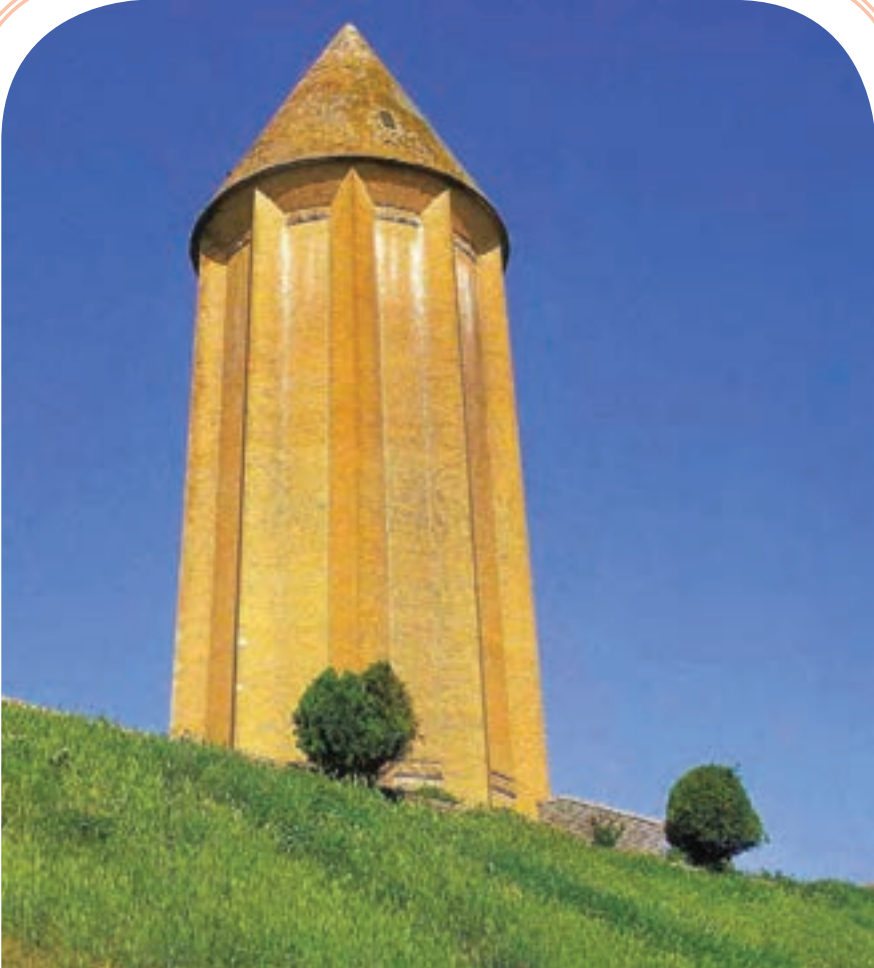




حجم و مساحت



گنبد قابوس بنایی تاریخی از سدهٔ چهارم هجری است که در شهر گنبد کاووس در استان گلستان قرار دارد. این بنا بلندترین برج تمام آجری جهان به شمار می‌رود. این برج **استوانه‌ای** که گنبدی **مخروطی** شکل روی آن قرار گرفته است، ۵۵ متر ارتفاع دارد. ستون‌هایی به شکل **منشور** روی بدنهٔ استوانه‌ای این برج قرار گرفته است. شما در این فصل با حجم‌های استوانه، مخروط و منشور آشنا می‌شوید.

درس اول: حجم و مساحت کره

در سال‌های قبل با انواع حجم‌های هندسی آشنا شدید. این حجم‌ها به سه دسته تقسیم می‌شوند: منشوری، کره و هرمی.

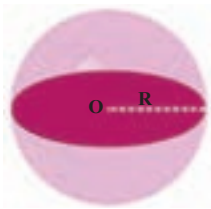


کره زمین و توپ بسکتبال نمونه‌هایی از حجم‌های کره است. چند نمونه دیگر از حجم‌های کره را نام ببرید.

فعالیت

۱- به تعریف دایره به عنوان یک شکل هندسی مسطح توجه کنید:

دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که همه آن نقطه‌ها از یک نقطه در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصله ثابت و مشخص هستند. به این اندازه ثابت، شعاع دایره می‌گوییم.



با توجه به این تعریف در قسمت زیر، کره را به عنوان یک شکل هندسی فضایی تعریف کنید.

کره مجموعه _____ از فضا است که مرکز _____ هستند. به این اندازه _____ می‌گوییم.

۲- کارهای زیر را انجام دهید تا در انتهای فعالیت، راه محاسبه

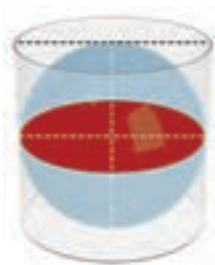
حجم کره را پیدا کنیم.

● یک توپ پلاستیکی به شکل کره تهیه کنید.

● مانند شکل مقابل با قرار دادن دو سطح صاف موازی، قطر

کره را اندازه بگیرید.





