

توابع نمایی و لگاریتمی



ریبون طلایی هگمتانه (کشف شده در همدان) شاهکار هنر فلزکاری عصر هخامنشیان (قدمت بیش از ۲۵۰۰ سال)

سنگ نوشته‌های گنج‌نامه (همدان) نوشتارهایی از دوران هخامنشی بر دل صخره‌های الوند (قدمت حدوداً ۲۵۰۰ سال)

آیا تا به حال اندیشیده‌اید که باستان‌شناسان چگونه طول عمر یک اثر باستانی را تخمین می‌زنند؟ با استفاده از روش سال‌یابی کربن ۱۴، می‌توان عمر یک اثر باستانی را محاسبه کرد. در این روش، تعیین قدمت اثر، با یک تابع لگاریتمی مدل‌سازی می‌شود.

تابع نمایی و ویژگی‌های آن

تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول

درس دوم

درس سوم

درس اول

تابع نمایی و ویژگی‌های آن

فعالیت

مسابقات جام حذفی فوتبال ایران در فصل ۹۴-۹۳ با شرکت ۳۲ تیم در پنج مرحله بازی از یک شانزدهم نهایی تا بازی نهایی به صورت زیر برگزار شد. همان طور که می‌بینید، در هر مرحله تیم برنده به مرحله بعدی می‌رود و تیم بازنده حذف می‌شود؛ به همین دلیل جام حذفی نامیده می‌شود.

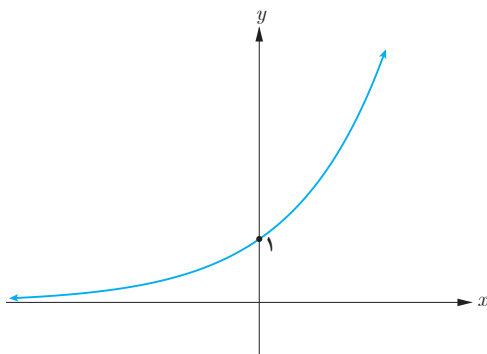
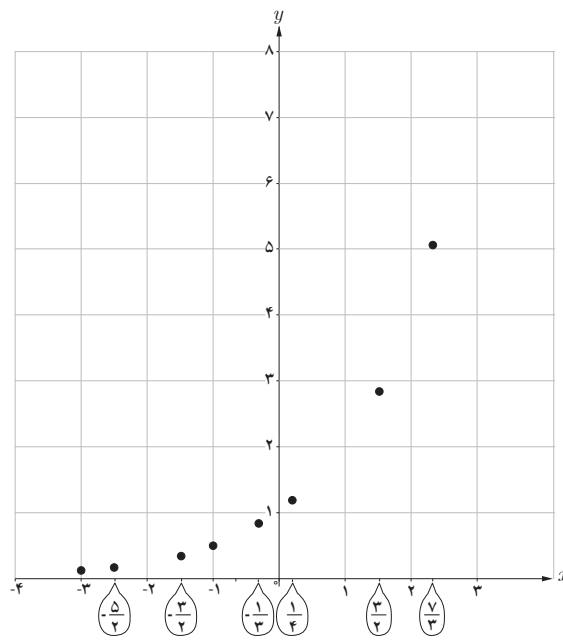


- ۱ در بازی نهایی چند تیم حضور دارند؟
- ۲ در مرحله قبل از بازی نهایی چند تیم حضور دارند؟
- ۳ تعداد تیم‌ها در هر مرحله با تعداد تیم‌ها در مرحله قبل از آن چه ارتباطی دارد؟
- ۴ چه رابطه‌ای بین تعداد مراحل و تعداد کل تیم‌های شرکت کننده در این مسابقات برقرار است؟
- ۵ با توجه به الگوی ارائه شده در شکل، اگر تعداد مراحل برابر ۶ باشد، تعداد تیم‌های اولیه چند تا است؟
- ۶ اگر تعداد مراحل x و تعداد کل تیم‌ها y باشد، چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟

فعالیت

جدول زیر را کامل و نقاط به دست آمده را در نمودار مشخص کنید. مقادیر به صورت تقریبی نوشته شده است.

x	-4	-3	$-\frac{5}{4}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{7}{3}$	3
2^x	...	0/12	0/18	...	0/35	0/5	0/79	...	1/19	...	2/83	...	5/04	...



دیدیم که برای هر عدد گویای a ، مقداری برای 2^a به دست می‌آید و نقطه $(a, 2^a)$ را می‌توان در دستگاه مختصات نشان داد. این موضوع برای اعداد گنگ نیز برقرار است، یعنی برای هر عدد گنگ مانند b نیز مقداری برای 2^b خواهیم داشت و مختصات $(b, 2^b)$ نیز نقطه‌ای را در دستگاه مختصات نمایش می‌دهد. اگر برای تمام اعداد حقیقی r ، مقادیر 2^r را به دست آوریم و نقاط $(r, 2^r)$ را در دستگاه مختصات مشخص کنیم، نمودار مقابل به دست خواهد آمد.

توان‌های حقیقی

در کتاب سال دهم، به ازای هر عدد حقیقی مثبت $a (a \neq 1)$ و عدد گویای $\frac{m}{n}$ ، مقدار $a^{\frac{m}{n}}$ را تعریف کردیم و ویژگی‌های مقدماتی آن را به دست آوردیم. این قوانین برای توان‌های حقیقی نیز برقرار است؛ یعنی اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف ۱ و x و y دو عدد حقیقی باشند، داریم:

الف) $a^0 = 1$ ب) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ پ) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ت) $(a^x)^y = a^{xy}$
 ث) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ ج) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ چ) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

کار در کلاس

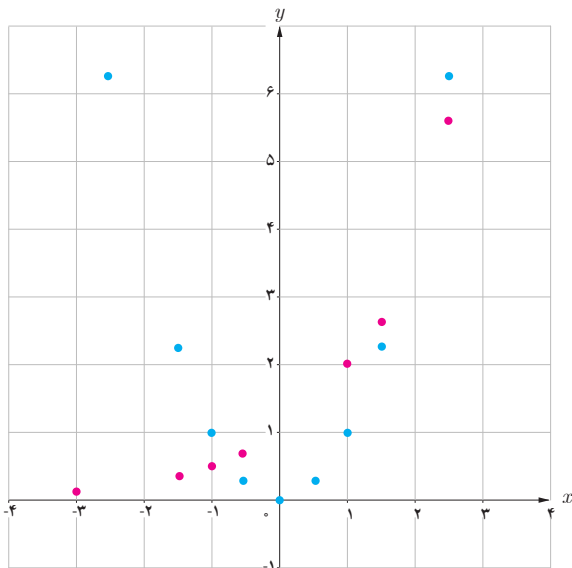
۱ جدول‌های زیر را تکمیل کنید. (مقادیر به صورت تقریبی نوشته شده است.)

x	$\frac{5}{4}$...	$\frac{3}{4}$	-۱	$-\frac{1}{4}$	۰	$\frac{1}{4}$	۱	$\frac{3}{4}$	۲	$\frac{5}{4}$
$y = x^x$	۶/۲۵	۴	۲/۲۵	۱	۰/۲۵	۰	۰/۲۵	۱	۲/۲۵	...	۶/۲۵

x	-۳	-۲	$-\frac{3}{4}$	-۱	$-\frac{1}{4}$	۰	$\frac{1}{4}$	۱	$\frac{3}{4}$	۲	$\frac{5}{4}$
$y = 2^x$	۰/۱۲	...	۰/۳۵	۰/۵	۰/۷۱	۲	۲/۸۳	...	۵/۶۶

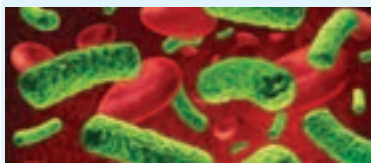
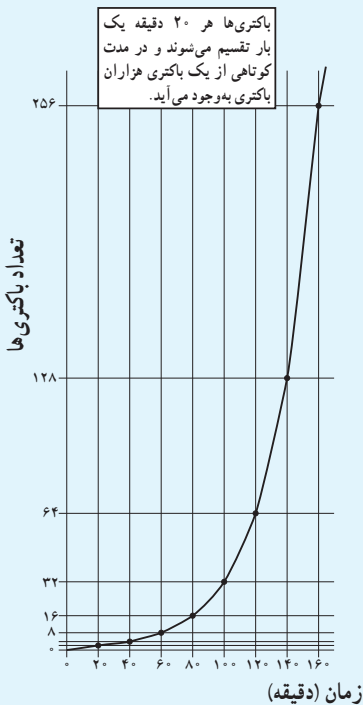
۲ حال، این دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. در چند نقطه مقادیر 2^x و x^x با هم مساوی‌اند؟

۳ در 2^x ، x متغیر در و عدد ثابت در است؛ ولی در x^x ، در توان و در پایه است.



