فصل

۴ مثلثات

کرمان، کلوت شهداد

ماهوارهٔ امید اولین ماهوارهٔ ساخت ایران است که در بهمن ماه ۱۳۸۷ در مدار فضا قرار گرفت. در شکل بالا این ماهواره در h کیلومتری سطح زمین قرار دارد و در مدار خودش حول خط استوا حرکت می‌کند. اگر α زاویهٔ بین مرکز زمین (نقطهٔ o) تا ماهوارهٔ s و دوردست‌ترین نقطهٔ قابل دید روی کرهٔ زمین (نقطه p) تا این ماهواره باشد و شعاع تقریبی کرهٔ زمین ۶۴۰۰ کیلومتر باشد آنگاه $\cos\alpha = \frac{۶۴۰۰}{۶۴۰۰+h}$ و

$\widehat{PA} = ۶۴۰۰\times\hat{\alpha}$ (بر حسب رادیان)

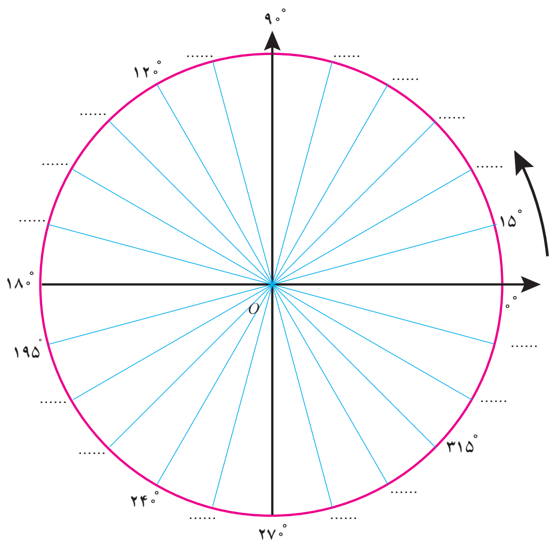
درس اوّل

واحدهای اندازه‌گیری زاویه

یادآوری

● اگر محیط دایره‌ای را به ۳۶۰ کمان مساوی تقسیم کنیم، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌روی هرکدام از این کمان‌ها **۱ درجه** است. اندازهٔ هر کمان با زاویهٔ مرکزی روبه‌روی آن کمان برحسب درجه برابر است.

● **دایرهٔ مثلثاتی** دایره‌ای است به شعاع واحد که جهت مثبت آن برخلاف گردش عقربه‌های ساعت است. به این جهت، **جهت مثلثاتی** می‌گوییم. معمولاً مرکز این دایره مبدأ مختصات است.

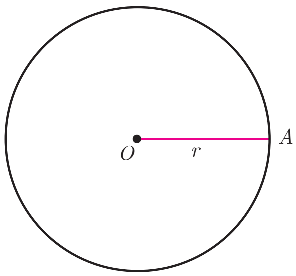


شکل مقابل یک دایرهٔ مثلثاتی را نمایش می‌دهد که به ۲۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. در جاهای خالی زاویهٔ مناسب را روی شکل مشخص کنید.

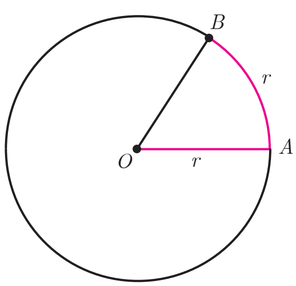
برای اندازه‌گیری زاویه، واحد دیگری وجود دارد که در ادامه با آن آشنا می‌شوید.

در فعالیت زیر رابطهٔ بین اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به یک کمان و طول کمان روبه‌روی آن مشخص می‌شود.

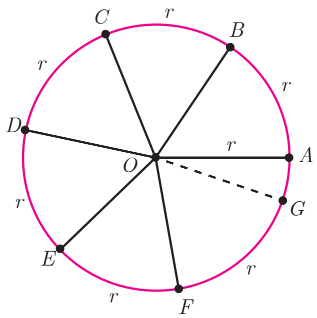
فعالیت



۱ یک شیء دایره‌ای شکل انتخاب کنید و نخی را دور آن بپیچید و سپس باز کنید؛ طول نخ را با خط‌کش اندازه بگیرید. طول این نخ چه کمیتی از دایره را مشخص می‌کند؟ با استفاده از این مقدار شعاع دایره را به‌دست آورید.



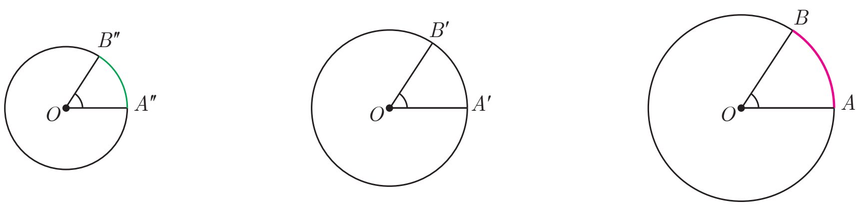
۲ قطعه نخی را به اندازهٔ شعاع دایره برش دهید و آن را از نقطهٔ A روی آن دایره قرار دهید تا نقطهٔ B حاصل شود (شکل مقابل). اندازه $\widehat{AOB}$ را با نقاله اندازه‌گیری کنید. این زاویه تقریباً چند درجه است؟



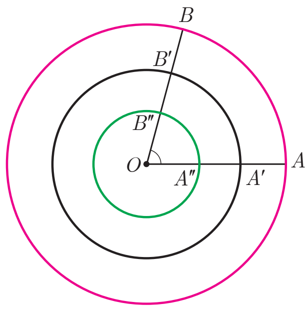
۳ دوباره این قطعه نخ را از نقطهٔ B روی دایره قرار دهید تا نقطهٔ C حاصل شود و این کار را ادامه دهید تا نقاط D، E، F و G روی دایره به دست آیند (شکل مقابل). در این حالت $\widehat{BOC}$ ، $\widehat{COD}$ ، $\widehat{DOE}$ ، $\widehat{EOF}$ و $\widehat{FOG}$ با زاویه .... برابر و هر یک تقریباً .... درجه است. آیا دو نقطهٔ G و A برهم منطبق می‌شوند؟
به این ترتیب ۶ زاویهٔ مرکزی حاصل می‌شود که طول کمان روبه‌روی هر یک از آنها با .... دایره برابر است. به هر یک از این زاویه‌ها **یک رادیان** می گوییم.

> **۱ رادیان** برابر است با اندازهٔ زاویهٔ مرکزیِ روبه‌رو به کمانی از دایره به طول شعاع دایره.

در تمام دایره‌های زیر اندازهٔ زاویهٔ مشخص شده ۱ رادیان است. در هر کدام با استفاده از نقاله اندازهٔ زاویه را بر حسب درجه مشخص کنید.

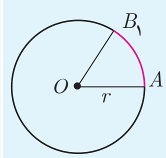
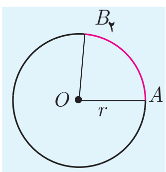
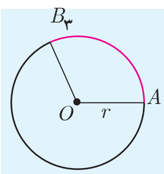
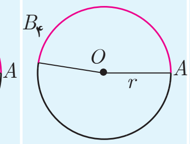
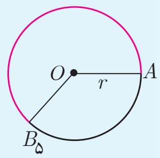
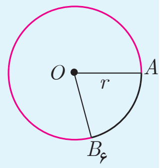
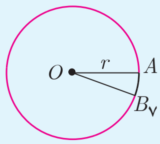


به عبارت دیگر اگر اندازهٔ $\widehat{AOB}$ ، ۱ رادیان باشد، در شکل مقابل داریم :



$$OA = \overset{\frown}{AB}$$
$$OA' = \overset{\frown}{A'B'}$$
$$OA'' = \overset{\frown}{A''B''}$$

۴ جدول زیر را کامل کنید.

شکل							
طول کمان AB_i $1\leq i\leq 7$	r	$\frac{3}{2}r$	$2r$		$4r$		$6r$
اندازهٔ زاویه $\angle AOB_i$ $1\leq i\leq 7$	۱ رادیان	$\frac{3}{2}$ رادیان	۲ رادیان	۳ رادیان		۵ رادیان	

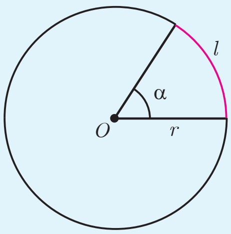
همان‌طور که می‌بینید در هر ستون با تقسیم طول کمان به اندازهٔ شعاع دایره (r)، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مربوط به آن بر حسب رادیان به‌دست می‌آید.
با توجه به جدول صفحهٔ قبل می‌توان گفت:

$$\frac{\text{طول کمان روبه‌روی زاویه}}{\text{اندازهٔ شعاع دایره}} = \text{اندازهٔ یک زاویه برحسب رادیان}$$

اگر l طول کمان روبه‌روی زاویه، r اندازهٔ شعاع دایره و α اندازهٔ زاویه برحسب رادیان باشد، آنگاه رابطهٔ بالا را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

در رابطهٔ بالا l و r هم واحدند.



