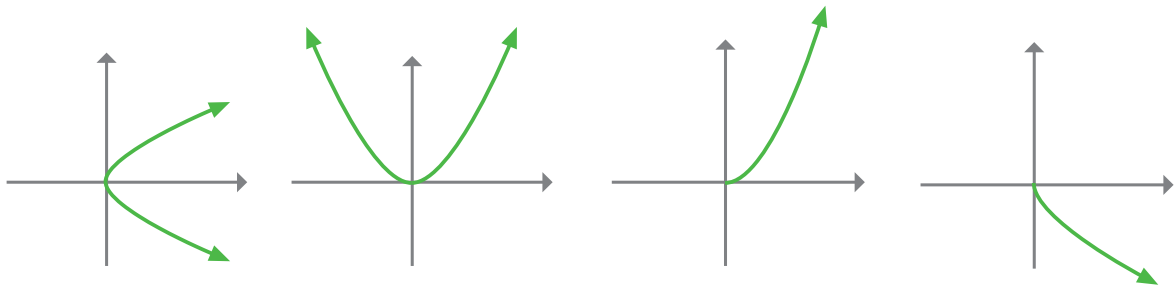
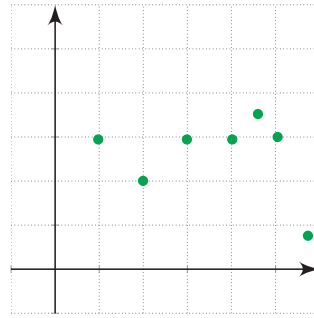
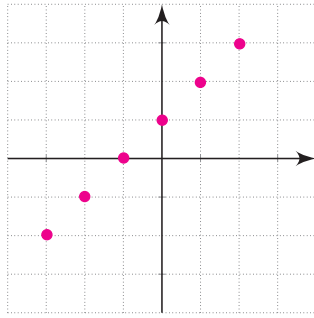
نمودار پیش‌بینی گروه سنی ۶۰ سال و بالاتر



نسبت جمعیت سالمند ایران در طی سال‌های سرشماری

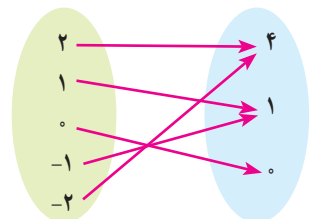
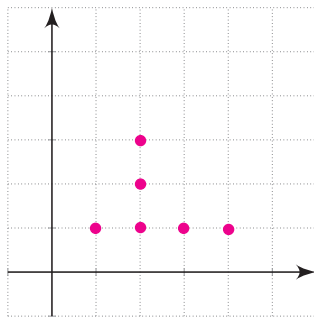
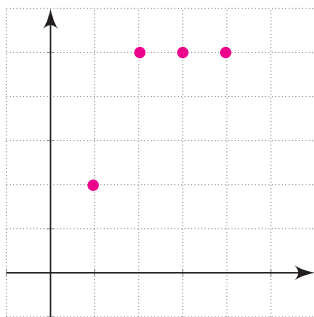


کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟



تمرین

۱ کدام یک تابع است؟
دامنه و برد هر تابع را معلوم کنید.



۲ تابعی مثال بزنید که :

الف) دامنه آن تنها شامل دو عضو باشد.

ب) برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد.

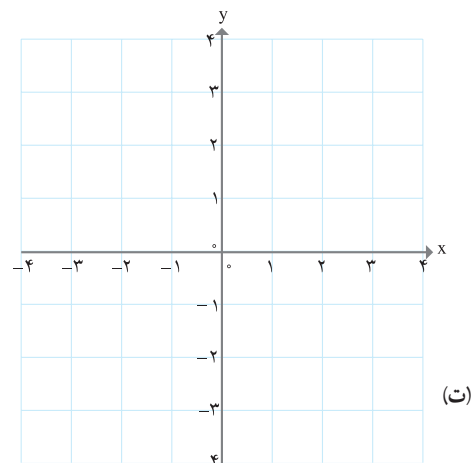
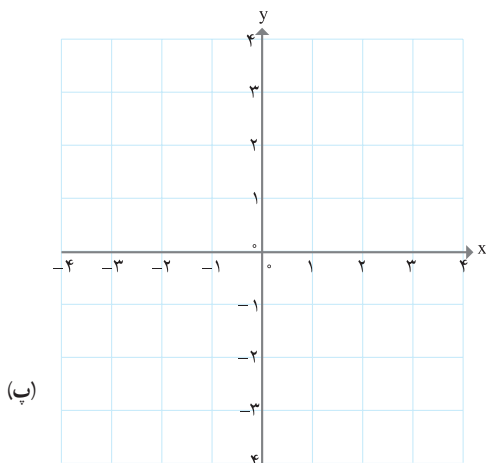
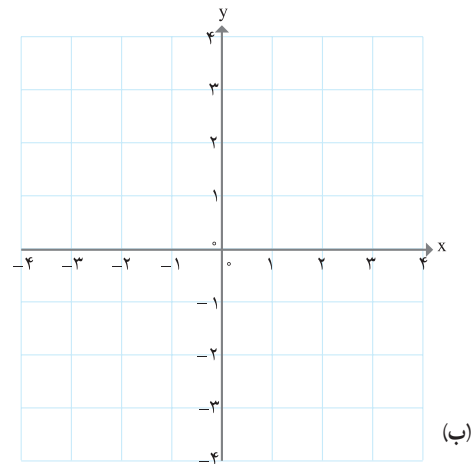
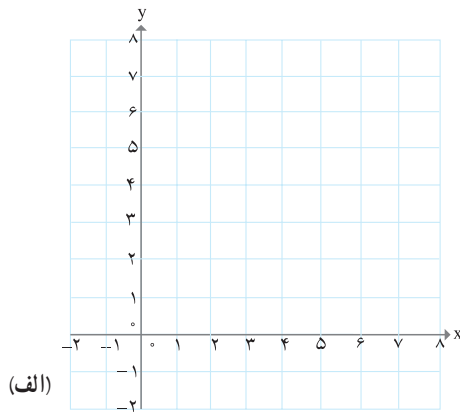
پ) دامنه آن تنها یک عضو داشته باشد.