خواندنی

بیشتر باکتری‌ها در فاصله ۲۰ دقیقه به حداکثر رشد خود می‌رسند و قادر به تولیدمثل می‌شوند. در شرایط محیطی مساعد، باکتری با سرعت زیادی تکثیر می‌شود. مثلاً یک باکتری بعد از ۲۰ دقیقه به دو باکتری تبدیل می‌شود. ۲۰ دقیقه بعد، از آن دو باکتری، چهار باکتری به وجود می‌آید و به همین ترتیب تعداد باکتری‌ها به ۸، ۱۶، ۳۲، ۶۴، ۱۲۸، ۲۵۶ و... می‌رسد. اگر این روش تکثیر باکتری‌ها تا ۲۴ ساعت ادامه یابد، از یک باکتری، توده‌ای از باکتری به وزن ۲۰۰۰ تن به وجود خواهد آمد! باکتری‌ها از طریق تولید سم یا تخریب سلول‌های بدن، باعث بیماری می‌شوند و به بدن آسیب می‌رسانند.



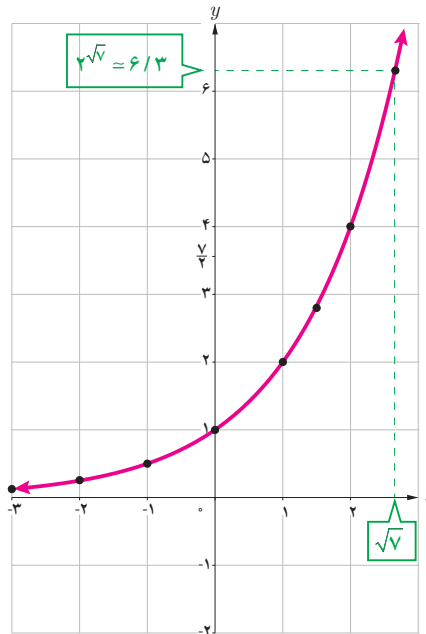
باکتری سل

هر تابع با ضابطه $f(x) = a^x$ که در آن $a \in \mathbb{R}$ و $a > 0$ و $a \neq 1$ یک تابع نمایی نامیده می‌شود.

مثال: توابع با ضابطه‌های $y = 2^x$ و $y = 3^x$ و $y = (\frac{1}{2})^x$ و $y = (\frac{1}{3})^x$ نمونه‌ای از توابع نمایی هستند.

فعالیت

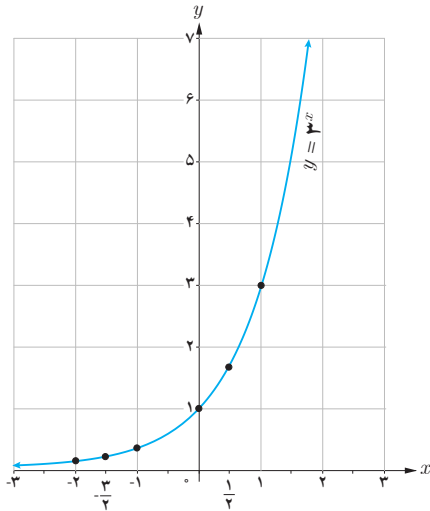
در شکل مقابل نمودار تابع نمایی با ضابطه $y = 2^x$ رسم شده است.



- ۱ محل تقاطع این نمودار با محور عرض‌ها چه نقطه‌ای است؟
- ۲ دامنه و برد این تابع را به صورت بازه بنویسید.
- ۳ آیا این تابع یک‌به‌یک است؟ چرا؟
- ۴ عدد $\sqrt{2}$ را روی محور x ‌ها مشخص کنید و به کمک نمودار، مقدار $2^{\sqrt{2}}$ را به صورت تقریبی به دست آورید.
- ۵ عدد $\frac{7}{4}$ روی محور y ‌ها مشخص شده است. با استفاده از نمودار، مقدار تقریبی عدد a را روی محور طول‌ها به دست آورید؛ به طوری که $\frac{7}{4} = 2^a$.
- ۶ اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.
 2^{-1} , $2^{-0.4}$, ۲۵ , $2^{0.3}$, $2^{\frac{5}{2}}$, $2^{\frac{3}{2}}$, $2\sqrt{5}$
- ۷ در حالت کلی اگر $x < y$ ، چه رابطه‌ای بین 2^y و 2^x برقرار است؟

کار در کلاس

نمودار تابع با ضابطه $y = 3^x$ با استفاده از نقاط جدول زیر رسم شده است.



x	$y = 3^x$
-2	۰/۱۱
-۳/۲	۰/۱۹
-1	۰/۳۳
۰	۱
۱/۲	۱/۷۳
۱	۳

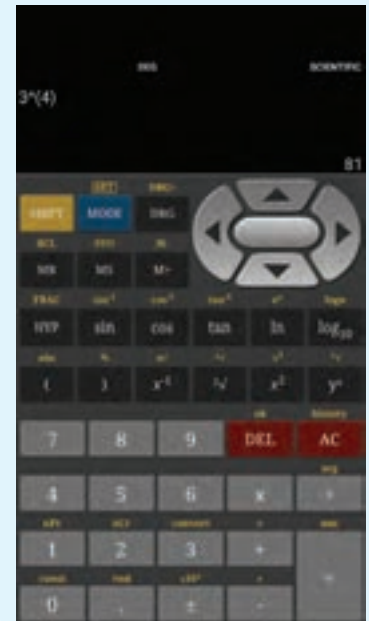
خواندنی

در اغلب ماشین حساب‌ها دکمه x^y (یا y^x) وجود دارد که با استفاده از آن می‌توانید مقادیر اعداد توان‌دار را به دست آورید. برای مثال جهت محاسبه 2^5 ، ابتدا عدد ۲ را وارد می‌کنید؛ سپس دکمه x^y و بعد عدد ۵ و سپس دکمه تساوی را فشار می‌دهید که عدد ۳۲ ظاهر می‌شود. اگر عدد توان، طبیعی نبود، آن را داخل پرانتز قرار می‌دهیم. تذکر: در برخی از ماشین حساب‌ها به جای دکمه x^y ، نمادی به صورت $\square \square$ وجود دارد که همان کار را انجام می‌دهد.

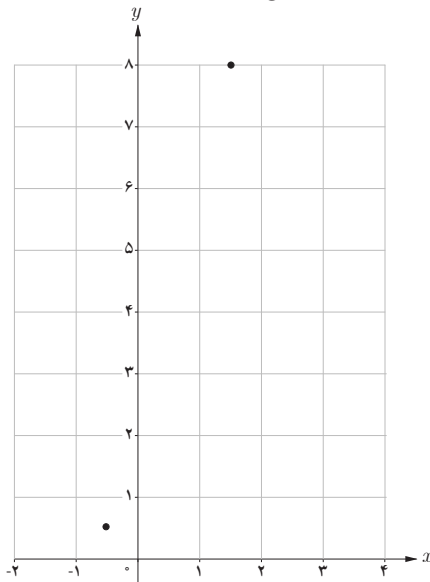
برای تمرین، مقادیر زیر را با استفاده از ماشین حساب به دست آورید. (تا یک رقم اعشار)

$2 \rightarrow x^y \rightarrow (\rightarrow 2 \rightarrow \sqrt{\ } \rightarrow) \rightarrow = \rightarrow 2/\sqrt{2}$

- ۱) $2\sqrt{2}$
- ۲) $2\sqrt{8}$
- ۳) 2^{-1}
- ۴) $2^{-0.5}$
- ۵) $2^{(1+\sqrt{3})}$



۱ جدول زیر را کامل کنید و با استفاده از آن نمودار تابع با ضابطه $y = 4^x$ را رسم کنید.



x	$y = 4^x$
.....	۱/۴
۱/۲	۱/۲
۰
۱/۲
۳/۲	۸

۲ دامنه و برد توابع فوق را باهم مقایسه کنید.

۳ با استفاده از نمودار، در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $3^{2/5} \bigcirc 3^{3/5}$

ب) $4^{\sqrt{7}} \bigcirc 4^{\sqrt{5}}$

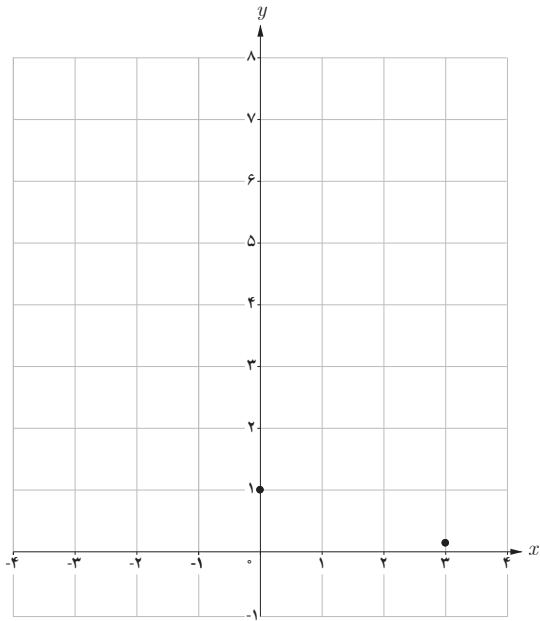
۴ اگر $x < y$ ، در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $3^x \bigcirc 3^y$

ب) $4^x \bigcirc 4^y$

۱ با استفاده از جدول زیر، نمودار تابع با ضابطه $y = (\frac{1}{4})^x$ را رسم کنید.

x	-۳	-۲	۰	۱	۳
$y = (\frac{1}{4})^x$	$\sqrt{2}$	۱	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



۲ محل تقاطع نمودار این تابع با محور y ها چه نقطه‌ای است؟

.....