کار در کلاس

با استفاده از رابطهٔ بالا جدول زیر را کامل کنید:

	۱۰ متر	۵۰ متر	۹۰ سانتی‌متر	۲۰۰ سانتی‌متر		۵۰۰ سانتی‌متر		l
۲۰ سانتی‌متر		۱۰ متر		۱ متر	۰/۵ متر	۵ متر	۵ سانتی‌متر	r
۲۰ رادیان	۱۰ رادیان		۳ رادیان		۱/۵ رادیان		۱ رادیان	α

یادآوری

می‌دانیم نسبت محیط هر دایره به اندازهٔ قطر آن عددی ثابت است که آن را با π نمایش می‌دهند و به آن عدد پی می‌گویند. مقدار تقریبی این عدد ۳/۱۴ است. حال جدول زیر را کامل کنید:

π رادیان	۳/۱۴ رادیان	۳ رادیان	۲ رادیان	۱ رادیان	۰/۵ رادیان	**زاویه برحسب رادیان**
دقیقاً °۱۸۰	تقریباً	تقریباً	تقریباً	تقریباً °۵۷	تقریباً	**زاویه برحسب درجه**

بنابراین، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان نیم دایره برابر است با .... درجه یا .... رادیان. به عبارت دیگر اندازهٔ زاویه نیم‌صفحه برابر است با .... رادیان. در نتیجه:

$$\frac{\pi}{۱۸۰} \text{ رادیان} = \text{یک درجه}$$

به این ترتیب :

$\pi = ۱۸۰^\circ$ رادیان

$\xrightarrow{\div ۲}$ $۹۰^\circ =$ ...... رادیان

$\xrightarrow{\div ۳}$ ...... $= \frac{\pi}{۳}$ ......

$\xrightarrow{\div ۴}$ ...... $=$ ...... رادیان

$\xrightarrow{\div ۶}$ $۳۰^\circ =$ ...... رادیان

کار در کلاس

۱ مطابق نمونه هریک از زاویه‌ها را از درجه به رادیان تبدیل کنید :

$۳۰^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{۱۸۰}\text{ رادیان}} \frac{\pi}{۶}$ رادیان

$۳۶^\circ \longrightarrow$ ....

$۴۵^\circ \longrightarrow$ ....

$۶۰^\circ \longrightarrow$ ....

$۹۰^\circ \longrightarrow$ ....

$۱۸۰^\circ \longrightarrow$ ....

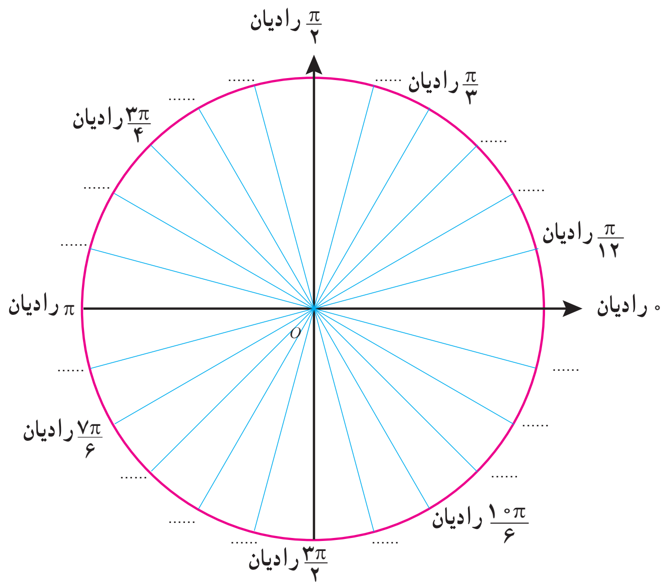
اگر D اندازهٔ زاویهٔ α برحسب درجه و R اندازهٔ زاویه α برحسب رادیان باشد، آنگاه

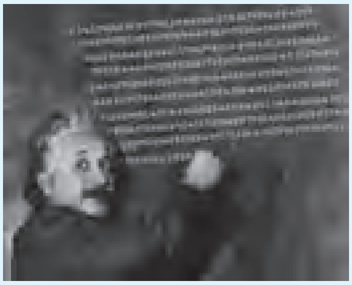
$$\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ رادیان}}$$

۲ حال جدول زیر را با استفاده از این رابطه کامل کنید :

D (درجه)	۵°		۲۴°		۱۲۰°	
R (رادیان)	$\frac{\pi}{۳۶}$	$\frac{\pi}{۷}$		$\frac{۲\pi}{۵}$		$\frac{۵\pi}{۴}$

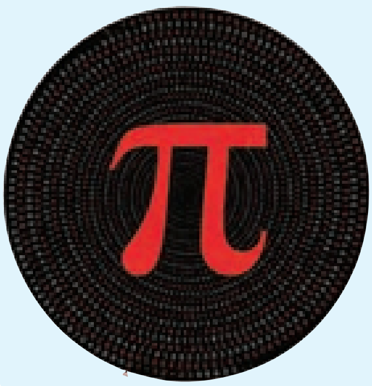
۳ در شکل زیر در هریک از جاهای خالی زاویهٔ مناسب را برحسب رادیان مشخص کنید.





خواندنی

روز چهاردهم مارس به عنوان روز جهانی عدد پی نام‌گذاری شده است؛ زیرا اولین سه رقم این عدد تاریخ ۱۴ مارس را به‌صورت ۳/۱۴ نشان می‌دهد. این تاریخ مصادف با سالروز تولد آلبرت انیشتین نیز است. تاکنون حدود ۱۳ تریلیون رقم بعد از ممیز عدد پی محاسبه شده است. باتوجه به اصم بودن این عدد و بی‌قاعده بودن ارقام اعشاری آن امکان یافتن هر نوع عددی از جمله تاریخ تولد، شماره حساب بانکی، شماره تلفن و نظایر آنها در بین ارقام آن وجود دارد. مثلاً تاریخ تولد مرحوم پروفسور محمود حسابی ۳ اسفند ۱۲۸۱ است که می‌توان آن را به‌صورت نمایش ۶ رقمی ۸۱۱۲۰۳ نوشت. از طریق سامانهٔ mypiday.com می‌توان این را در بین ارقام اعشاری عدد پی یافت. شکل زیر ارقام عدد پی را تا رسیدن به این نمایش نشان می‌دهد. حال شما از طریق این سامانه تاریخ تولد خودتان را در بین ارقام عدد پی بیابید.



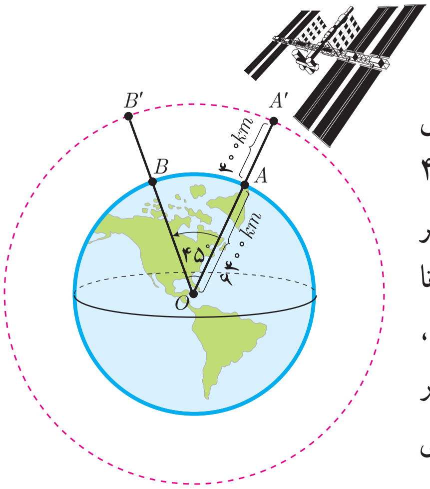
خواندنی

یک زاویه برحسب رادیان را با استفاده از ماشین حساب می‌توان به طور تقریبی برحسب درجه محاسبه کرد. در اغلب ماشین حساب‌ها دکمه‌ای با نماد π وجود دارد. مثلاً برای محاسبهٔ ۱ رادیان کافی است حاصل $۱\times\frac{۱۸۰}{\pi}$ را به‌دست آوریم که تقریباً برابر با $۵۷/۳^\circ$ است.

حال، شما مقدار تقریبی زاویه‌های زیر را مشابه نمونه با ماشین حساب به دست آورید.

۰/۵ رادیان	$\simeq$ ....
$\frac{۴}{۵}$ رادیان	$\simeq$ ....
۲ رادیان	$\simeq$ ....
۳ رادیان	$\simeq$ ....
۳/۱۴ رادیان	$\simeq$ ....
$\frac{\pi}{۳}$ رادیان	$=$ ....
$\frac{\pi}{۴}$ رادیان	$=$ ....
π رادیان	$=$ ....

فعالیت



ایستگاه فضایی بین‌المللی را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید که در فاصلهٔ تقریبی ۴۰۰ کیلومتری بالای سطح کره زمین قرار دارد. اگر این ایستگاه توسط ایستگاه زمینی از نقطهٔ A تا نقطهٔ B که با مرکز زمین زاویه ۴۵° می‌سازند، رصد شود، این ایستگاه چه مسافتی را در مدار خود از A' به B' پوشش می‌دهد؟ شعاع تقریبی کرهٔ زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنید.

۱ ابتدا زاویهٔ مرکزی ۴۵° را به رادیان تبدیل کنید.

رادیان $\frac{\pi}{۴}$ = ... $\times$ ۴۵° = α = اندازهٔ زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B$ برحسب رادیان

۲ شعاع مدار دایره‌ای شکل که ایستگاه فضایی روی آن قرار دارد، برابر است با .... $=r$

۳ طول کمان روبه‌روی $A'\hat{O}B'$ با فرض $\pi \simeq ۳/۱۴$ و با استفاده از رابطه $\alpha=\frac{l}{r}$ به طور تقریبی برابر است با : $۵۳۳۸\ km \simeq$ ... $\times \frac{\pi}{۴} = l =$ طول کمان $A'B'$

تمرین

۱ هریک از زاویه‌های -۱۲°، ۳۶°، ۷۲°، -۱۰۵° و ۳۱۵° را به رادیان تبدیل کنید و روی دایرهٔ مثلثاتی نشان دهید.

۲ هریک از زاویه‌های $\frac{-\pi}{۱۸}$ رادیان، $\frac{-۲\pi}{۵}$ رادیان، $\frac{۳\pi}{۴}$ رادیان، $\frac{۷\pi}{۸}$ رادیان، $\frac{۶\pi}{۵}$ رادیان را به درجه تبدیل کنید و به‌طور تقریبی روی دایرهٔ مثلثاتی نشان دهید.

۳ زاویهٔ D برابر با $\frac{\pi}{۲۰}$ رادیان است. اندازهٔ این زاویه چند درجه است؟

۴ دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر مفروض است. اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به کمانی به طول ۸ سانتی‌متر از این دایره چند رادیان است؟

۵ درستی یا نادرستی هر یک از جملات زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.

الف) اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی‌الساقینی ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه قاعدهٔ این مثلث کوچک‌تر از اندازهٔ هر یک از ساق‌های آن است.