ت) دامنه آن نامتناهی باشد، ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد.

ث) دامنه و برد آن نامتناهی باشند.

۳ جاهای خالی در جدول را کامل کنید و نمودار توابعی را که در جدول، توصیف شده‌اند، رسم کنید.

	(الف)	(ب)	(پ)	(ت)
تابع	$f(x) = 2x$	$g(x) = 2x$	$h(x) = 2x$	$y = 2x$
دامنه	$\{1, 2, 3, 4\}$	مجموعه اعداد حقیقی	$[2, 3]$	مجموعه اعداد حقیقی نامنفی
برد	?	مجموعه اعداد حقیقی	?	?



۴ یک شمع 20° سانتی متر ارتفاع دارد و در هر ساعت 4 سانتی متر آن می سوزد. پس از چند ساعت شمع خاموش خواهد شد؟ جدولی تنظیم کنید و در ساعات مختلف ارتفاع شمع را محاسبه کنید.

x (زمان)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y (ارتفاع شمع)						

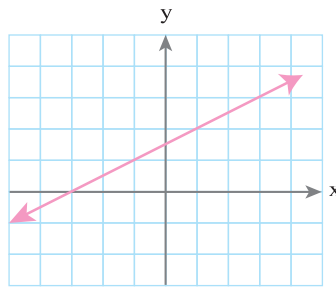
نمودار این تابع را رسم کنید.
چرا این تابع، یک تابع خطی است؟

۵ آیا خط $x = 2$ را می توان به عنوان یک تابع در نظر گرفت؟ چرا؟ خط $y = 5$ را چگونه در حالت کلی چه موقع یک خط را می توان یک تابع نیز در نظر گرفت؟

۶ نمایش جبری سه تابع خطی را بنویسید که دامنه آن بازه $[-3, 5]$ باشد. چه تعداد از این گونه توابع وجود دارند؟

۷ نمایش جبری تابع زیر را که نمودار آن ارائه شده است، به دست آورید.

از بین نمایش های مختلفی که برای این تابع می دانید، کدام یک مناسب تر است؟



۸ جدول زیر دمای سنگ ها در عمق های متفاوت زیر سطح زمین را نشان می دهد.

عمق (کیلومتر)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
دما (سانتی گراد)	۵۵	۹۰	۱۲۵	۱۶۰	۱۹۵	۲۳۰

الف) توضیح دهید که چرا این جدول یک تابع را به دست می دهد. نمودار آن را رسم کنید.

ب) معادله ای برای این تابع به دست آورید.

پ) دمای یک سنگ را که در عمق 10° کیلومتری زیر زمین است، بیابید.

۹ الف) تابع $f(x) = -3$ را رسم کنید و مقادیر $f(2)$ و $f(100)$ و $f(-5)$ و $f(\sqrt{5})$ و $f(-\frac{3}{4})$ را به دست آورید.

ب) اگر دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار تابع را رسم کنید.

پ) نمودار این تابع را وقتی که دامنه آن بازه $[-2, 5]$ باشد، نیز رسم کنید.

۱۰ برای یک تابع خطی می‌دانیم که: $f(2) = 11$ و $f(0) = 7$. نمودار این تابع را رسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید.

۱۱ آیا جدول زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟ چرا؟

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۴	۹	۱۵	۲۵	۳۶

۱۲ علی در هر دقیقه پیاده‌روی، مسافت $\frac{1}{2}$ کیلومتر را طی می‌کند. اگر مسافتی را که علی در t دقیقه طی می‌کند، با $f(t)$ نمایش دهیم، کدام عبارت نمایش جبری این تابع را به دست می‌دهد؟

الف) $f(t) = t - \frac{1}{2}$

ب) $f(t) = \frac{1}{2}t$

پ) $f(t) = t + \frac{1}{2}$

ت) $f(t) = \frac{1}{2} - t$

۱۳ اگر درباره‌ی تابع g داشته باشیم: $g(4) = 3$, $g(-2) = \frac{1}{3}$, $g(1) = 5$, $g(0) = 2$ ؛ g را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

۱۴ برای اندازه‌گیری دما از واحدهای «سانتی‌گراد» و «فارنهایت» استفاده می‌شود که با رابطه $F = \frac{9}{5}C + 32$ به یکدیگر وابسته‌اند.