۳ دامنه و برد این تابع را بنویسید.

.....

۴ آیا این تابع یک به یک است؟ چرا؟

.....

.....

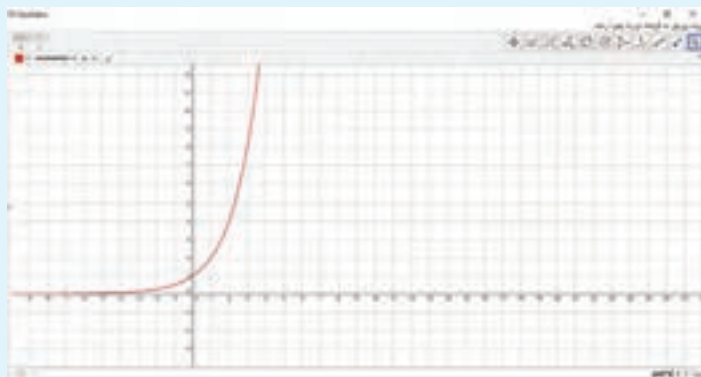
۵ با استفاده از نمودار فوق، در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $(\frac{1}{4})^{1/5} \bigcirc (\frac{1}{4})^{1/5}$

ب) $(\frac{1}{4})^{\sqrt{2}} \bigcirc (\frac{1}{4})^4$

پ) $(\frac{1}{4})^4 \bigcirc (\frac{1}{4})^3$

۶ با استفاده از نمودار، اگر $x < y$ ، چه رابطه‌ای بین $(\frac{1}{4})^x$ و $(\frac{1}{4})^y$ وجود دارد؟



خواندنی

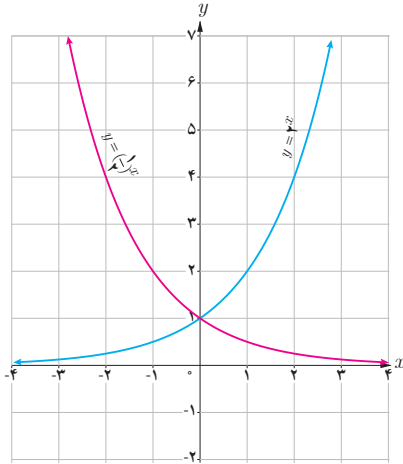
با استفاده از نرم‌افزار جئوجبرا (GeoGebra) می‌توانید نمودارهای توابع نمایی را به راحتی رسم کنید. برای این کار در نوار دستور، ضابطه تابع را حروف چینی کرده و کلید Enter را بزنید. در پنجره گرافیکی، نمودار مطلوب نمایش داده می‌شود.

در تصویر مقابل، نمودار تابع با ضابطه $y = 2^x$ در محیط این نرم‌افزار نمایش داده شده است.

کار در کلاس

نمودار توابع با ضابطه‌های $y = 2^x$ و $y = (\frac{1}{2})^x$ را در نظر بگیرید.

۱ نمودارهای این دو تابع نسبت به کدام محور مختصات قرینه‌اند؟



۲ با جایگذاری $-x$ به جای x در تابع با ضابطه $y = 2^x$ به تابع با ضابطه $y = \dots$ یا همان $y = \dots$ دست می‌یابیم.

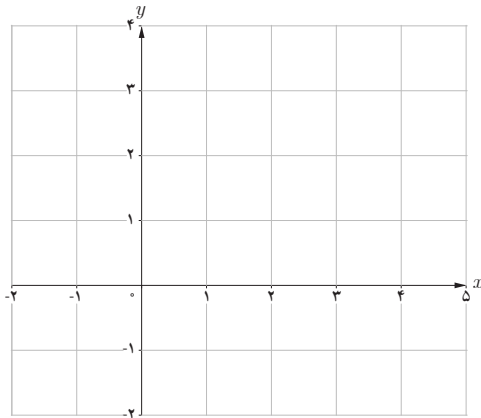
۳ دامنه و برد این دو تابع چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۴ دو تابع نمایی دیگری که نسبت به محور y ها قرینه‌اند، مثال بزنید.

نمودار توابع با ضابطه‌های $y = a^x$ و $y = a^{-x}$ ($a > 0$ و $a \neq 1$) نسبت به محور y ها قرینه‌اند.

کار در کلاس

نمودار تابع با ضابطه $y = (\frac{1}{3})^x$ را رسم کنید.



خواندنی

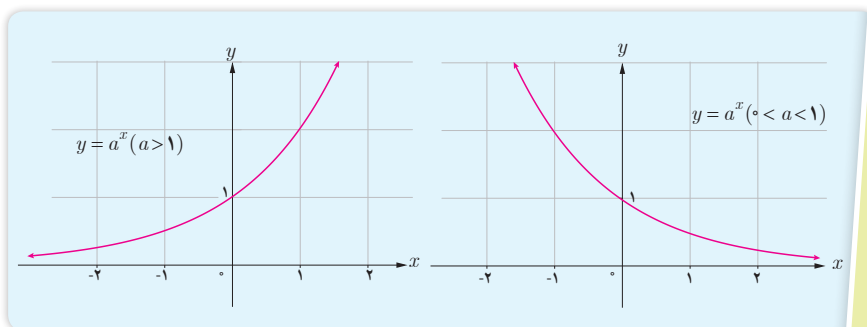
یک داروی بیماری آسم که به صورت قرص ۱۰۰ میلی‌گرمی موجود است، برای یک بیمار تجویز شده است. اگر او این قرص را مصرف کند و بدانیم در زمان مصرف دارو هیچ میزانی از آن در بدن وی موجود نیست، در این صورت می‌توان پیش‌بینی کرد که بعد از گذشت t دقیقه، در مجموع از این دارو به میزان A میلی‌گرم، در جریان خون او وجود خواهد داشت که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$A = 100 \left[1 - \left(\frac{1}{9} \right)^t \right]$$



سرو کهن ابرکوه (یزد) با عمر تقریبی ۴۰۰۰ سال

- با توجه به مطالبی که در این درس آموخته اید، جملات زیر را تکمیل کنید.
- ۱ دامنه تابع با ضابطه $y = a^x$ ($a > 1$) مجموعه اعداد حقیقی و برد آن است.
 - ۲ دامنه تابع با ضابطه $y = a^x$ ($0 < a < 1$) و برد آن بازه $(0, +\infty)$ است.
 - ۳ نمودار توابع فوق محور y ها را در نقطه قطع می‌کند و محور x ها را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند.
 - ۴ این دو تابع، یک به یک زیرا خطوط موازی محور x ها، نمودار آنها را حداکثر در نقطه قطع می‌کند. نمودار توابع نمایی در حالت کلی مشابه نمودارهای زیر است.



معادلات نمایی

معادله‌ای را که در آن متغیر در توان قرار گرفته باشد، معادله نمایی می‌نامند. برای حل معادلات نمایی از خاصیت یک به یک بودن تابع نمایی استفاده می‌کنیم. اگر a یک عدد حقیقی مثبت مخالف ۱ باشد و داشته باشیم $a^x = a^y$ آنگاه $x = y$ و برعکس.

الف) $3^{2x-3} = 81 \rightarrow 3^{2x-3} = 3^4 \rightarrow 2x-3 = 4 \rightarrow x = \frac{7}{2}$

مثال: معادله‌های نمایی مقابل را حل کنید.

ب) $4^{2x-1} = 8^{x+1} \rightarrow (2^2)^{2x-1} = (2^3)^{x+1} \rightarrow 4x-2 = 3x+3 \rightarrow x = 5$

پ) $5^{3n-1} = 125^{2n+1} \rightarrow 5^{3n-1} = 5^{6n+2} \rightarrow 3n-1 = 6n+3 \rightarrow n = -\frac{4}{3}$

تمرین

۱ کدام یک از ضابطه‌های زیر مربوط به یک تابع نمایی است؟

الف) $y = 2x^2 - 3x + 1$

ب) $y = x^x$

پ) $y = (0/1)^x$

ت) $y = (\frac{3}{4})^x$

ث) $y - 3x = 2$

ج) $y = \sqrt{x-1}$

۲ کدام یک از نقاط زیر، روی نمودار تابع با ضابطه $y = 3^x$ قرار دارند؟

الف) $(1, 0)$

ب) $(3, 1)$

پ) $(0, 1)$

ت) $(\sqrt{3}, \frac{1}{3})$

ث) $(1, 3)$

ج) $(-1, \frac{1}{3})$

۳ کدام گزاره صحیح است؟

الف) نقطه $(\frac{1}{5}, \sqrt{5})$ روی نمودار تابع با ضابطه $y = 5^x$ قرار دارد.