ب) در دایره‌ای به شعاع ۱ سانتی‌متر طول کمان روبه‌روی زاویه π رادیان تقریباً برابر با ۳/۱۴ سانتی‌متر است.

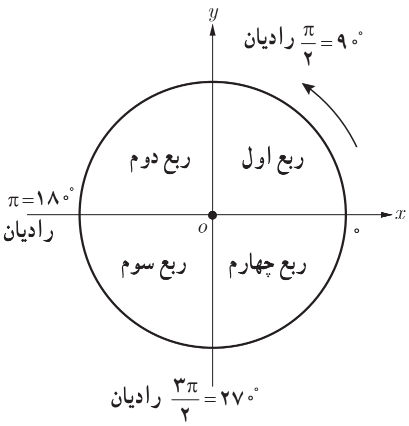
پ) انتهای کمان زاویه $\frac{۶\pi}{۵}$ رادیان در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد.

ت) زاویه‌های $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان، $\frac{\pi}{۹}$ رادیان، $\frac{۷\pi}{۳۶}$ رادیان، زوایای یک مثلث را تشکیل می‌دهند.

درس دوم

روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

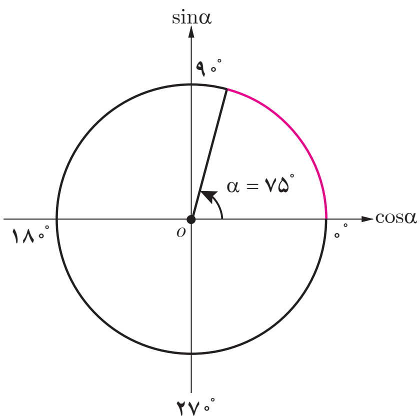
در شکل مقابل، یک دایرهٔ مثلثاتی با چهار ربع آن مشخص شده است. جدول زیر علامت چهار نسبت مثلثاتی در هر ربع را نشان می‌دهد.



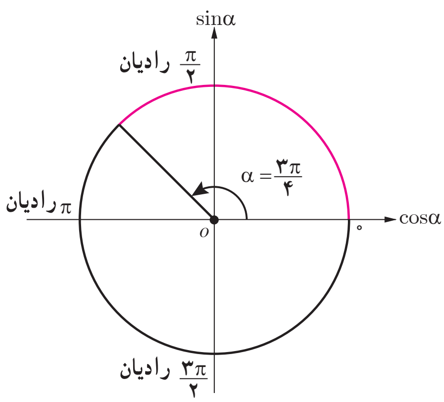
ربع / نسبت مثلثاتی	اول $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$	دوم $\frac{\pi}{۲}<\alpha<\pi$	سوم $\pi<\alpha<\frac{۳\pi}{۲}$	چهارم $\frac{۳\pi}{۲}<\alpha<۲\pi$
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

فعالیت

۱ جداول زیر را مطابق نمونه کامل کنید.



علامت نسبت مثلثاتی	انتهای کمان روبه‌روی α	زاویه α
$\tan\alpha>۰$	ربع اول	۷۵°
$\sin\alpha$		۱۵۰°
$\cos\alpha$		۲۱۰°
$\cot\alpha$		۲۴۰°
$\tan\alpha$		۲۸۵°



علامت نسبت مثلثاتی	انتهای کمان روبه‌روی α	زاویه α
$\cos\alpha<۰$	ربع دوم	$\frac{۳\pi}{۴}$ رادیان
$\sin\alpha$		$\frac{۴\pi}{۵}$ رادیان
$\tan\alpha$		$\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان
$\cos\alpha$		$\frac{۵\pi}{۱۲}$ رادیان
$\cot\alpha$		$\frac{۵\pi}{۴}$ رادیان

۲ اگر $\sin\alpha = \frac{-1}{3}$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ربع سوم باشد، محاسبات زیر را کامل کنید :

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \dotfill \xrightarrow{\cos\alpha<0} \cos\alpha = -\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dots\dots\dots \longrightarrow \tan\alpha = \dots\dots$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \dots\dots\dots \longrightarrow \cot\alpha = 2\sqrt{2}$$

۳ اگر $\cot\alpha = -2$ و $\cos\alpha > 0$ سایر نسبت‌های مثلثاتی α را بیابید.

حل : چون $\cos\alpha > 0$ و $\cot\alpha < 0$ لذا انتهای کمان α در ربع .... واقع است. بنابراین :

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha = \dots\dots\dots \longrightarrow \sin^2\alpha = \dots\dots\dots \longrightarrow \sin\alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \dots\dots\dots \longrightarrow \cos\alpha = \dots\dots\dots$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} \longrightarrow \tan\alpha = \dots\dots\dots$$

کار در کلاس

۱ اگر $\cos x = \frac{-4}{5}$ و $\sin x > 0$، نسبت‌های مثلثاتی دیگر زاویهٔ x را بیابید.

۲ جدول زیر را کامل کنید.

نسبت / زاویه α	۰ رادیان = °۰	$\frac{\pi}{6}$ رادیان = °۳۰	$\frac{\pi}{4}$ رادیان = °۴۵	$\frac{\pi}{3}$ رادیان = °۶۰	$\frac{\pi}{2}$ رادیان = °۹۰	π رادیان = °۱۸۰	$\frac{3\pi}{2}$ رادیان = °۲۷۰	2π رادیان = °۳۶۰
$\sin\alpha$		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$			-1	0
$\cos\alpha$	1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$			-1		
$\tan\alpha$					تعریف نشده		تعریف نشده	
$\cot\alpha$			1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$				

۳ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\cot\frac{\pi}{۶}-\tan\frac{\pi}{۳}\times\sin\frac{\pi}{۴}=$

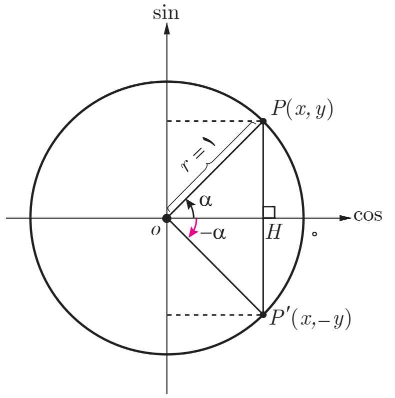
ب) $\frac{\tan^{۲}(\frac{\pi}{۶})+\sin^{۲}(\frac{\pi}{۴})}{\cot^{۲}(\frac{\pi}{۴})-\cos^{۲}(\frac{\pi}{۳})}+\cos^{۲}۷۵^{\circ}+\sin^{۲}۷۵^{\circ}=$

در ادامه می‌خواهیم ببینیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه، متمم و مکمل با هم چه ارتباطی دارند.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه

فعالیت

دو زاویهٔ α و $-\alpha$ را قرینهٔ یکدیگر می‌گویند. اگر در شکل مقابل، $\alpha=۳۰^{\circ}$، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ -۳۰° در $\overset{\Delta}{OP'H}$ عبارت‌اند از :



قرینهٔ یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به محور افقی نقطه‌ای به مختصات $(x,-y)$ است.

$\sin(-۳۰^{\circ})=\frac{-y}{r}=-\sin ۳۰^{\circ}=\frac{-۱}{۲}$

$\cos(-۳۰^{\circ})=\dots\dots\dots=\dots\dots\dots=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\tan(-۳۰^{\circ})=\frac{-y}{x}=\dots\dots\dots=\dots\dots\dots$

$\cot(-۳۰^{\circ})=\dots\dots\dots=\dots\dots\dots=\dots\dots\dots$

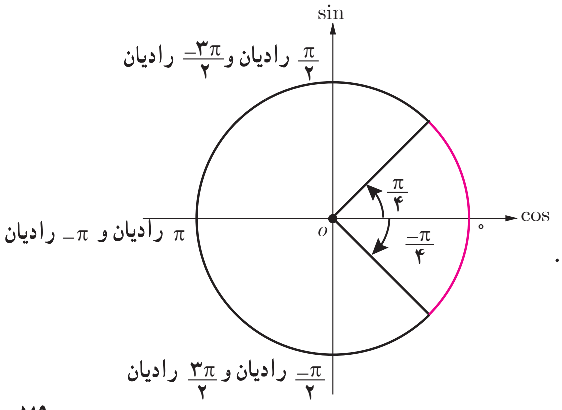
در حالت کلی :

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$

$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$



کار در کلاس

۱ سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $-\frac{\pi}{۴}$ رادیان را مطابق نمونه به دست آورید.