الف) 20° - درجه‌ی سانتی‌گراد، چند درجه‌ی فارنهایت است؟

ب) 104° - درجه‌ی فارنهایت چند سانتی‌گراد است؟

پ) معادله‌ای بنویسید که سانتی‌گراد را برحسب فارنهایت به دست آورد.

ت) آیا رابطه‌ی بین این دو واحد، یک تابع خطی را معلوم می‌کند؟

۱۵ طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه‌ی ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل را برحسب تابعی از عرض آن بیان کند.

۱۶ دو تابع مثال بزنید که دامنه و برد آنها یکی باشد، ولی هیچ زوج مرتب مشترکی نداشته باشند.

۱۷ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $[2, 0]$ و برد آن $[1, -2]$ باشد. چه تعداد از این گونه توابع می‌توان رسم کرد؟

درس سوم: انواع تابع

انواع متفاوتی از توابع وجود دارند. در این درس با برخی از آنها آشنا می‌شویم.

فعالیت

۱ جدول‌های زیر را کامل کنید.

طول ضلع مربع	۰/۱	$\frac{1}{2}$	۱	۳		۲/۵			x
مساحت آن	۰/۰۱				۱۶			۱۴۴	

شعاع دایره	$\frac{1}{2}$	۲	۳	۵			r
مساحت آن	$\frac{\pi}{4}$	4π					

اگر x طول ضلع یک مربع باشد، مساحت آن تابعی از است و به صورت $f(x) = \dots\dots\dots$ قابل نمایش است.

اگر r شعاع یک دایره باشد، مساحت دایره تابعی از است و به صورت $g(r) = \dots\dots\dots$ قابل نمایش است. چون f و g به صورت یک چند جمله‌ای درجه دوم به ترتیب از x و r بیان شده‌اند، آنها را توابع درجه دوم می‌نامیم. حجم یک کره را برحسب یک تابع درجه سوم از r (شعاع کره) بنویسید :

$V(r) = \dots\dots\dots$

توابعی را که نمایش جبری آنها، چند جمله‌ای‌های جبری از یک متغیر هستند، توابع چند جمله‌ای می‌نامیم.

توابع زیر همگی توابع چند جمله‌ای اند :

$f(x) = 2x^2 + 5x + 1$

$g(x) = 4x^2 - 3$

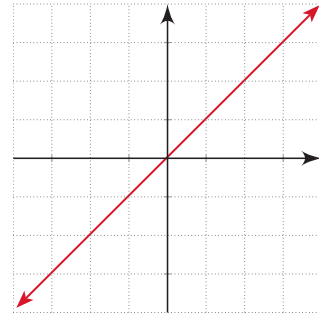
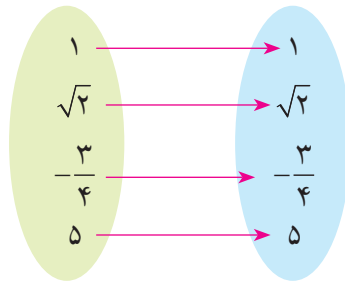
$h(a) = a^2 + 2a^2 - 4a - 9$

$r(t) = -\frac{3}{5}t^4 + t + \sqrt{2}$

تابع f را به صورت $y = 2x^2 + 5x + 1$ نیز نمایش می‌دهند. بقیه توابع رانیز به این صورت نمایش دهید.

۲ دامنه و برد توابع زیر را به دست آورید. این سه تابع چه شباهت و چه تفاوتی با هم دارند؟

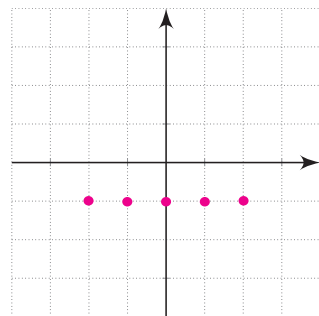
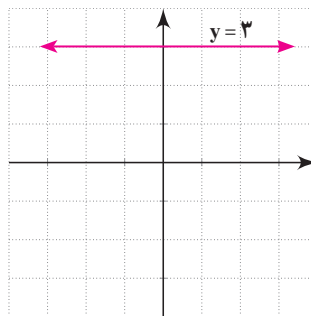
$$f = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$$



اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنه تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می‌نامند. اگر دامنه تابع همانی را \mathbb{R} در نظر بگیریم، نمودار آن همان خط $y = x$ است که با معادله $f(x) = x$ هم نمایش داده می‌شود.

۳ سه تابع زیر را با هم مقایسه کنید و دامنه و برد آنها را بنویسید. این سه تابع در چه ویژگی‌ای مشترک اند؟

ساعت	۸	۹	۱۰
دمای هوا	۱۹	۱۹	۱۹



تابعی مانند f را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می‌نامیم. اگر این عضو را k بنامیم، تابع ثابت را معمولاً با معادله $f(x) = k$ نمایش می‌دهیم.