ب) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه $y = 10^x$ با محور y ها، نقطه $(0, 10)$ است.

پ) دامنه توابع با ضابطه‌های $y = 2^x$ و $y = x^2$ مساوی اند.

ت) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه $y = 6^x$ با محور x ها، نقطه $(6, 0)$ است.

۴ الف) نمودار تابع با ضابطه $y = 3^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی عدد $3^{\sqrt{2}}$ را با توجه به نمودار به دست آورید.

ب) نمودار تابع با ضابطه $y = (\frac{1}{3})^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی $(\frac{1}{3})^{\sqrt{5}}$ را با توجه به نمودار به دست آورید.

۵ فرض کنیم $f(x) = 3^x$ ، $g(x) = (\frac{1}{9})^x$ و $h(x) = 10^x$ ، مقادیر زیر را به دست آورید.

الف) $f(3)$

ب) $g(-1)$

پ) $h(-2)$

۶ معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $2^{3n-2} = \frac{1}{32}$

ب) $9^{3y-3} = 27^{y+1}$

پ) $4^{3x+2} = \frac{1}{64}$

ت) $9^x = 3^{x^2-4x}$

ث) $(\frac{3}{5})^{x+1} = \frac{25}{9}$

خواندنی

جمعیت جهان در طول قرن گذشته به سرعت رشد کرده است. در نتیجه تقاضای افزایشده‌ای برای منابع جهان ایجاد شده است. در بیشتر مواقع، از توابع و معادلات نمایی برای مدل‌سازی رشدهای سریع استفاده می‌شود. جمعیت جهان که با P نشان داده می‌شود، در سال ۱۹۶۰ برابر با ۳ میلیارد نفر و در سال ۲۰۰۸ برابر با ۶/۷ میلیارد نفر بوده است. این رشد جمعیت را می‌توان با رابطه $P(x) = 3(1/0.17)^{x-1960}$ که در آن x نشان‌دهنده سال است، نمایش داد. به کمک این رابطه می‌توان سالی را که در آن جمعیت جهان برابر ۸ میلیارد نفر خواهد شد، تخمین زد.



خواندنی

روش لگاریتم‌گیری در سال ۱۶۱۴ از سوی جان نیر (۱۶۱۷-۱۵۵۰)، ریاضی‌دان اسکاتلندی در کتابی با عنوان «توصیفی بر قانون شگفت‌انگیز لگاریتم» ارائه شد.

در فیزیک، مفهومی به نام شدت صوت وجود دارد که درک انسان را از بلندی صوت بیان می‌کند. تراز شدت یک صوت عبارت است از لگاریتم (در پایه ده) نسبت شدت آن صوت به شدت صوت مبنا. تراز شدت صوت را با β نشان می‌دهند و یکای آن را به افتخار بل فیزیک‌دان امریکایی مخترع تلفن، بل (B) و دسی‌بل (dB) نام‌گذاری کرده‌اند. هر بل برابر ده دسی‌بل است. (I : شدت صوت متناسب که برابر آستانه شنوایی گوش سالم است.)

$$\beta = \log_{10} I$$

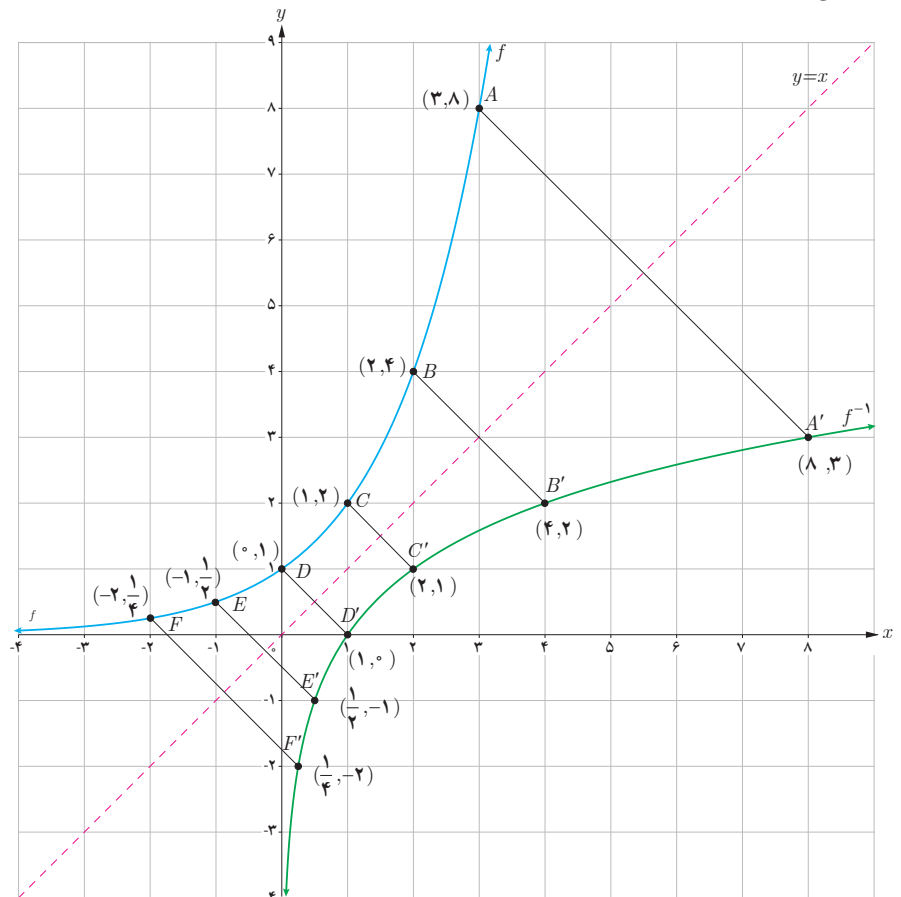
تراز شدت صوت dB	صدا
۰	شدت صوت مبنا
۱۰	نفس کشیدن
۲۰	برگ درختان در نسیم
۴۰	صحبت کردن از فاصله یک متری
۶۰	همهمه در فروشگاه
۷۰	سر و صدای خودروها در خیابان شلوغ
۱۲۰	آستانه دردناکی (برای بسامد ۱۰۰۰ Hz)
۱۳۰	مسلسل
۱۴۰	غرش هواپیمای جت در حین بلند شدن
۱۷۰	راکت فضایی، در موقع بلند شدن

بسیاری از اندازه‌گیری‌ها در علوم مختلف، طیف وسیعی از اعداد را در برمی‌گیرد که برای سادگی محاسبات، می‌توان آنها را توان‌هایی از یک عدد خاص در نظر گرفت و اندازه‌های بسیار بزرگ را در ابعاد بسیار کوچک‌تری نشان داد یا اندازه‌های بسیار کوچک را در ابعاد مناسب نمایش داد. کاربرد این ساده‌سازی محاسبات در علوم مختلف مانند فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، زمین‌شناسی، جمعیت‌شناسی، مهندسی و... مشهود است.

تابع لگاریتمی

فعالیت

در درس اول با تابع نمایی با ضابطه $f(x) = 2^x$ و نمودار آن آشنا شدیم. همان‌طور که مشاهده کردیم، این تابع یک به یک است؛ بنابراین وارون آن نیز یک تابع است. نمودار تابع f و وارون آن، تابع f^{-1} در دستگاه مختصات زیر رسم شده است که نسبت به خط $y = x$ قرینه‌اند.



۱ دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} در نمودار قبل را به دست آورید.

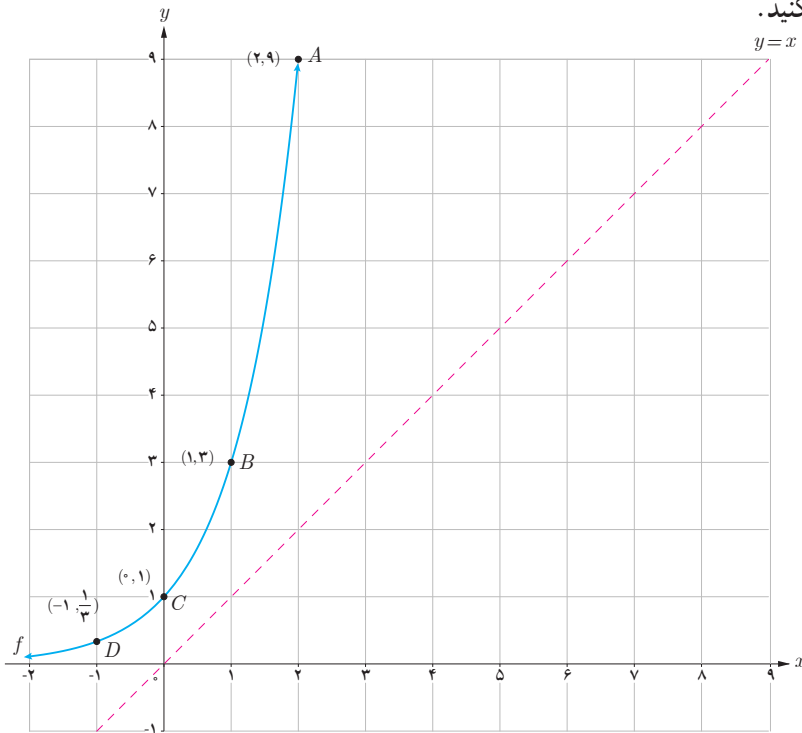
۲ با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

$f(-2) = \frac{1}{4}$	$f(-1) = \dots\dots\dots$	$f(0) = \dots\dots\dots$	$f(2) = \dots\dots\dots$
$f^{-1}(\frac{1}{4}) = \dots\dots\dots$	$f^{-1}(\frac{1}{2}) = \dots\dots\dots$	$f^{-1}(1) = \dots\dots\dots$	$f^{-1}(4) = \dots\dots\dots$

فعالیت

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 3^x$ در دستگاه مختصات زیر رسم شده است.