$\sin(-\frac{\pi}{۴})=-\sin\frac{\pi}{۴}$

۲ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\cot(\frac{-\pi}{3})\times\cos(\frac{-\pi}{6})+\tan(\frac{-\pi}{4})=-\cot\frac{\pi}{3}\times\cos\frac{\pi}{6}-\tan\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-1=\frac{-3}{2}$$

الف) $\dfrac{\cos(-90^\circ)+\sin(-270^\circ)}{\sin(-180^\circ)-\cos(-360^\circ)}=\dfrac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots}=\cdots\cdots\cdots\cdots$

ب) $\cot(\frac{-\pi}{6})+\tan(\frac{-\pi}{3})=\cdots\cdots\cdots$

پ) $\cos(-45^\circ)\times\cos(-60^\circ)+\sin(-45^\circ)\times\sin(-60^\circ)=\cdots\cdots+\cdots\cdots=\cdots\cdots$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل

فعالیت

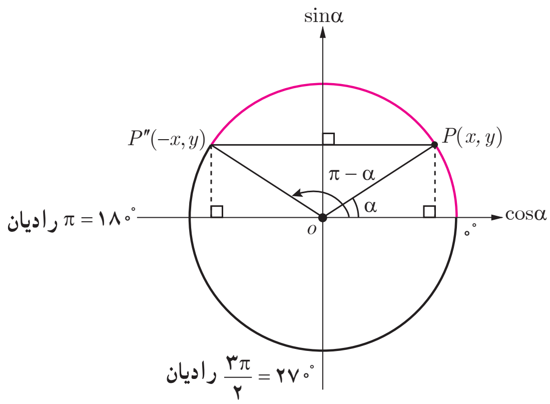
دو زاویهٔ α و β را مکمل گوییم؛ هرگاه مجموع آنها 180° یا π رادیان شود. مثلاً دو زاویهٔ 30° و 150° مکمل یکدیگرند. همچنین دو زاویهٔ $\frac{\pi}{3}$ رادیان و $\frac{2\pi}{3}$ رادیان مکمل یکدیگرند (چرا؟). در دایرهٔ مثلثاتی زیر اگر $\alpha=30^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطهٔ P'' و انتهای کمان زاویهٔ 150° که در ربع دوم واقع است، نسبت‌های مثلثاتی زاویه 150° عبارت‌اند از :

$\sin 150^\circ=\sin(180^\circ-30^\circ)=y=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

$\cos 150^\circ=\cos(180^\circ-30^\circ)=-x=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 150^\circ=\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\cot 150^\circ=\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots$



قرینهٔ یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به محور عمودی نقطه‌ای به مختصات $(-x,y)$ است.

در حالت کلی :

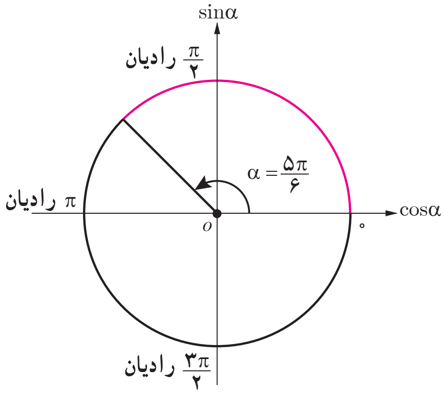
$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

کار در کلاس

۱ مکمل هریک از زاویه‌های زیر را مشخص کنید :

الف) 75° ب) -25° پ) $\frac{\pi}{12}$ رادیان ت) $\frac{-\pi}{4}$ رادیان

۲ نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{5\pi}{6}$ رادیان را مطابق نمونه به‌دست آورید.



$$\sin\frac{5\pi}{6}=\sin(\pi-\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{5\pi}{6}=\dots\dots\dots\dots$$

$$\tan\frac{5\pi}{6}=\dots\dots\dots\dots$$

$$\cot\frac{5\pi}{6}=\dots\dots\dots\dots$$

فعالیت

حاصل هریک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\tan\frac{2\pi}{3}=\tan(\pi-\frac{\pi}{3})=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$$

$$\cos\frac{3\pi}{4}=\cos(\dots\dots)=\dots\dots$$

$$\sin 120^\circ=\sin(180^\circ-\dots)=\dots\dots=\dots\dots$$

$$\cot(-120^\circ)=-\cot(\dots\dots)=-\cot(180^\circ-\dots)=\dots\dots$$

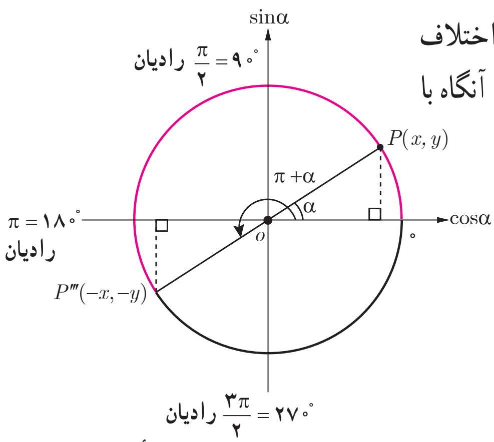
$$\cos(135^\circ)=\dots\dots=\dots\dots=\dots\dots$$

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف π رادیان

فعالیت

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 210° را به دست آورید.

انتهای کمان زاویه 210° در ربع سوم واقع است. در ضمن $210^\circ=180^\circ+30^\circ$، یعنی اختلاف دو زاویهٔ 210° و 30° برابر با π رادیان است. در دایره مثلثاتی مقابل، اگر $\alpha=30^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطه P'''، نسبت‌های مثلثاتی زاویه 210° عبارت‌اند از :



قرینهٔ یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به مبدأ مختصات نقطه‌ای به مختصات $(-x,-y)$ است.

$$\sin 210^\circ=\sin(180^\circ+30^\circ)=-y=-\sin30^\circ=\frac{-1}{2}$$

$$\cos 210^\circ=\dots\dots\dots=-x=\dots\dots$$

$$\tan 210^\circ=\frac{\sin 210^\circ}{\cos 210^\circ}=\dots\dots$$

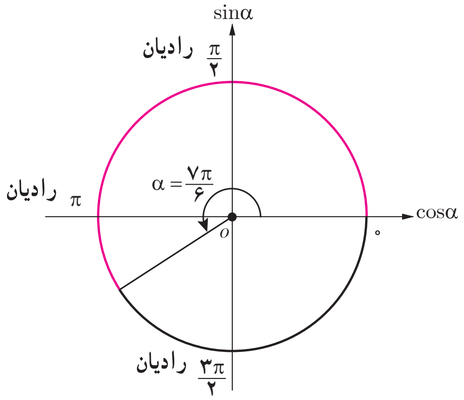
$$\cot 210^\circ=\dots\dots=\dots\dots$$

در حالت کلی :

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$$
$$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$$

کار در کلاس

سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{7\pi}{6}$ رادیان را مطابق نمونه مشخص کنید.



$$\sin\frac{7\pi}{6} = \sin(\pi+\frac{\pi}{6}) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

فعالیت

حاصل هریک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مطابق نمونه بیابید.

$$\sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$\tan 225^\circ =$ ....

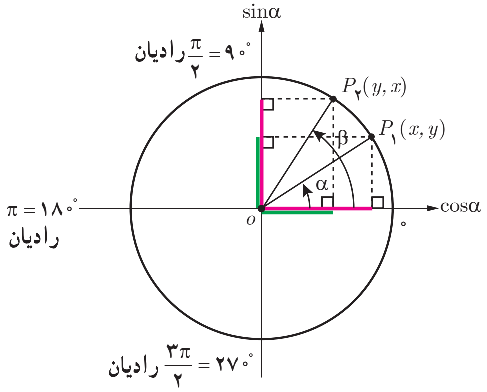
$\cos(\frac{-4\pi}{3}) = \cos$ ... $= \cos(\pi +$ ... $) =$ .... $=$ ....

$\sin(\frac{-7\pi}{6}) =$ ....

$\cot(\frac{5\pi}{4}) =$ ....

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم

فعالیت



دو زاویهٔ α و β را متمم گوییم؛ هرگاه مجموع آنها 90° یا $\frac{\pi}{2}$ رادیان شود. مثلاً دو زاویهٔ $\alpha=30^\circ$ و $\beta=60^\circ$ در دایره مثلثاتی مقابل متمم یکدیگرند. در این حالت :

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan ۳۰^\circ = \cot ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot ۳۰^\circ = \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$$

زاویه‌ای معرفی کنید که با متمم خودش برابر باشد. برای چنین زاویه‌ای داریم :

$$\sin \ldots\ldots = \cos \ldots\ldots = \ldots\ldots$$

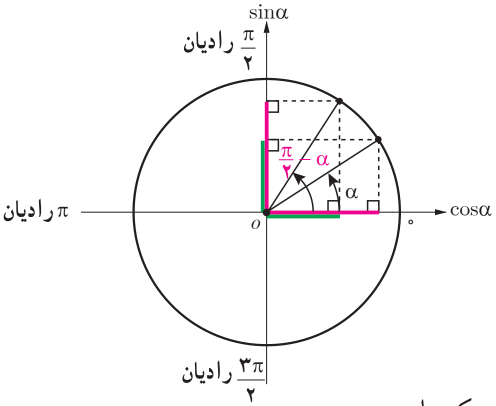
$$\tan \ldots\ldots = \cot \ldots\ldots = \ldots\ldots$$

همچنین زاویه ...... و $\frac{\pi}{۲}$ رادیان متمم یکدیگرند؛ بنابراین :

$$\sin \frac{\pi}{۲} = \cos \ldots\ldots = \ldots\ldots$$

$$\tan \frac{\pi}{۲} = \cot \ldots\ldots = \ldots\ldots$$

در حالت کلی :



$$\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \tan \alpha$$

به عبارت دیگر : اگر دو زاویهٔ α و β متمم باشند(رادیان $\alpha + \beta = \frac{\pi}{۲}$) آنگاه سینوس یکی با کسینوس دیگری و تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است. به بیان دیگر :

$$\sin\alpha = \cos\beta \quad , \quad \tan\alpha = \cot\beta$$

$$\cos\alpha = \sin\beta \quad , \quad \cot\alpha = \tan\beta$$

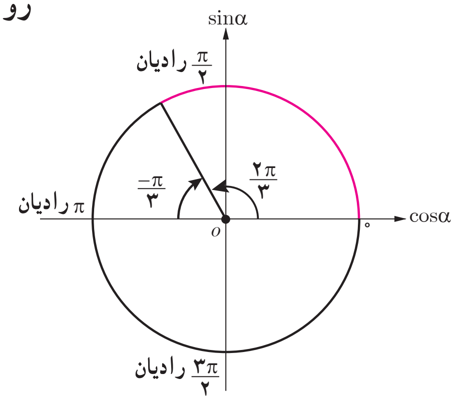
نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{۲}$ رادیان

فعالیت

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان را به‌دست آورید.