کار در کلاس

۱ برای هر مورد مثالی به دلخواه ارائه کنید.

مثالی از یک تابع چند جمله‌ای ارائه کنید.

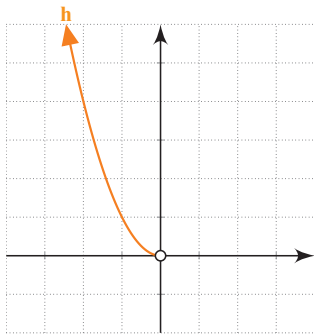
یک تابع همانی مثال بزنید که دامنه آن $\{\alpha, \beta, 2, 5\}$ باشد.

یک تابع مثال بزنید که دامنه و برد آن برابر باشند؛ ولی تابع همانی نباشد.

مثالی از یک تابع ثابت ارائه کنید که دامنه آن ۵ عضوی باشد.

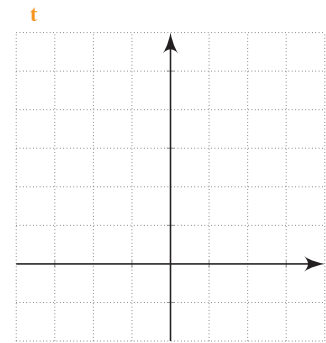
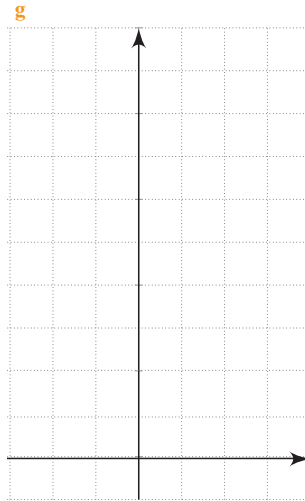
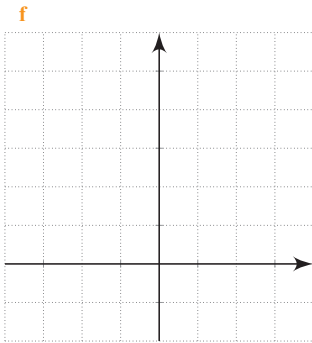
مثالی از تابع ثابت در دنیای واقعی ارائه کنید.

۲ نمودارهای توابع داده شده را رسم و با یکدیگر مقایسه کنید. نمودار تابع h رسم شده است. جدول را کامل کنید.



تابع	$f(x) = x^2$	$g(x) = x^2$	$h(x) = x^2$	$t(x) = x^2$
دامنه	$\{-2, 0, 1, 2\}$	$[-2, 3]$	مجموعه اعداد حقیقی منفی	مجموعه اعداد حقیقی
برد				

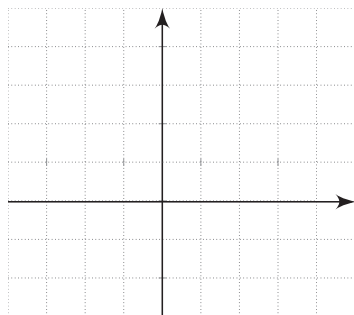
دامنه و برد را روی شکل نیز نشان دهید.



تذکر: اگر نمایش جبری تابعی داده شده باشد؛ ولی دامنه آن مشخص نشده باشد، معمولاً بزرگ‌ترین مجموعه ممکن را دامنه در نظر می‌گیریم. مثلاً دامنه تابع $f(x) = x^2$ را مجموعه اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم. در غیراین صورت باید دامنه را به طور دقیق مشخص کنیم.

شعابیت

جدول زیر تابعی را نشان می‌دهد که اعداد داده شده را به قدرمطلق آن نظیر می‌کند. جاهای خالی را پر و نمودار تابع را رسم کنید. دامنه و برد این تابع را معلوم کنید.



x	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	5
$f(x)$	2	$\frac{1}{2}$				

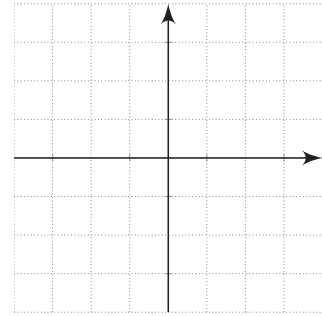
تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدرمطلق آن در برد نظیر می‌کند، تابع قدرمطلق نامیده می‌شود. تابع قدرمطلق را با $f(x) = |x|$ یا $y = |x|$ نمایش می‌دهند.

اگر دامنه یک تابع قدرمطلق مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار آن را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

تابع قدرمطلق را به صورت نیز نمایش می دهند.

با توجه به اینکه برای $x \geq 0$ و $x < 0$ تابع دارای معادله های مختلفی است، این تابع یک تابع چند ضابطه ای (قطعه ای) نامیده می شود.