۱ با توجه به نقاط نمودار f ، نمودار f^{-1} را رسم کنید.



۲ با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار قبل، جاهای خالی را تکمیل کنید.

$f(-2) = \frac{1}{9}$	$f(0) = \dots\dots\dots$	$f(1) = \dots\dots\dots$	$f(\dots\dots) = 9$
$f^{-1}(\frac{1}{9}) = \dots\dots\dots$	$f^{-1}(1) = \dots\dots\dots$	$f^{-1}(\dots\dots) = 1$	$f^{-1}(9) = \dots\dots\dots$

۳ دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} را به دست آورید.

با توجه به مطالب فوق، وارون تابع با ضابطه $f(x) = 3^x$ را به صورت $f^{-1}(x) = \log_3 x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتم x در مبنای ۳ می‌نامیم. به عبارت دیگر توابع نمایی و لگاریتمی وارون یکدیگرند.

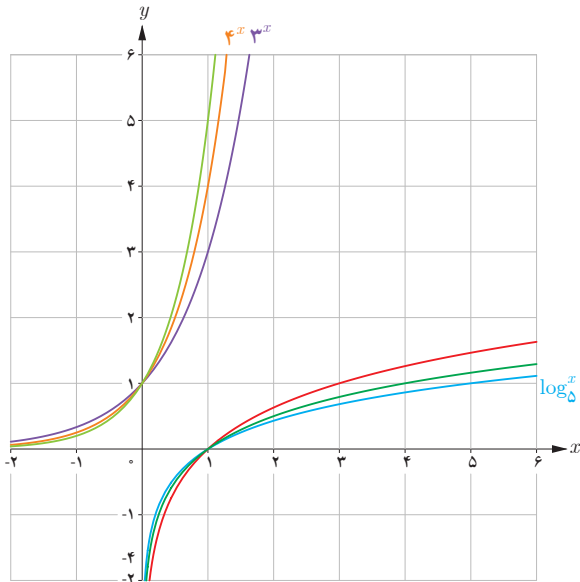
۴ با توجه به نمودار توابع نمایی و لگاریتمی، دامنه و برد آنها را به طور کلی بنویسید.

وارون تابع نمایی با ضابطه $f(x) = a^x$ را به صورت $f^{-1}(x) = \log_a x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتم x در مبنای a می‌نامیم. به عبارت دیگر برای هر عدد حقیقی مثبت a ($a \neq 1$) داریم:

$$f(x) = a^x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \log_a x$$

کار در کلاس

در شکل مقابل، نمودار شش تابع رسم شده است که دو به دو وارون یکدیگرند. برای توابعی که ضابطه آنها نوشته شده، ضابطه وارون آنها را روی نمودار مربوطه بنویسید و دامنه و برد هر تابع را مشخص کنید.

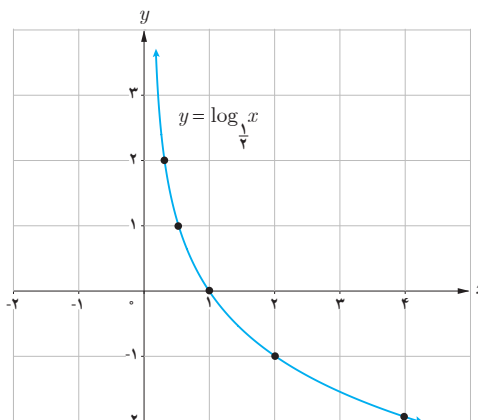


کار در کلاس

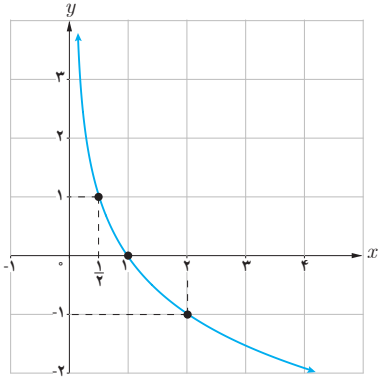
نمودار تابع با ضابطه $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ را در نظر بگیرید. اعداد زیر بین کدام اعداد صحیح قرار دارند؟

الف) $\log_{\frac{1}{2}} 3$

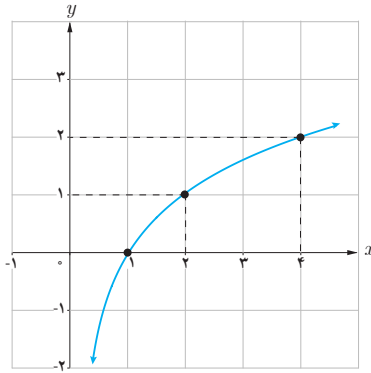
ب) $\log_{\frac{1}{5}} (1/5)$



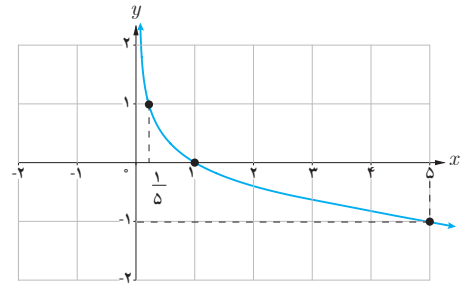
نمودار چند تابع لگاریتمی در زیر رسم شده است. ضابطهٔ مربوط به هر کدام را بنویسید.



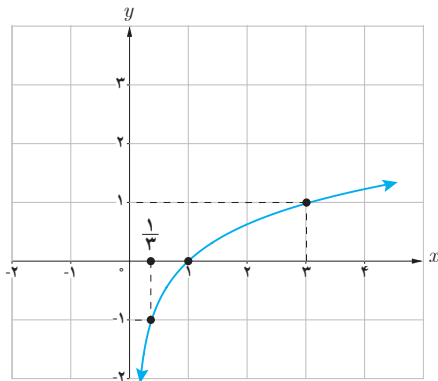
(۱)



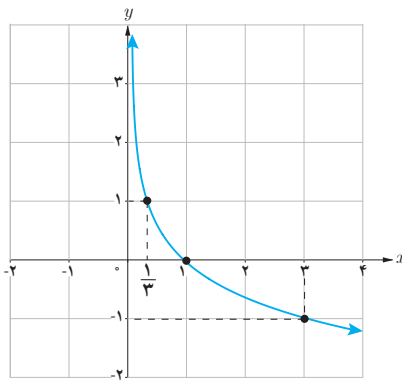
(۲)



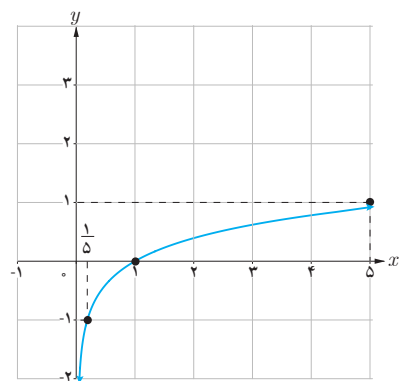
(۳)



(۴)



(۵)



(۶)

فعالیت

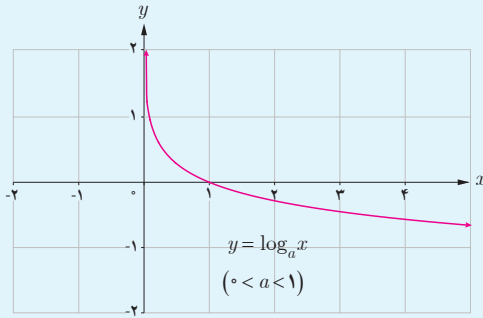
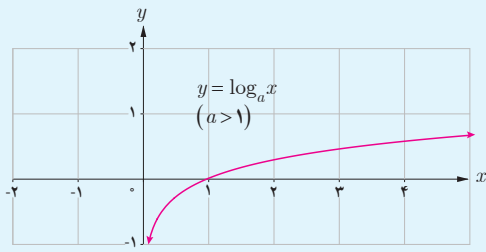
با توجه به مطالبی که تا به حال خوانده‌اید، جملات زیر را تکمیل کنید.