چون انتهای کمان زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان در ربع دوم واقع است، به دو روش می‌توان نسبت‌های مثلثاتی آن را یافت.

روش اول ـ زاویه $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{\pi}{۳}$ رادیان مکمل یکدیگرند؛ یعنی $\frac{۲\pi}{۳}=\pi-\frac{\pi}{۳}$. بنابراین :



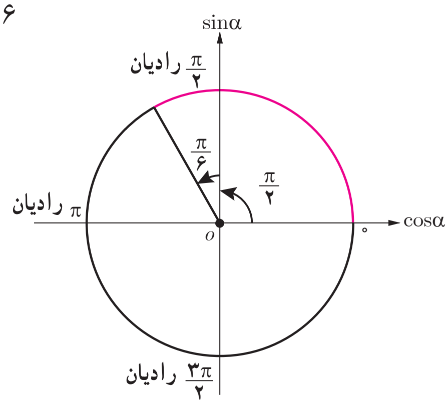
$$\sin\frac{۲\pi}{۳}=\sin(\pi-\frac{\pi}{۳})=\dots\dots\dots=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\frac{۲\pi}{۳}=\dots\dots\dots=-\cos\frac{\pi}{۳}=\dots\dots\dots$$

$$\tan\frac{۲\pi}{۳}=\dots\dots\dots=\dots\dots\dots=\dots\dots\dots$$

$$\cot\frac{۲\pi}{۳}=\dots\dots\dots=\dots\dots\dots=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

روش دوم ـ اختلاف دو زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{\pi}{۶}$ رادیان برابر با $\frac{\pi}{۲}$ رادیان است؛ یعنی $\frac{۲\pi}{۳}=\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}$. بنابراین با توجه به علامت نسبت‌های مثلثاتی در ربع دوم :



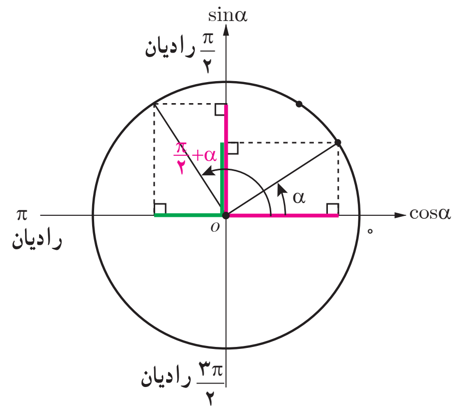
$$\sin\frac{۲\pi}{۳}=\sin(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶})=\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\frac{۲\pi}{۳}=\cos(\dots\dots\dots)=-\sin\dots\dots\dots=-\frac{۱}{۲}$$

$$\tan\frac{۲\pi}{۳}=\dots\dots\dots=-\cot\frac{\pi}{۶}=\dots\dots\dots$$

$$\cot\frac{۲\pi}{۳}=\dots\dots\dots=\dots\dots\dots=\dots\dots\dots$$

در حالت کلی :



$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\cot\alpha$$

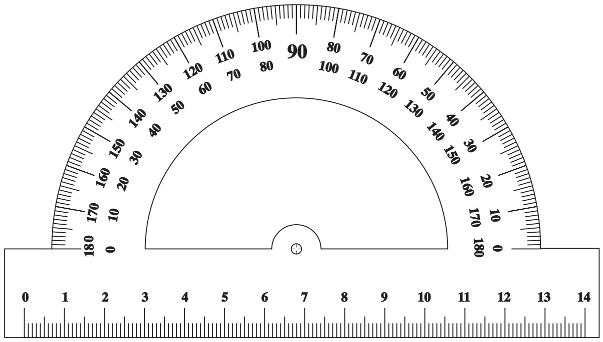
$$\cot(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\tan\alpha$$

کار در کلاس

نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۱۳۵° را به دو روش به‌دست آورید.

کار در کلاس

به کمک نقاله سؤالات زیر را پاسخ دهید :



۱ سینوس کدام دو زاویه برابر است؟ (مثلاً $\sin 10^\circ = \sin 170^\circ$)

۲ اختلاف کدام دو زاویه $\frac{\pi}{2}$ رادیان $= 90^\circ$ می‌شود؟ نسبت‌های مثلثاتی یک نمونه را به دست آورید.

۳ آیا دو زاویه می‌توان یافت که دارای کسینوس یکسان باشند؟ چرا؟

۴ نسبت‌های مثلثاتی زاویه 180° را از روی مکمل آن بیابید.

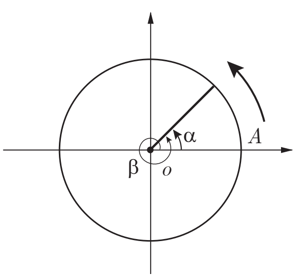
۵ نسبت‌های مثلثاتی زاویه 135° را از روی مکمل آن بیابید.

نسبت‌های مثلثاتی زوایا با مجموع یا تفاضل $2k\pi$ رادیان (مضارب زوج π رادیان)

فعالیت

یادآوری می‌کنیم برای رسم زاویه در دایرهٔ مثلثاتی نقطهٔ A در شکل مقابل مبدأ حرکت است. برخی از زوایا از یک دور کامل دایرهٔ مثلثاتی یعنی 360° بزرگ‌ترند مانند زاویهٔ 405°.

برای رسم چنین زاویه‌ای ابتدا در جهت مثلثاتی یک دور کامل را طی می‌کنیم؛ سپس ادامهٔ زاویه را که به اندازه 45° است رسم می‌کنیم. در این حالت دو زاویه 405° و 45° را هم انتها می‌نامیم.

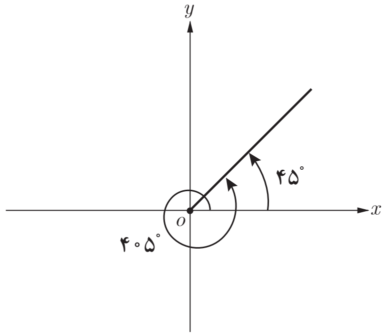


دو زاویهٔ α و β را هم انتها گوییم؛ هرگاه اضلاع انتهایی آنها بر هم منطبق شود (شکل مقابل).

اگر دو زاویه هم انتها باشند، اختلاف آنها مضرب زوجی از π رادیان یا 180° است. مثلاً

خواندنی

دانشمندان ایرانی ـ اسلامی نقش مؤثری در پیشرفت علم مثلثات داشته‌اند. در اوایل قرن نهم میلادی محمدبن موسی خوارزمی جداول دقیقی از نسبت‌های مثلثاتی سینوس، کسینوس و تانژانت را معرفی کرد. وی همچنین در موضوع مثلثات روی کره پیشگام بود. در قرن دهم میلادی ابوالوفا بوزجانی جداول نسبت‌های مثلثاتی را توسعه داد و روابط جدیدی برای محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی و حل مثلث ارائه کرد. در موضوع روش مثلث‌بندی، ریاضی‌دانان مسلمان اولین افرادی بودند که سهم بسزایی در توسعهٔ آن داشتند از جملهٔ آنها ابوریحان بیرونی در اوایل قرن یازدهم میلادی بود. وی روش مثلث‌بندی را برای اندازه‌گیری کرهٔ زمین و محاسبه فاصلهٔ بین مکان‌های مختلف معرفی کرد. در اواخر قرن یازدهم میلادی عمر خیام با به‌کارگیری جدول‌های مثلثاتی معادلات درجه سوم را حل کرد. در قرن سیزدهم میلادی خواجه نصیرالدین طوسی اولین فردی بود که مثلثات را به‌عنوان یک سبک ریاضی در کتاب خود به نگارش درآورد. وی که یک ستاره‌شناس بود، به مثلثات کروی توجه ویژه‌ای کرد و قوانینی را در این شاخه ارائه نمود. در قرن پانزدهم میلادی غیاث‌الدین جمشید کاشانی قوانین جدیدی را در موضوع حل مثلث و مثلث‌بندی مطرح کرد. وی همچنین مقادیر تابع سینوس در جدول توابع مثلثاتی را تا ۸ رقم اعشار برای زوایای $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \ldots, 90^\circ$ محاسبه کرد. وی عدد پی را تا ۱۶ رقم اعشاری ارائه نمود.



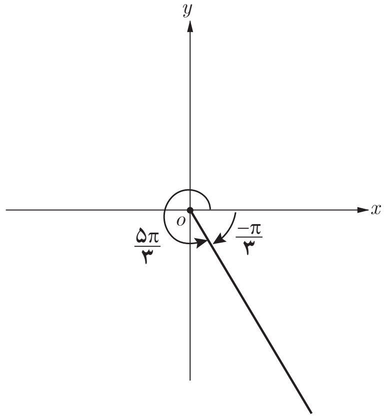
زاویه‌های ۴۰۵° و ۴۵° هم انتها هستند؛ زیرا $۴۰۵^\circ-۴۵^\circ=۳۶۰^\circ$ (شکل سمت راست) در این حالت نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۴۰۵° و ۴۵° یکسان‌اند. چون انتهای کمان زاویهٔ ۴۵° در ربع اول است، بنابراین :

$\sin ۴۰۵^\circ = \sin(۳۶۰^\circ+۴۵^\circ)= \sin ۴۵^\circ = \cdots\cdots$

$\cos ۴۰۵^\circ = \cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots = \cdots\cdots$

$\tan ۴۰۵^\circ = \cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots = \cdots\cdots$

$\cot ۴۰۵^\circ = \cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots = \cdots\cdots$



حال همین بررسی را روی زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان انجام دهید؛ چون $\frac{۵\pi}{۳} = ۲\pi - \cdots\cdots$ بنابراین دو زاویه $\cdots\cdots$ و $\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان هم انتها هستند (شکل سمت راست).