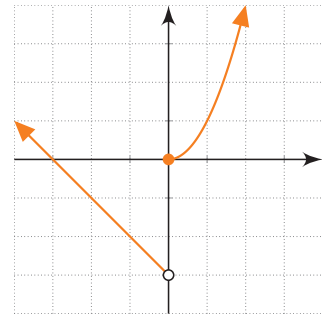


مثال

تابع مقابل نیز یک تابع قطعه ای است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x - 3 & x < 0 \end{cases}$$

نمودار این تابع برای اعداد مثبت همان نمودار سهمی $y = x^2$ است و برای اعداد منفی نمودار تابع با نمودار خط $y = -x - 3$ برابر است. نمودار $f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است.



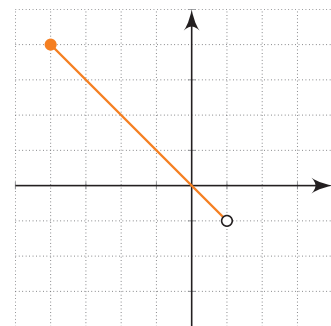
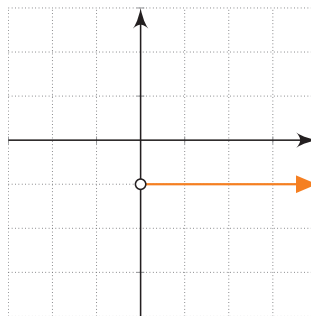
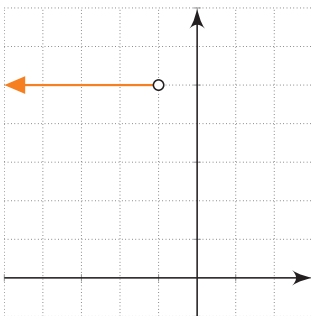
فعالیت

توابع f , g , h و نیز قسمتی از نمودارهای آنها داده شده اند. نمودارها را کامل و مشخص کنید هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ دامنه و برد هر تابع را نیز مشخص کنید.

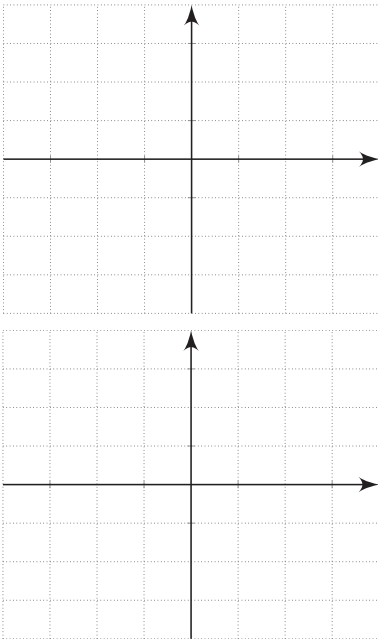
$$f(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x - 4 & x > 1 \\ \frac{5}{2} & x = 1 \\ -x & -4 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 2x & 2 \leq x \leq 3 \\ 5 & x < -1 \end{cases}$$



مقادیر $f(3)$, $g(-2)$, $f(-\frac{1}{5})$, $h(\sqrt{5})$ و $g(0)$ را بیابید.

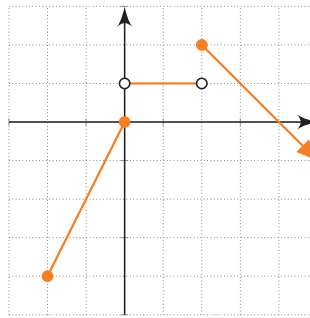


۱ نمودار تابع‌های زیر را رسم و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 3x + 1 & x \leq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x > 2 \\ 1 & -3 < x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x & x \leq -3 \end{cases}$$

مقادیر $f(0)$, $f(5)$, $g(2)$, $f(-2)$ و $g(-\frac{1}{5})$ را به دست آورید.

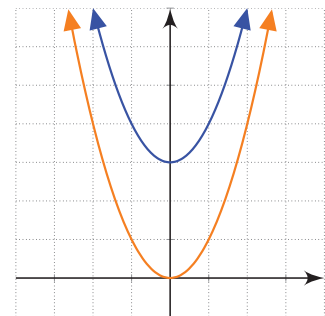
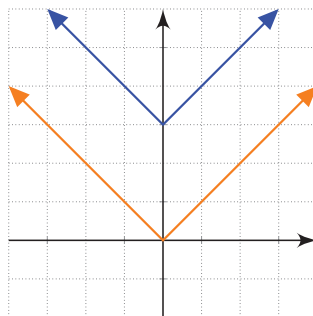
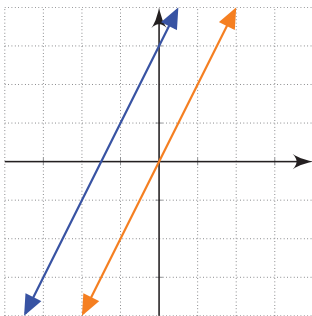
۲ نمودار تابع قطعه‌ای f داده شده است. ضابطه آن را به دست آورید. دامنه و برد این تابع را به دست آورید.