- ۱ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = \log_a x$ ($a > 1$)، مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت و برد آن است.
- ۲ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = \log_a x$ ($0 < a < 1$)، بازه و برد آن است.
- ۳ نمودار توابع فوق، محور x ها را در نقطهٔ قطع می‌کند و محور y ها را قطع نمی‌کند.
- ۴ این دو تابع، یک به یک زیرا خطوط موازی محور x ها، نمودار آنها را حداکثر در نقطه قطع می‌کند.
- ۵ وارون تابع نمایی، تابع است و وارون تابع لگاریتمی، تابع است.

اگر a عدد حقیقی مثبت ($a \neq 1$) باشد، داریم: $a^0 = 1$ ، بنابراین همواره:

$$\log_a 1 = 0$$

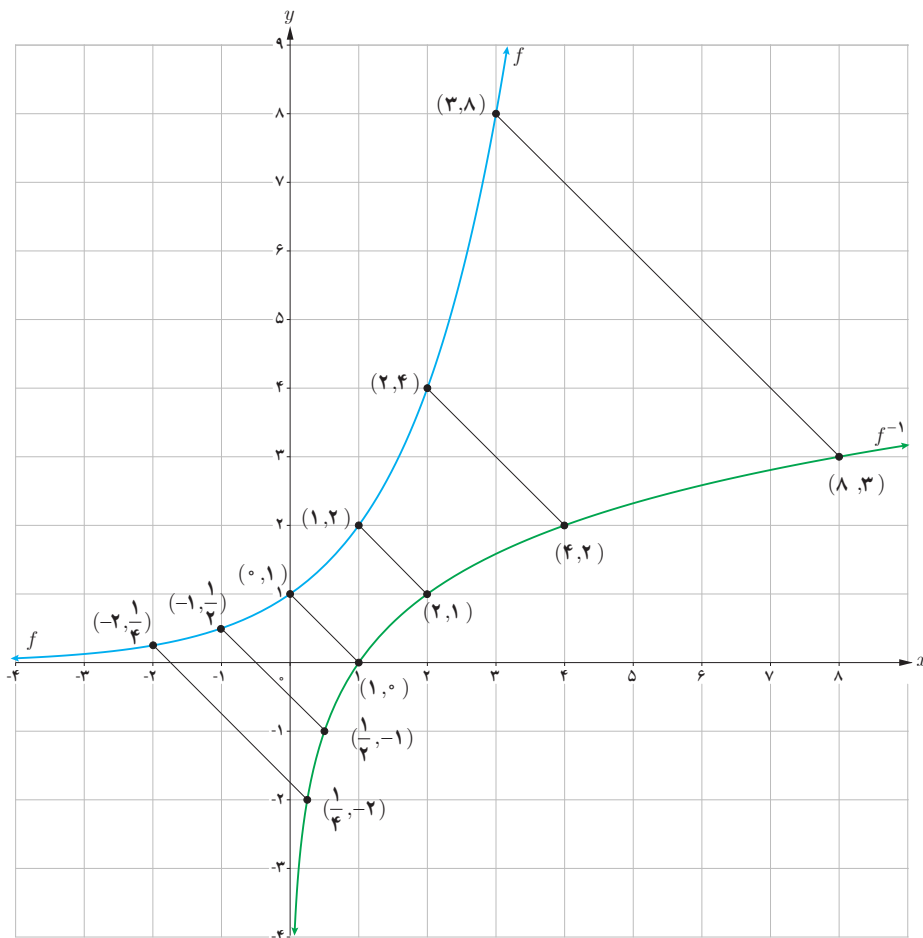
نمودار تابع لگاریتمی در حالت کلی، مشابه نمودارهای زیر است.



لگاریتم یک عدد

فعالیت

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 2^x$ و $f^{-1}(x) = \log_2 x$ را در نظر بگیرید.



با توجه به نقاط این دو نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

نمایی	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$2^0 = 1$	$2^2 = 4$
لگاریتمی	$\log_2 \frac{1}{4} = -2$	$\log_2 \frac{1}{2} = \dots$	$\log_2 2 = 1$	$\log_2 8 = \dots$

به طور کلی اگر $a^y = x$ آن گاه $\log_a x = y$ و به عکس. ($x > 0, a \neq 1, a > 0$)

$$b^a = c \Leftrightarrow \log_b c = a \quad (c > 0, b > 0, b \neq 1)$$

کار در کلاس

جدول زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

$10^3 = 1000 \rightarrow \log_{10} 1000 = 3$	$\log_8 1 = 0 \rightarrow 8^0 = 1$
$9^{\frac{1}{2}} = 3 \rightarrow \log_9 3 = \dots$	$\log_2 \left(\frac{1}{16}\right) = -4 \rightarrow 2^{-4} = \dots$
$4^3 = 64 \rightarrow \log_4 64 = \dots$	$\log_5 125 = 3 \rightarrow 5^3 = \dots$
$2^5 = 32 \rightarrow \dots = \dots$	$\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3 \rightarrow \dots = \dots$
$2^{-3} = \dots \rightarrow \dots = \dots$	$\log_{\frac{1}{5}} 125 = \dots \rightarrow \dots = \dots$
$3^{-2} = \dots \rightarrow \dots = \dots$	$\log_{\frac{1}{2}} 16 = \dots \rightarrow \dots = \dots$



دریاچه تار (دمارند)

خواندنی

ابداع لگاریتم یکی از مهم‌ترین ابداعات ریاضی است و کاربرد آن در ساده کردن محاسبات است. با لگاریتم، عمل ضرب به جمع و عمل تقسیم به تفریق تبدیل می‌شود.



خواندنی

همزمان با افزایش ارتفاع، فشار هوای اتمسفر (جو زمین) کاهش می‌یابد. رابطه محاسبه فشار براساس ارتفاع به صورت $a = 1550 \cdot (5 - \log^p)$ است، که در آن a ارتفاع برحسب متر و p نیز فشار برحسب پاسکال است. فشار هوا را در بالای قله دماوند به ارتفاع 5610 متر محاسبه کنید.

تذکر

لگاریتم در مبنای 10 را لگاریتم اعشاری می‌نامیم. در این حالت معمولاً مبنا نوشته نمی‌شود، یعنی به جای $\log_{10} a$ می‌نویسیم $\log a$.

ویژگی‌های لگاریتم

فعالیت

۱ اگر a عدد حقیقی مثبت ($a \neq 1$) باشد، همواره داریم:

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{و} \quad \log_a a = 1 \quad \text{و} \quad \log_a \left(\frac{1}{a}\right) = -1$$

۲ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c ($c \neq 1$) داریم:

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

اثبات: فرض کنیم $m = \log_c a$ و $n = \log_c b$ ، پس طبق تعریف $a = c^m$ و $b = c^n$ ، از این رو $ab = c^m \cdot c^n = c^{m+n}$ بنا بر این طبق تعریف لگاریتم داریم: $\log_c ab = m + n$ در نتیجه:

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

مثال: فرض کنید $\log 2 = 0.3$ و $\log 3 = 0.48$ ، مقدار $\log 6$ را حساب کنید.

$$\log 6 = \log (3 \times 2) = \log 3 + \log 2 = 0.48 + 0.3 = 0.78$$

۳ اگر a و b اعدادی حقیقی و مثبت و $a \neq 1$ و n یک عدد طبیعی باشد، داریم:

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

اثبات:

$$\log_a b^n = \log_a \underbrace{b \dots b}_n = \underbrace{\log_a b + \dots + \log_a b}_n = n \log_a b$$

۴ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c ($c \neq 1$) داریم:

$$\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$$

اثبات: فرض می‌کنیم $\frac{a}{b} = d$ ، بنابراین:

$$a = bd \rightarrow \log_c a = \log_c b + \log_c d \rightarrow \log_c d = \log_c a - \dots$$

$$\log_c \frac{a}{b} = \dots - \log_c b$$

مثال: اگر $\log 2 = 0.3$ ، مقدار $\log 5$ را محاسبه کنید.

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2 = 1 - 0.3 = 0.7$$

کار در کلاس

اگر $\log 2 \approx 0.3$ و $\log 3 \approx 0.48$ ، مقادیر تقریبی اعداد زیر را به دست آورید.

$$۱) \log 12 = \log(3 \times 4) = \log 3 + \log 2^2 = \log 3 + 2 \log 2 \approx 0.48 + 0.6 = 1.08$$

$$۲) \log 0.75 = \dots \dots \dots \quad ۳) \log \sqrt{5} = \dots \dots \dots$$

$$۴) \log \frac{25}{18} = \dots \dots \dots \quad ۵) \log \sqrt[3]{6} = \dots \dots \dots$$

$$۶) \log \frac{\sqrt{27}}{\sqrt[4]{5}} = \dots \dots \dots$$

معادلات لگاریتمی

یکی از مهم‌ترین کاربردهای لگاریتم، حل معادلات لگاریتمی است که معمولاً از مدل‌سازی یک مسئله واقعی به دست می‌آید. مانند محاسبه شدت زلزله، مشخص کردن ضعیف‌ترین صدای قابل شنیدن یا آستانه شنوایی، پیش‌بینی تعداد جمعیت یک جامعه پس از زمان مشخص و محاسبه نیمه عمر عناصر رادیواکتیو. معادلات زیر نمونه‌هایی از معادلات لگاریتمی اند:

$$\log_4 x + 1 = 3, \quad \log_7 x = \log_7 7, \quad \log_8 x + \log_8(x-1) = \log_8 12$$

منظور از حل معادله لگاریتمی، پیدا کردن مقادیری برای مجهول است که در معادله صدق کند.