چون انتهای کمان زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان در ربع چهارم است؛ بنابراین :

$\sin\frac{۵\pi}{۳} = \sin(۲\pi - \frac{\pi}{۳}) = \sin(\frac{-\pi}{۳}) = \cdots\cdots\cdots$

$\cos\frac{۵\pi}{۳} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\tan\frac{۵\pi}{۳} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\cot\frac{۵\pi}{۳} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

در حالت کلی برای هر عدد صحیح k،

$\sin(۲k\pi-\alpha)=-\sin\alpha$

$\cos(۲k\pi-\alpha)=\cos\alpha$

$\tan(۲k\pi-\alpha)=-\tan\alpha$

$\cot(۲k\pi-\alpha)=-\cot\alpha$

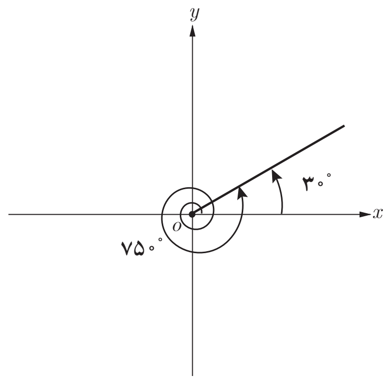
$\sin(۲k\pi+\alpha)=\sin\alpha$

$\cos(۲k\pi+\alpha)=\cos\alpha$

$\tan(۲k\pi+\alpha)=\tan\alpha$

$\cot(۲k\pi+\alpha)=\cot\alpha$

کار در کلاس



مطابق نمونه هر یک از نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های زیر را مشخص کنید. (شکل سمت راست)

$\sin ۷۵۰^\circ = \sin(۲\times۳۶۰^\circ+۳۰^\circ) = \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$

$\tan(-۳۱۵^\circ)=-\tan(۳۱۵^\circ)=-\tan(۳۶۰^\circ-۴۵^\circ)=-\tan(-۴۵^\circ)=-(-\tan ۴۵^\circ)=\tan ۴۵^\circ=۱$

۱) $\cos ۳۰۰^\circ = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

۲) $\sin ۴۲۰^\circ = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

۳) $\tan(-۲۲۵^\circ) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

۴) $\cot(-۳۳۰^\circ) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

۵ $\sin\frac{۱۱\pi}{۴} =$ ....

۶ $\cos(\frac{-۷\pi}{۴}) =$ ....

تمرین

۱ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید :

الف) $\tan ۱۳۵^\circ + \cot ۱۲۰^\circ =$ ب) $\cos(-۲۱۰^\circ)+\cot(۲۴۰^\circ)=$

پ) $\sin ۶۳۰^\circ + \tan(-۵۴۰^\circ) =$

ت) $\cos(-۷۲۰^\circ) + \cot(-۶۰۰^\circ) + \tan ۷۲۰^\circ - \tan(-۶۰۰^\circ) =$

ث) $\sin(\frac{۲۵\pi}{۳}) - \cos(\frac{۲۳\pi}{۴}) =$ ج) $\dfrac{\sin\frac{۳\pi}{۴} - \cos\frac{۵\pi}{۶}}{\sin(\frac{-۳\pi}{۴}) + \tan(\frac{-۴\pi}{۳})} =$

۲ جدول زیر را کامل کنید :

زاویه x / نسبت	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۲۱۰°	۲۲۵°	۲۴۰°	۳۰۰°	۳۳۰°
$\sin x$								
$\cos x$								
$\tan x$								
$\cot x$								

۳ بدون استفاده از ماشین حساب درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin ۸۴۰^\circ = \sin ۶۰^\circ$ ب) $\cos(-۳۲۴^\circ) = \cos ۳۶^\circ$

پ) $\tan(-۱۰۰۰^\circ) = \tan ۸۰^\circ$ ت) $\sin ۸۷۵^\circ = \sin ۱۵۵^\circ$

۴ در تساوی زیر به جای x یک زاویهٔ مناسب قرار دهید :

$\sin x = \cos(۲۰^\circ + x)$

آیا برای زاویهٔ x تنها یک مقدار می‌توان یافت؟ جواب خود را با جواب‌های دوستان خود مقایسه کنید.

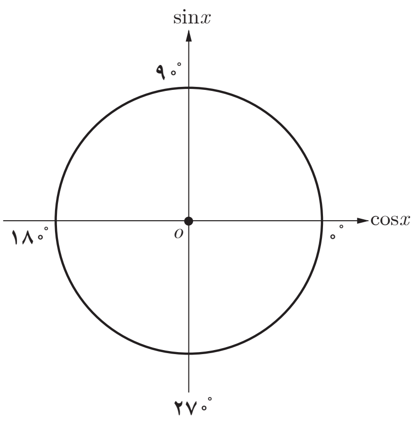
خواندنی (کار با ماشین حساب)

با استفاده از ماشین حساب مطابق نمونه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های $\frac{\pi}{۸}$ رادیان و $\frac{۳\pi}{۸}$ رادیان را به طور تقریبی بیابید. (ماشین حساب باید در حالت رادیان باشد).

$\sin\frac{۳\pi}{۸} = \cos\frac{\pi}{۸} \simeq ۰/۹۲۳۹$

حاصل هر یک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را با ماشین حساب به طور تقریبی به دست آورید.

$\tan ۲۰^\circ$ و $\sin\frac{\pi}{۱۵}$ و $\cos ۱۰۵^\circ$ و $\tan\frac{۳\pi}{۴}$ و $\cos\frac{۵\pi}{۹}$ و $\tan ۱۷۰^\circ$



درس سوم

توابع مثلثاتی

توابعی نظیر تابع سینوس با ضابطهٔ $y=\sin x$ و تابع کسینوس با ضابطهٔ $y=\cos x$ نمونه‌هایی از توابع مثلثاتی‌اند که در این درس با نمودار آنها آشنا می‌شوید.

رسم تابع سینوس

فعالیت

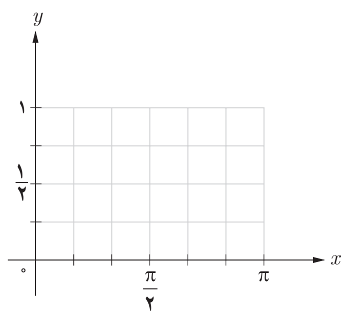
۱ جدول روبه‌رو را کامل کنید.

مختصات نقطه	$y=\sin x$	x
$(۰,۰)$	۰	۰
...	...	—
...	...	$\frac{\pi}{۲}$
...	...	$\frac{۵\pi}{۶}$
...	...	π

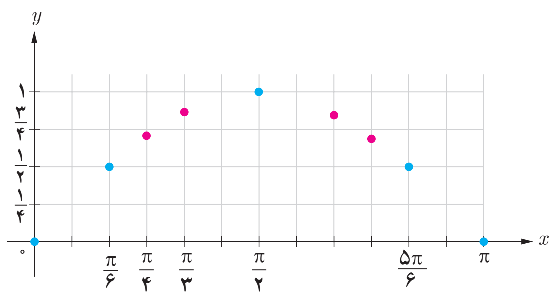
مجموعهٔ زوج‌های مرتب حاصل در جدول مقابل یک تابع به صورت زیر مشخص می‌کند.

$$f=\left\{(۰,۰),(\frac{\pi}{۶},\cdots),(\cdots,\cdots),(\cdots,\cdots),(\cdots,\cdots)\right\}$$

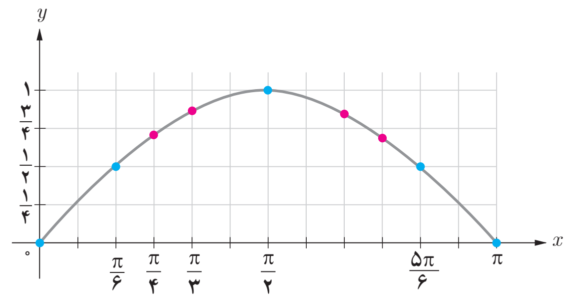
۲ نقاط حاصل در جدول را در شکل زیر مشخص کنید.



۳ با افزودن نقاط $(\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\frac{\pi}{۴})$، $(\cdots$ و $\frac{\pi}{۳})$، $(\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $\frac{۲\pi}{۳})$ و $(\cdots$ و $\frac{۳\pi}{۴})$ به جدول بالا، شکل زیر به‌دست می‌آید.
(با فرض $\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$ و $\sqrt{۳}\simeq ۱/۷$)

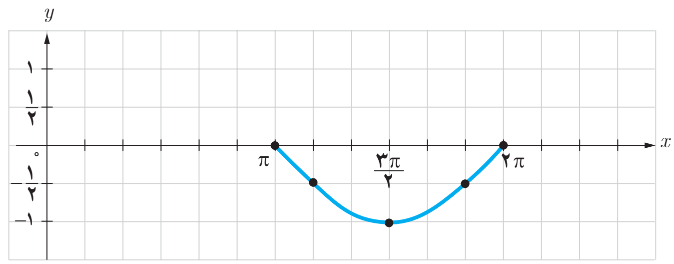


۴ نقاط حاصل در شکل را به‌ترتیب به یکدیگر وصل می‌کنیم تا شکل مقابل به‌دست بیاید. با افزودن تعداد نقاط جدول فوق در بازه $[0, \pi]$ این شکل به‌طور دقیق‌تری به‌دست می‌آید. شکل حاصل نمودار تابع سینوس با ضابطهٔ $y=\sin x$ را در این بازه مشخص می‌کند.