رسم برخی توابع به کمک انتقال

شعاعیت

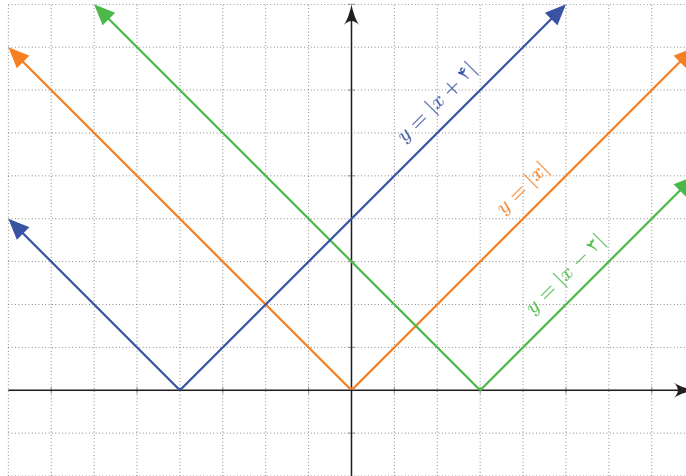
نمودارهای توابع $f(x) = 2x$ و $g(x) = |x|$ و $h(x) = x^2$ و توابع $f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = |x| + 3$ و $h(x) = x^2 + 3$ داده شده‌اند. توضیح دهید که سه تابع آخر چگونه به کمک سه تابع اول رسم شده‌اند. سپس توابع $f(x) = 2x - \frac{3}{4}$ و $g(x) = |x| - \frac{3}{4}$ و $h(x) = x^2 - \frac{3}{4}$ را به همین روش رسم کنید.



با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ ، می‌توان نمودار تابع $f(x) + k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد در امتداد محور y به دست آورد. اگر $k > 0$ باشد انتقال در جهت مثبت و اگر $k < 0$ باشد انتقال در جهت منفی خواهد بود.

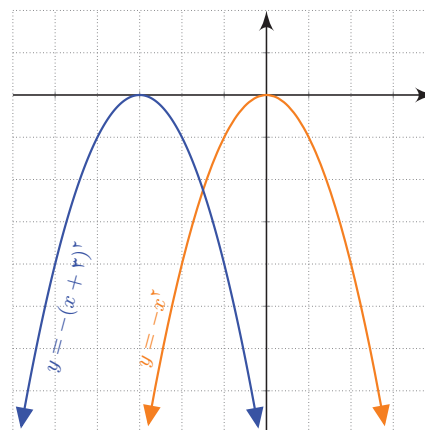
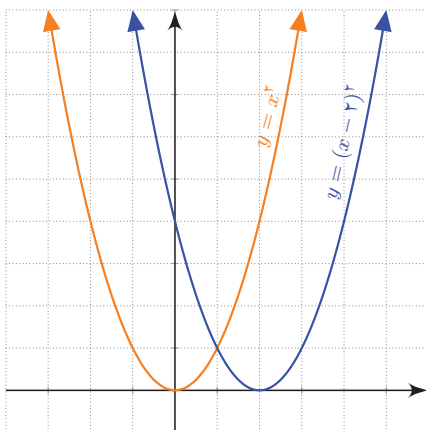
کار در کلاس

۱ در شکل زیر دامنه و برد توابعی را که به کمک تابع $f(x) = |x|$ رسم شده‌اند، بیابید. آیا می‌توانید توضیح دهید نمودار این توابع چگونه رسم شده‌اند؟



برای رسم نمودار تابع $f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در امتداد محور x انتقال دهیم. اگر $k > 0$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k < 0$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

۲ در شکل‌های زیر به کمک نمودار تابع $f(x) = x^2$ و $f(x) = -x^2$ نمودار توابع دیگری رسم شده‌اند. دامنه و برد آنها را بیابید. نمودار $f(x) = (x+1)^2$ را نیز رسم کنید.



در شکل‌های زیر نمودار توابع درجه دوم f, g, h و t رسم شده‌اند.

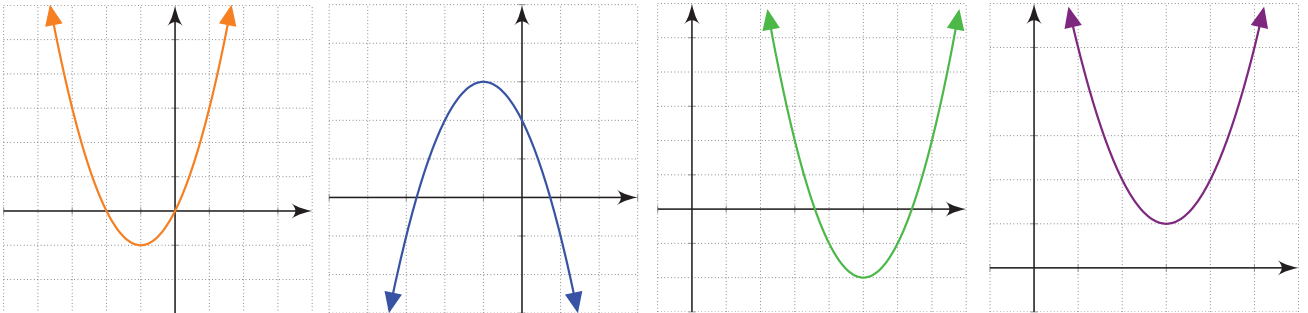
$$f(x) = (x-5)^2 - 2$$

$$g(x) = (x+1)^2 - 1$$

$$h(x) = (x-3)^2 + 1$$

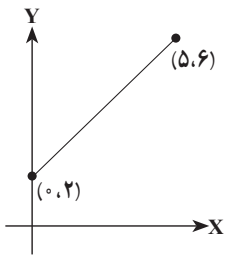
$$t(x) = -(x+1)^2 + 3$$

الف) هر یک از نمودارها کدام تابع را نشان می‌دهند؟
ب) دامنه و برد هر یک از این توابع را به دست آورید:

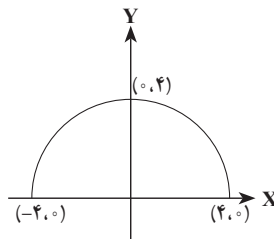


تمرین

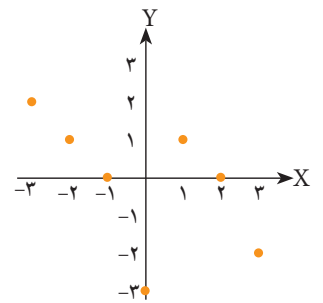
- ۱) تابع $f(x) = 3x - 1$ را که دامنه آن مجموعه $\{\frac{1}{p}, 0, 5\}$ است، رسم کنید. برد این تابع را به دست آورید و نمایش زوج مرتبی و نمودار بیکنانی آن را ارائه دهید. اگر دامنه این تابع \mathbb{R} باشد، پاسخ‌ها چگونه خواهد بود؟
- ۲) در شکل‌های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده‌اند. دامنه و برد هر یک از این توابع را به کمک نمودار آنها مشخص کنید. در هر مورد که امکان دارد، دامنه و برد را به صورت یک بازه نمایش دهید. نمایش جبری توابع (الف) و (ج) را بنویسید.



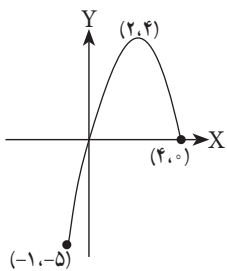
(الف)



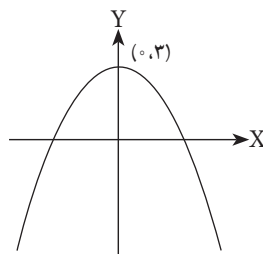
(ب)



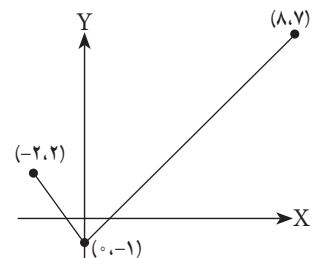
(پ)



(ت)



(ث)



(ج)

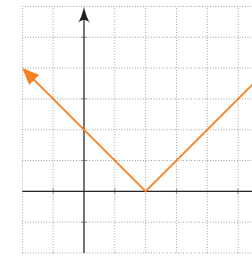
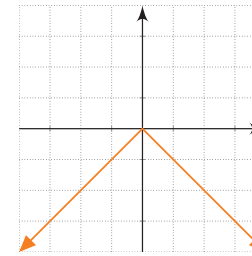
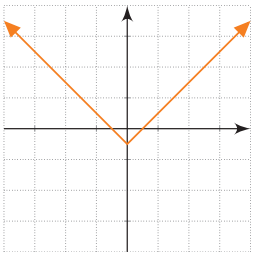
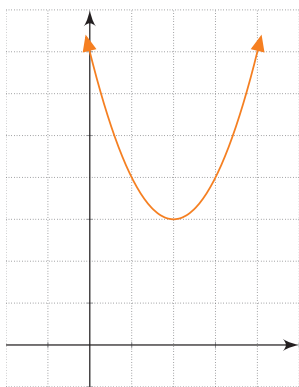
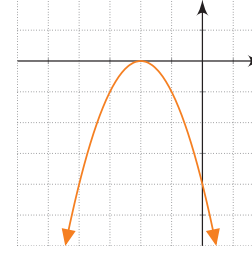
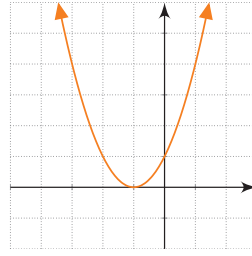
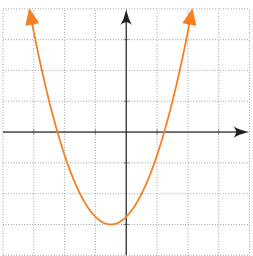
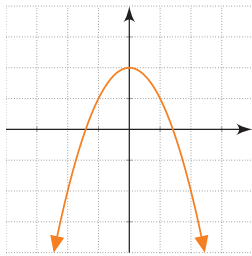
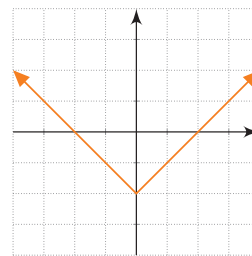
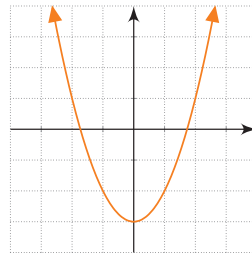
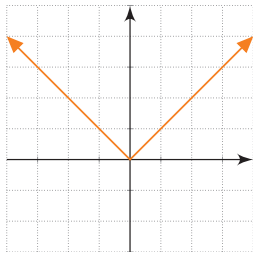
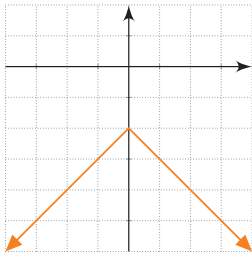
۳) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