به طور کلی اگر a یک عدد حقیقی مثبت ($a \neq 1$)، باشد آن‌گاه با توجه به یک به یک بودن تابع لگاریتمی، از تساوی $\log_a x = \log_a y$ ($x, y > 0$) می‌توان نتیجه گرفت $x = y$ و به عکس، اگر $x = y$ ($x, y > 0$) آن‌گاه $\log_a x = \log_a y$.

فعالیت

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$۱) \log_3 x = 2 \rightarrow x = 3^2 = 9$$

$$۲) \log_5(x+6) = \log_5(2x-3) \rightarrow x+6 = 2x-3 \rightarrow x=9$$

که $x=9$ برای هر دو لگاریتم قابل قبول است.

$$۳) \log_5(x+6) + \log_5(x+2) = 1 \rightarrow \log_5[(x+6)(x+2)] = 1$$

$$\rightarrow (x+6)(x+2) = 5 \rightarrow x^2 + 8x + 12 = 5$$

$$\rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0 \rightarrow (x+7)(x+1) = 0 \rightarrow x = -7 \text{ یا } x = -1$$

توجه کنید که $x = -7$ قابل قبول نیست؛ از این رو تنها جواب $x = -1$ قابل قبول است که در معادله اصلی صدق می‌کند.

خواندنی

لاپلاس دانشمند بزرگ فرانسوی درباره لگاریتم گفته است:

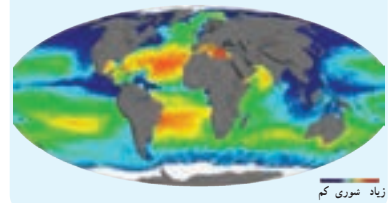
«لگاریتم ابزاری است قابل ستایش که به کمک آن کار چند ماه به چند روز کاهش می‌یابد، عمر اخترشناسان را دو برابر می‌کند و از خطاهای کوچک می‌گذرد و از عبارات طولانی و جدا نشدنی ریاضی بیزار است».

خواندنی

شوری آب اقیانوس‌ها با عرض جغرافیایی (فاصله از خط استوا) و عمق اقیانوس تغییر می‌کند. در مناطق استوایی میزان شوری آب در سطح اقیانوس‌ها به دلیل تبخیر سریع آب، بیشتر است. هرچه به قطب نزدیک‌تر می‌شویم، کاهش تبخیر و بارش باران باعث می‌شود شوری سطح آب کاهش یابد. تابع مربوطه عبارت است از:

$$S(x) = 31/5 + 1/1 \log(x+1)$$

که در این رابطه x نشان‌دهنده عمق به متر و $S(x)$ نشان‌دهنده مقدار گرم نمک موجود در هر کیلوگرم آب اقیانوس است.



زیاد شوری کم

- ۴ $\log_4(x+2) = \log_4 8 \rightarrow x+2=8 \rightarrow x=\dots$
- ۵ $3 \log_2 x = -\log_2 27 \rightarrow \log_2 x^3 = \dots \rightarrow \dots$
- ۶ $\log(x+1) - \log(x-3) = 3 \rightarrow \log \frac{x+1}{x-3} = 3 \rightarrow \dots$

کار در کلاس

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

- ۱ $\log_5 x = 3 \dots$
- ۲ $\log_2(2x+1) = 3 \dots$
- ۳ $\log_2(x+1) + \log_2(x+4) = 2 \dots$
- ۴ $\log_2 243 = 2x+1 \dots$
- ۵ $\log_2(x-1) = 4 \dots$
- ۶ $\log(2x) - \log(x-3) = 1 \dots$
- ۷ $2 \log_2(x-1) = 3 \dots$

تمرین

۱ تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\log_c abd = \log_c a + \log_c b + \log_c d$ ($c \neq 1$ و a و b و d اعداد حقیقی مثبت اند)

ب) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ (b و $c \neq 1$ و a و b و c اعداد حقیقی مثبت اند)

پ) $a^{\log_a b} = b$ ($a \neq 1$ و a و b اعداد حقیقی مثبت اند)

ت) $\log_b a \times \log_a b = 1$

۲ حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\log_v \sqrt[5]{49}$ ب) $\log_3 27^{\frac{1}{2}}$ پ) $-\log_5 125$ ت) $3 \log_1 \sqrt{1000}$

۳ اگر $f(x) = 3 - 2 \log_4 \left(\frac{x}{4} - 5\right)$ ، مقدار $f(42)$ را به دست آورید.

۴ الف) اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(2, 2)$ عبور کند، مقدار a را به دست آورید.

ب) اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(-\frac{1}{4}, -4)$ عبور کند، مقدار a چند است؟

۵ نمودار تابع با ضابطه $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ را رسم کنید.

۶ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) اگر $y = \log_a x$ ، آنگاه $a^x = y$.

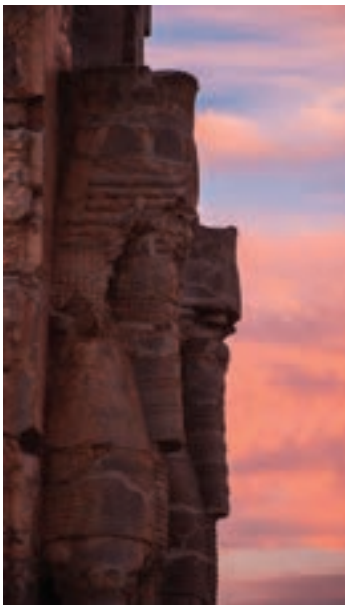
ب) نمودار تابع با ضابطه $y = \log_a x$ ($0 < a < 1$) از نقطه $(1, 0)$ عبور می‌کند.

پ) لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

۷ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_7 (p^2 - 2) = \log_7 p$ ب) $\log_8 (x+1) + \log_8 (x-1) = 1$

پ) $3 \log_4 a - \log_4 5 = \log_4 25$ ت) $\log_{\frac{1}{10}} (x^2 - 21) = -2$



تخت جمشید (فارس)

نمودارهای توابع نمایی و لگاریتمی

در درس اول و دوم با نمودار توابع نمایی و لگاریتمی آشنا شدیم. نمودار این توابع را می‌توان با استفاده از قوانینی که قبلاً فرا گرفته‌ایم، انتقال دهیم.

با توجه به آنچه که در مبحث انتقال توابع گفته شد، فعالیت زیر را انجام دهید.

فعالیت

نمودار هر تابع را به ضابطه آن نظیر کنید.

الف) $k(x) = -\log_7 x$

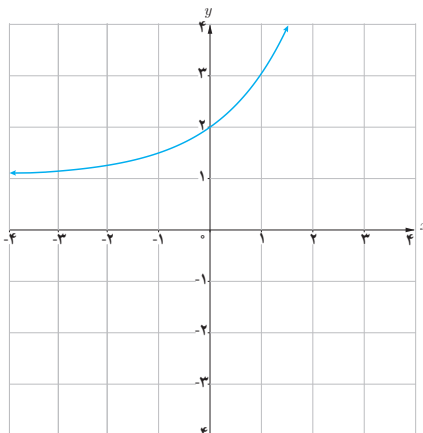
ت) $g(x) = \log_7(x-1)$

ب) $l(x) = 2 + \log_7 x$

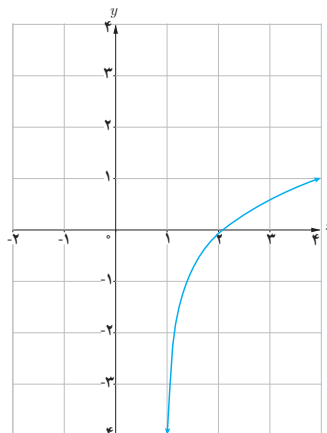
ث) $j(x) = 3^{(x-1)}$

پ) $h(x) = -\left(\frac{1}{7}\right)^x$

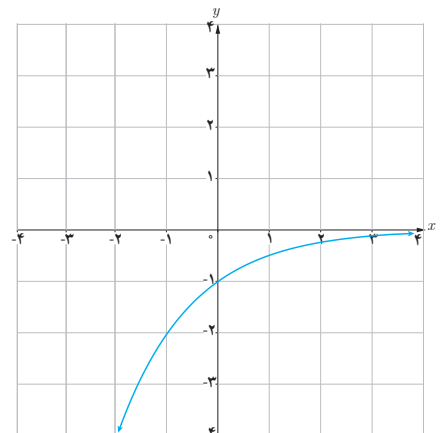
ج) $f(x) = 2^x + 1$



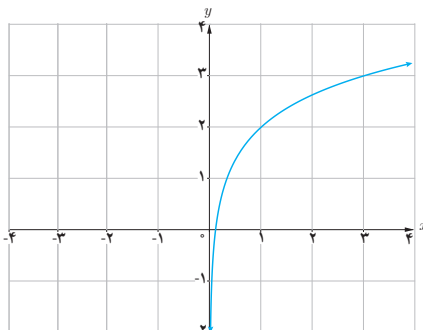
(۱)