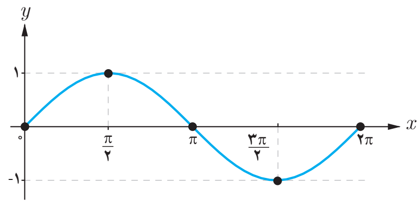


۵ مراحل صفحهٔ قبل را برای رسم نمودار تابع سینوس در بازهٔ $[\pi, 2\pi]$ انجام دهید. برای این کار ابتدا جدول زیر را کامل کنید؛ سپس نقاط به‌دست آمده در جدول را در صفحه مختصات مطابق شکل زیر مشخص و آنها را به ترتیب به یکدیگر وصل کنید.

مختصات نقطه	$y=\sin x$	x
$(\pi, 0)$	0	π
...	...	$\frac{7\pi}{6}$
...	...	$\frac{3\pi}{2}$
...	$\frac{-1}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$
...	...	2π



۶ با توجه به شکل‌های فوق، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ در شکل زیر رسم شده است. حال با توجه به این شکل جدول زیر را دربارهٔ مقدار این تابع در هر بازه تکمیل کنید.



$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
مقدار تابع سینوس از ۰ به ۱ افزایش می‌یابد.			
مقدار تابع سینوس در ربع اول مثبت است.			

۷ با توجه به رابطهٔ $\sin(x+2k\pi)=\sin x$، $k\in\mathbb{Z}$، که در درس قبل آشنا شدید می‌توان گفت :

$$\sin(x+2\pi)=\sin x$$

یعنی مقدار تابع سینوس با اضافه کردن 2π رادیان به کمان آن تغییری نمی‌کند. بنابراین نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[0, 2\pi]$ و $[2\pi, 4\pi]$ یکسان است.

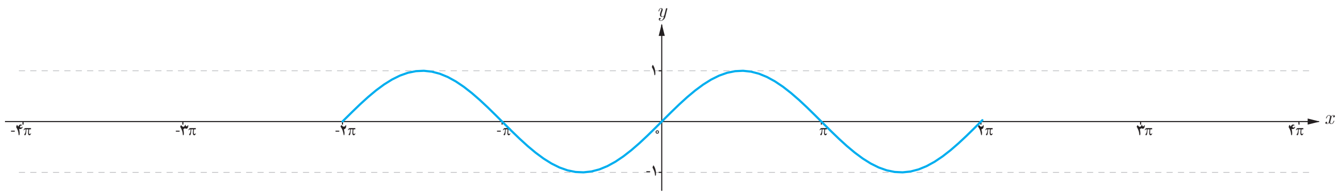
همچنین داریم :

$$\sin(x-2\pi)=\sin x$$

یعنی مقدار تابع سینوس با کم کردن 2π رادیان از کمان آن تغییری نمی‌کند. در نتیجه نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[0, 2\pi]$

و .... یکسان است. در حالت کلی چون مقدار تابع سینوس با اضافه یا کم کردن مضارب زوج π رادیان به کمان آن تغییر نمی‌کند، نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[۲k\pi$ و $(۲k+۲)\pi]$، $k\in\mathbb{Z}$، یکسان است. به این ترتیب منحنی این تابع که در بازه $[۰ , ۲\pi]$ رسم شده در بازه‌های $[۲\pi , ۴\pi]$، $[۴\pi , ...]$، $[-۲\pi , ...]$، $[-۴\pi , ...]$ تکرار می‌شود.

در شکل زیر نمودار تابع سینوس در ۲ تکرار رسم شده است. این نمودار را برای ۴ تکرار کامل کنید.



۸ با توجه به شکل بالا جاهای خالی را دربارهٔ ویژگی‌های تابع سینوس با ضابطهٔ $y=\sin x$ کامل کنید.

الف) دامنهٔ تابع سینوس ..... و برد آن ..... است.

ب) مقدار تابع سینوس در طول‌های $x=k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، برابر با ..... است.

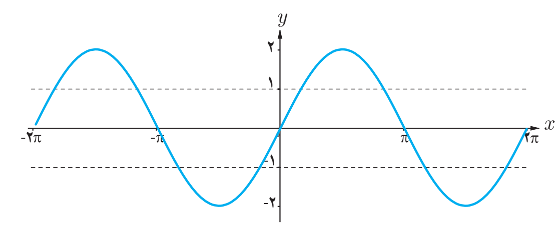
پ) حداکثر مقدار تابع سینوس برابر با ..... است که در نقاطی به طول‌های $x=\frac{\pi}{۲}$، $x=$ .....، $x=$ .....، $x=$ ..... و در حالت کلی $x=\frac{\pi}{۲}+۲k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، به‌دست می‌آید.

ت) حداقل مقدار تابع سینوس برابر با ..... است که در نقاطی به طول‌های $x=\frac{۳\pi}{۲}$، $x=$ .....، $x=$ .....، $x=$ ..... و در حالت کلی $x=\frac{۳\pi}{۲}+۲k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، به‌دست می‌آید.

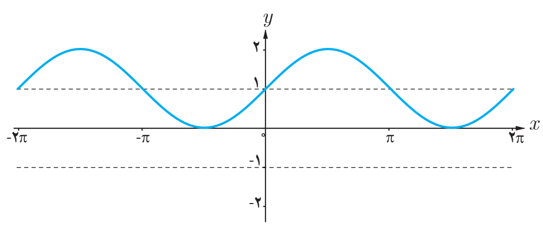
کار در کلاس

هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده دارای کدام نمودار است؟

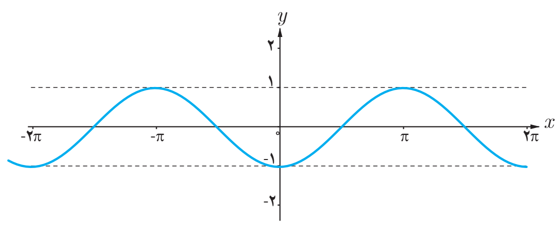
۱ $y=۲\sin x$ ۲ $y=\sin(x-\frac{\pi}{۲})$ ۳ $y=\sin x+۱$ ۴ $y=-\sin x+۱$



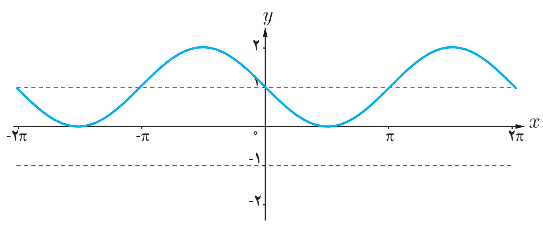
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

رسم تابع کسینوس

فعالیت

۱ جدول زیر را کامل کنید.

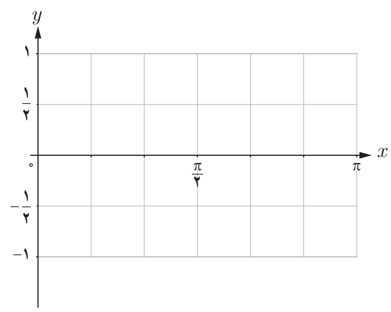
x	$y=\cos x$	مختصات نقطه
$\circ$	۱	$(\circ,۱)$
$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}\simeq \circ/۷$	$(\frac{\pi}{۴},\circ/۷)$
$\frac{\pi}{۲}$	....	....
$\frac{۳\pi}{۴}$	....	....
π	....	....

به این ترتیب مجموعه زوج‌های مرتب زیر به‌دست می‌آید.

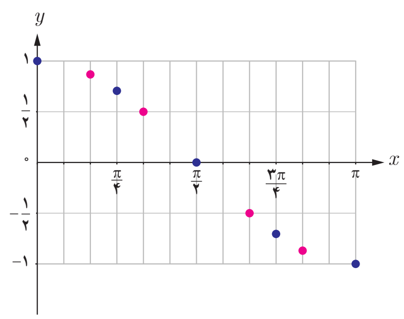
$f=\{(\circ,۱),(\cdots\cdots,\cdots\cdots),(\cdots\cdots,\cdots\cdots),(\cdots\cdots,\cdots\cdots),(\cdots\cdots,\cdots\cdots)\}$

آیا این مجموعه یک تابع را مشخص می‌کند؟

۲ نقاط جدول بالا را در این شکل مشخص کنید.

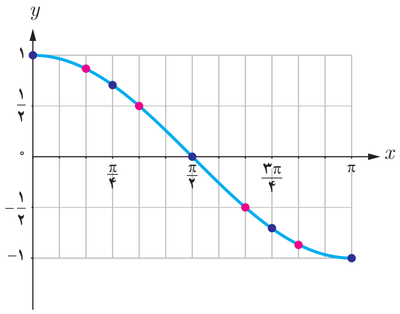


۳ نقاط به طول‌های $x=\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۳},\frac{۲\pi}{۳},\frac{۵\pi}{۶}$ را به جدول بالا اضافه کنید تا شکل زیر به‌دست آید. ($\sqrt{۳}\simeq ۱/۷$).

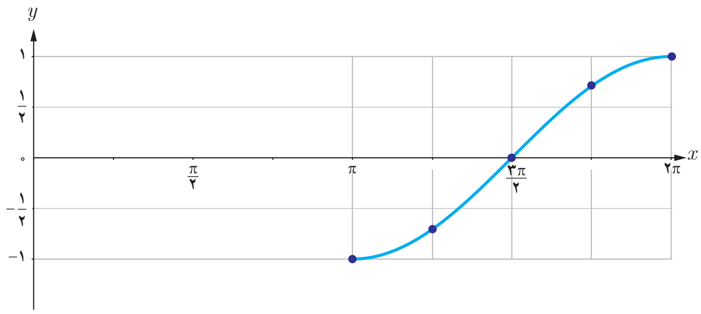


x	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۶}$
$y=\cos x$	...	...	$\frac{-۱}{۲}$	...

۴ نقاط شکل صفحهٔ قبل را به ترتیب به یکدیگر وصل می‌کنیم تا شکل مقابل به‌دست آید. این شکل نمودار تابع کسینوس با ضابطه $y=\cos x$ را در بازهٔ $[0, \pi]$ مشخص می‌کند.