- الف) دامنه تابع $f(x) = x^2 - 1$ برابر $(0, +\infty)$ و بُرد آن نیز $(0, +\infty)$ است.
 ب) دامنه تابع $f(x) = |x| - \frac{1}{3}$ همه اعداد حقیقی و بُرد آن $(2, +\infty)$ است.
 پ) دامنه تابع ثابت $f(x) = 2$ برابر $(-\infty, +\infty)$ است.

ت) اگر $f(x) = 2x + 1$ آنگاه، $f(1) = \frac{f(2)}{2}$.

۴) یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه 30° متر باشد، حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.

۵) هریک از نمودارهای زیر کدام یک از تابع‌های (الف) تا (ر) را نمایش می‌دهد؟ دامنه و برد این توابع چیست؟



الف) $y = x^2 - 3$

ث) $y = (x + 1)^2$

خ) $y = -|x| - 2$

ب) $y = -x^2 + 2$

ج) $y = |x| - \frac{1}{3}$

د) $y = (x - 2)^2 + 3$

پ) $y = |x|$

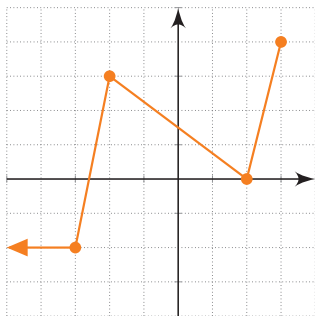
چ) $y = |x - 2|$

ذ) $y = |x| - 2$

ت) $y = -|x|$

ح) $y = -(x + 2)^2$

ر) $y = (x + \frac{1}{3})^2 - 3$



۶ فرض کنیم دامنهٔ هر یک از توابع تمرین ۵ به بازه $[-۲, ۳]$ محدود شده باشد. در این صورت برد هر تابع را پیدا کنید. از نمودارها کمک بگیرید.

۷ نمودار تابع f داده شده است. ضابطهٔ این تابع را بنویسید و مقادیر خواسته شده را حساب کنید.

$$f(\sqrt{5}) \quad f(۶) \quad f(۳) \quad f\left(\frac{1}{۲}\right) \quad f(۰) \quad f\left(-\frac{۵}{۲}\right)$$

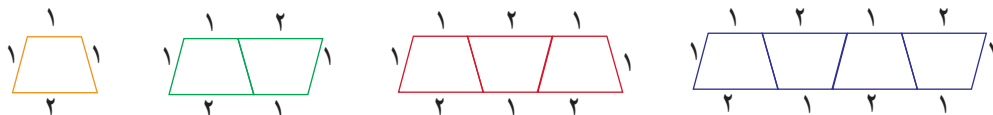
۸ نمودار یک تابع خطی از نقاط $(۰, ۳)$ و $(۴, ۳)$ می‌گذرد. $f(-۱)$ و $f(-۴)$ را به دست آورید.

۹ هزینهٔ مکالمهٔ تلفنی با کشور دیگر، از زمان برقراری تماس برای ۳ دقیقه یا کمتر، ۲ هزار تومان است و پس از آن برای هر دقیقه یک هزار تومان به هزینهٔ آن اضافه می‌شود. مثلاً برای زمان بیشتر از ۳ دقیقه تا دقیقاً ۴ دقیقه، ۳ هزار تومان دریافت می‌شود. نمودار هزینه را برحسب زمان تا پایان زمان ۶ دقیقه رسم کنید.

۱۰ کدام یک از رابطه‌های زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟ چرا؟ نمودار هر دو معادله را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & x > ۰ \\ x + ۲ & x \leq ۲ \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} ۲x & x < ۰ \\ x + ۱ & x \geq ۰ \end{cases}$$

۱۱ الگوی زیر از تعدادی دوزنقه تشکیل شده است.



الف) جدول زیر را کامل کنید.

تعداد دوزنقه‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	n
محیط شکل						

ب) چرا رابطهٔ بین تعداد دوزنقه‌ها و محیط شکل، یک تابع را معلوم می‌کند؟ دامنه و برد این تابع چیست؟ نمودار آن را رسم کنید.

۱۲ نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط $(-۲, ۱)$ و $(۲, -۳)$ می‌گذرد و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید و نمودار آن را رسم و دامنه و برد تابع را مشخص کنید.