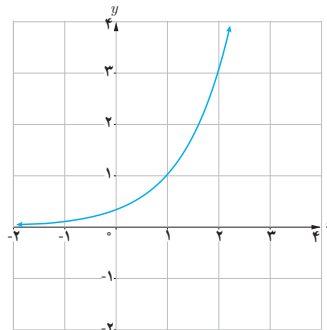
(۲)



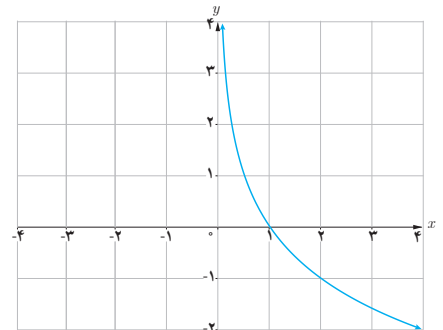
(۳)



(۴)

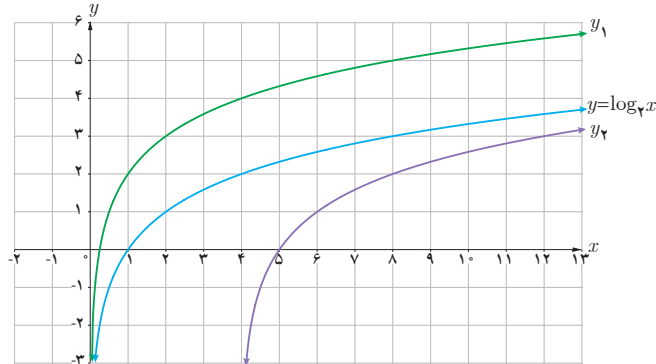
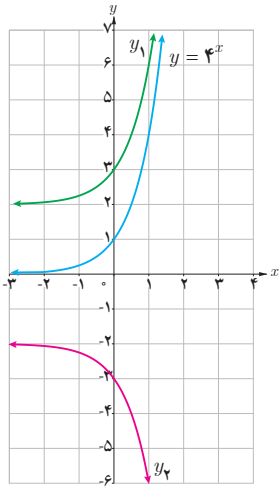


(۵)



(۶)

در شکل‌های زیر، نمودار یک تابع نمایی و یک تابع لگاریتمی و انتقال یافته‌های آنها رسم شده است. ضابطه توابع انتقال یافته را بنویسید.



کدام یک از ضابطه‌ها به کدام یک از نمودارها تعلق دارند؟

۱) $y = \log_4(x - 1)$

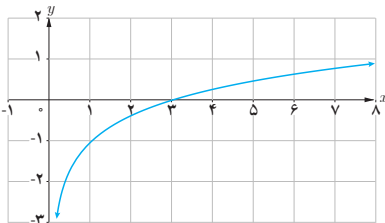
۲) $y = 3^x + 1$

۳) $y = 1 - 3^x$

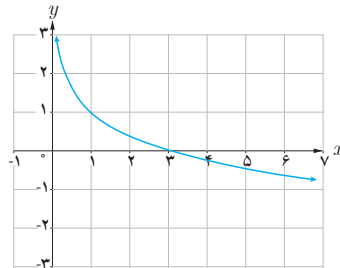
۴) $y = \log_4 x - 1$

۵) $y = 1 - \log_4 x$

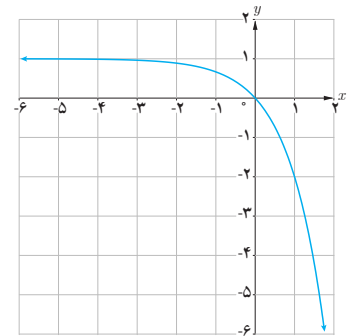
۶) $y = 3^{(x-2)}$



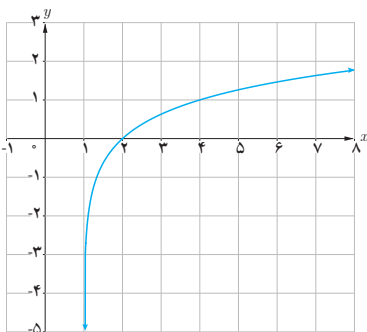
(الف)



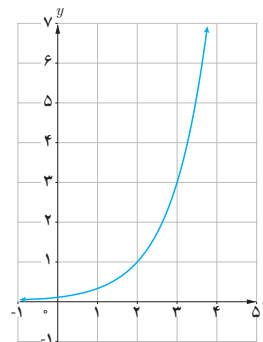
(ب)



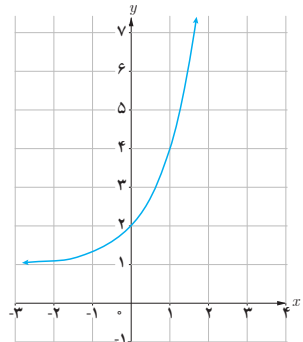
(پ)



(ت)



(ث)

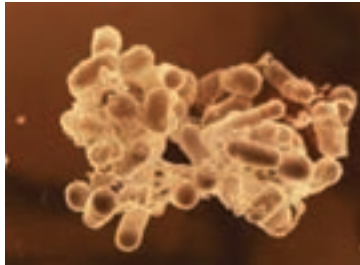


(ج)

کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی

تابع نمایی :

در حالت کلی یک تابع به صورت $h(x) = ka^x$ ($a \neq 1, a > 0$) رفتار نمایی دارد که در بسیاری از مسائل اقتصادی، طبیعی و مهندسی و... ظاهر می شود.



توده باکتری اشریشیاکلی

مثال : اشریشیاکلی (Escherichia coli) یا به طور اختصار E.coli نوعی باکتری است که به طور طبیعی در دستگاه گوارش زندگی می کند و تکثیر آن به صورت نمایی است. عوامل مختلفی مانند زیاد شدن آن باعث بیماری می شود. نوع خاصی از این بیماری با 10^6 باکتری شروع می شود و هر باکتری در مدت نیم ساعت به دو قسمت تقسیم می شود. اندازه هر توده باکتری بعد از t ساعت از رابطه زیر به دست می آید :

$$p(t) = 10^6 \times 2^{2t} \quad (0 \leq t \leq 16)$$

با فرض اینکه هیچ کدام از باکتری ها از بین نروند، تعداد باکتری ها در یک توده پس از ۳ ساعت برابر است با :

$$p(3) = 10^6 \times 2^6 = 64000$$

تابع لگاریتمی :

ریشتر، مقیاسی برای اندازه گیری بزرگی زمین لرزه است که میزان انرژی آزاد شده در زلزله را نشان می دهد. اگر بزرگی زلزله ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزاد شده آن زلزله برابر E در واحد ارگ (Erg) است که از رابطه زیر به دست می آید :

$$\log E = 11/8 + 1/5 M$$

انرژی یک زلزله ۸ ریشتری تقریباً برابر با انرژی انفجار یک میلیارد تن ماده انفجاری TNT است.

مثال : روز پنجم دی ماه ۱۳۸۲ زلزله ای به شدت ۶/۶ ریشتر، شهر بم و مناطق اطراف آن را در شرق استان کرمان لرزاند. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله چقدر بوده است؟

$$\log E = 11/8 + 1/5 M \rightarrow$$

$$\log E = 11/8 + 1/5 (6/6)$$

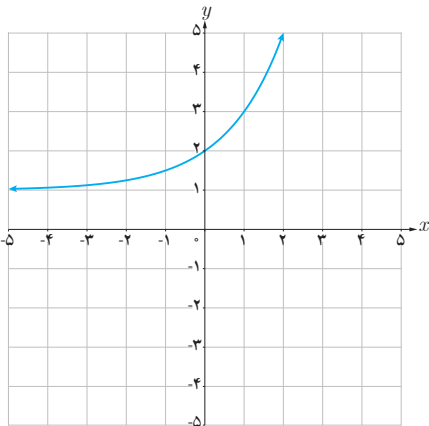
$$\rightarrow \log E = 21/7 \rightarrow E = 10^{21} \text{ Erg}$$

کار در کلاس



زلزله ۳۱ خرداد سال ۱۳۶۹ رودبار – منجیل به بزرگی ۷/۴ ریشتر در ساعت سی دقیقه بامداد رخ داد. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله را محاسبه کنید.

تمرین



۱ در دستگاه مختصات روبه‌رو نمودار تابع با ضابطه $y = a + 2^{(x-b)}$ رسم شده است. a و b را به دست آورید.

۲ فرض می‌کنیم $g(x) = 4^x + 2$. الف) $g(-1)$ را به دست آورید. ب) اگر $g(x) = 66$ ، مقدار x چقدر است؟

۳ نمودار تابع با ضابطه $y = 4^x - 1$ را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید.

۴ نمودار توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y = -2^x + 1$

ب) $y = -\log_2(x - 1)$

پ) $y = 2^{|x|}$

ت) $y = \frac{|x|}{x} \log x$