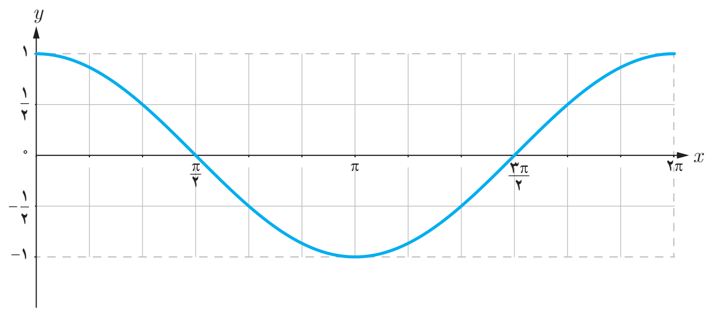


۵ جدول زیر را کامل کنید تا نمودار تابع کسینوس در بازهٔ $[\pi$ و $2\pi]$ به‌صورت شکل مقابل به‌دست آید.



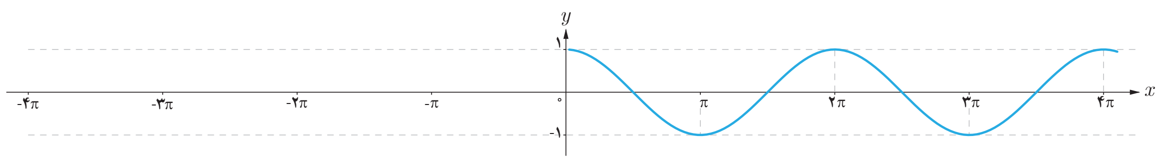
x	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	-1	...	...	...	۱

۶ با توجه به مراحل بالا نمودار تابع کسینوس با ضابطهٔ $y=\cos x$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ در شکل زیر رسم شده است. با توجه به این شکل جدول زیر را کامل کنید.



$[0,\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$
مقدار تابع کسینوس از ۱ به ۰ کاهش می‌یابد.			
مقدار تابع کسینوس در ربع اول مثبت است.			

۷ تابع کسینوس دارای نمودار یکسانی در بازه‌های $[0, 2\pi]$، $[2\pi, 4\pi]$، $[-2\pi, 0]$ و $[-4\pi, -2\pi]$ است. در شکل زیر نمودار تابع کسینوس در بازهٔ $[0, 4\pi]$ رسم شده است. شکل را کامل کنید.



۸ با توجه به شکل صفحهٔ قبل جاهای خالی را در خصوص ویژگی‌های تابع با ضابطهٔ $y=\cos x$ کامل کنید.

الف) دامنهٔ تابع کسینوس .... و برد آن .... است.

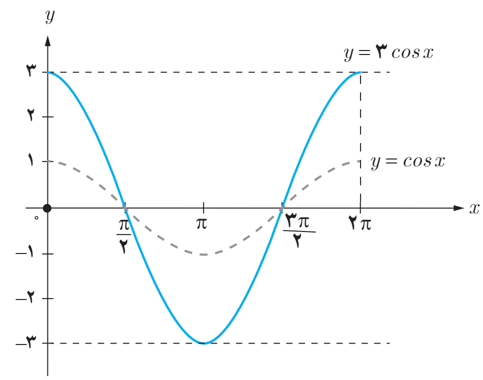
ب) مقدار تابع کسینوس در طول‌های .... برابر با صفر است.

پ) حداکثر مقدار تابع کسینوس .... است که در طول‌های $x=۲k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، به‌دست می‌آید.

ت) حداقل مقدار تابع کسینوس ...... است که در طول‌های .... به‌دست می‌آید.

کار در کلاس

شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۳\cos x$ را نشان می‌دهد. به‌طور مشابه هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده را در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$، با استفاده از نمودار تابع کسینوس رسم کنید.



۱ $y=\cos(x+\frac{\pi}{۲})$

۲ $y=\cos x-۱$

۳ $y=۱-\frac{۱}{۲}\cos x$

۴ $y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})+۱$

تمرین

۱ آیا نمودارهای هر جفت از توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق‌اند یا خیر؟

۱) $y=\sin x$, $y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})$

۲) $y=\cos x$, $y=\sin(\frac{\pi}{۲}+x)$

۳) $y=\cos x$, $y=\cos(۲\pi-x)$

۴) $y=\sin x$, $y=\sin(۵\pi-x)$

۲ نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را در دستگاه مختصات در بازه‌های داده شده رسم کنید.

۱) $y=\frac{۱}{۲}\sin x$, $[۰,۲\pi]$

۲) $y=۲\cos x+۱$, $[-۲\pi,۲\pi]$

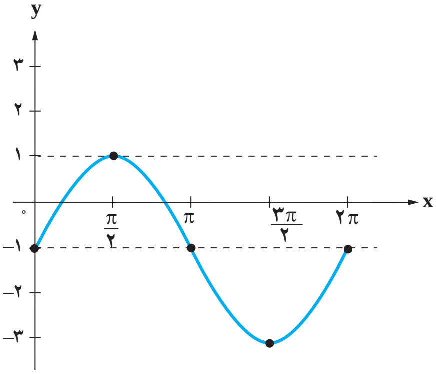
۳) $y=۱-\sin x$, $[-۲\pi,۲\pi]$

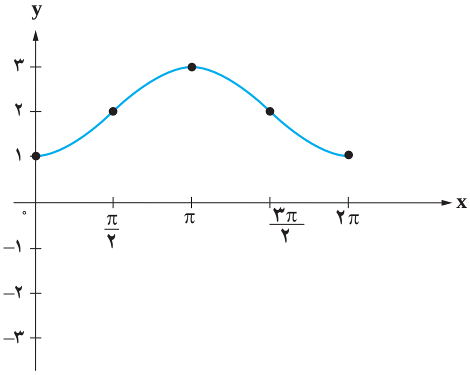
۴) $y=-۱+\cos x$, $[-۴\pi,۴\pi]$

۵) $y=۱+\sin(x+\frac{\pi}{۴})$, $[۰,۲\pi]$

۶) $y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})$, $[۲\pi,۴\pi]$

۳ با توجه به نمودار توابع سینوس و کسینوس، مشخص کنید هریک از دو نمودار زیر کدام یک از ضابطه‌های داده شده را دارند. نمودار تابع با سایر ضابطه‌ها را نیز رسم کنید.



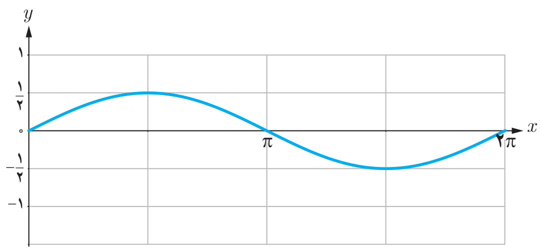


الف) $y=۲\cos x+۱$ ب) $y=۲\sin x-۱$

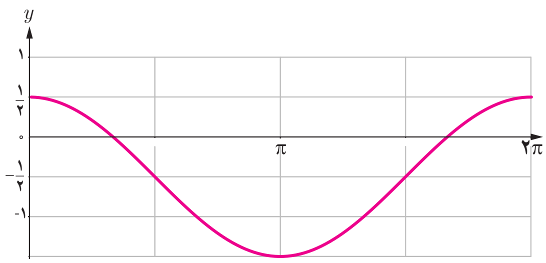
پ) $y=۲-\cos x$ ت) $y=\sin x-۲$

۴ با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند.

الف) شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ را نشان می‌دهد.



ب) شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\cos x-\frac{۱}{۲}$ را نشان می‌دهد.

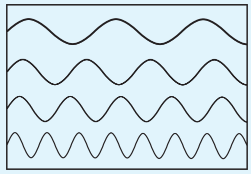


پ) برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۱+\sin x$ کافی است نمودار تابع سینوس را به اندازهٔ یک واحد در راستای محور xها انتقال دهیم.

ت) برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-\cos x$ کافی است نمودار تابع کسینوس را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

خواندنی

اصوات به‌صورت مخلوطی از موج‌های سینوسی شکل با بسامدهای مختلف می‌توانند نمایش داده شوند.



موج با بسامد پایین‌تر

موج با بسامد بالاتر

خواندنی

طول روز به‌طور تقریبی در ایران در t امین روز سال برحسب ساعت با استفاده از تابع مثلثاتی H با ضابطهٔ زیر مدل‌سازی می‌شود.

$$H(t)=۱۲+۲/۴\sin\frac{۲\pi}{۳۶۵}(t-۱)$$

در این رابطه عدد ۱ که به‌معنای اولین روز سال یعنی اولین روز فروردین ماه است؛ اعتدال بهاری نام دارد. در این روز، مدت زمان روز و شب در سراسر کرهٔ زمین با هم برابر است. همچنین عدد ۱۲ تعداد ساعات روشنایی در یک روز به‌طور متوسط است. ضریب ۲/۴ در این رابطه عددی است که اگر آن را با ۱۲ جمع یا از آن کم کنیم، طولانی‌ترین و کوتاه‌ترین مدت زمان روز در یک شبانه‌روز حاصل می‌شود که عبارت‌اند از ۱۴/۴ ساعت (اول تیر ماه) و ۹/۶ ساعت (اول دی ماه). عدد ۳۶۵ نیز تعداد روزهای سال است. به‌عنوان مثال طول روز در اول مهر ماه که ۱۸۷ امین روز سال است، تقریباً برابر است با :

$H(۱۸۷)\simeq ۱۱/۸$ ساعت

حال، شما طول تقریبی روز را در روزهای ۱۲ اردیبهشت ماه، ۱۵ مرداد ماه، ۲۲ بهمن‌ماه و ۳۰ آذر ماه به دست آورید.