● مانند شکل مقابل به کمک طلق، یک استوانه درست کنید، به طوری که توپ کروی به طور کامل درون آن قرار گیرد و از اطراف، بالا و پایین بر آن مماس شود.

در این حالت می‌گوییم کره در استوانه محاط شده و استوانه نیز بر کره محیط شده است. اگر شعاع کره R باشد، ارتفاع استوانه و شعاع قاعده آن را بر حسب R نشان دهید.

: ارتفاع استوانه

: شعاع قاعده استوانه

: حجم استوانه



● توپ را از استوانه خارج کنید و با دقت آن را بپرسید تا به دو نیم کره مساوی تبدیل شود. مانند شکل مقابل، یکی از نیم کره‌ها را داخل استوانه بگذارید و نیم کره دیگر را از آب پر و در استوانه خالی کنید. اگر این کار را با دقت انجام دهید و استوانه را خوب آب‌بندی کرده باشید که آبی از آن خارج نشود، با دو نیم کره، فضای باقیمانده پر از آب می‌شود.

(الف) حجم استوانه، چند برابر حجم نیم کره است؟

(ب) حجم استوانه چند برابر حجم کره است؟

(ج) بنابراین حجم کره ————— برابر حجم استوانه است.

(د) با توجه به دستور محاسبه حجم استوانه، که در بالا ذکر شد، دستور محاسبه حجم کره به شعاع R را به دست آورید.

$$\text{حجم کره ای به شعاع } R \text{ از دستور } V = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ به دست می‌آید.}$$

کار در کلاس

۱- کره‌ای در استوانه‌ای به قطر قاعده و ارتفاع 10° سانتی متر محاط شده است.

(الف) حجم کره را به دست آورید.

(ب) حجم استوانه را به دست آورید.

(ج) حجم فضای بین کره و استوانه را به دست آورید.

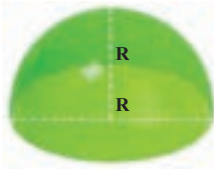
۲- حجم نیم کره‌ای به شعاع 10° سانتی متر را به دست آورید.



مانند شکل مقابل، نیم کره‌ای را که از نصف کردن توپ پلاستیکی به دست آوردید، روی یک صفحه کاغذ قرار دهید و دو بار روی کاغذ، دایره رسم کنید طوری که نیم کره بتواند روی این دایره‌ها قرار گیرد و آن را بیوشاند.

این دو دایره کاغذی را هر طور که دوست دارید، برش بزنید و کاغذهای بریده شده را روی سطح نیم کره بچسبانید. مراقب باشید تا حدامکان، کاغذها روی هم قرار نگیرند و سطح نیم کره نیز دیده نشود.

آیا توانستید تمام سطح (رویه) نیم کره را با این دو دایره بیوشانید؟ درباره مشکلات این کار و تقریبی بودن آن و راه‌های افزایش دقت این کار با یکدیگر گفت‌وگو کنید.



ثابت می‌شود که مساحت رویه یک نیم کره به شعاع R ، دو برابر مساحت دایره‌ای است که نیم کره روی آن ایستاده است (قاعده نیم کره).

الف) پس مساحت رویه نیم کره برابر است با : _____
ب) در نتیجه مساحت کره به شعاع R برابر است با : _____

$$S = 4\pi R^2 \text{ با } R \text{ برابر است}$$

کار در کلاس

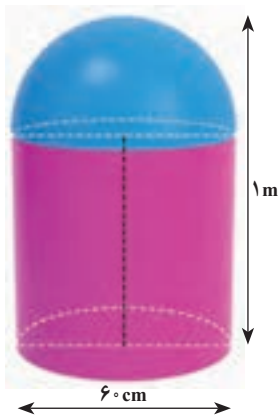


۱- مساحت یک کلاه (عرق چین) به شکل رویه نیم کره به شعاع 10 سانتی متر را پیدا کنید.

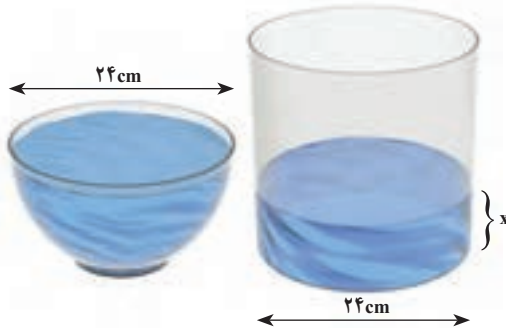
۲- می‌خواهیم یک نیم کره چوبی توپر به شعاع 10 سانتی متر را رنگ کنیم. مساحت کل قسمت رنگ شده را پیدا کنید.

بین محاسبه مساحت کل نیم کره چوبی توپر و مساحت رویه یک عرق چین چه تفاوتی هست؟

- ۱- قطر تقریبی کره زمین حدود 12800 کیلومتر است.
 الف) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب کیلومتر با نماد علمی بنویسید.
 ب) مساحت تقریبی رویه (سطح) کره زمین را بر حسب کیلومتر مربع با نماد علمی بنویسید.
 ج) مساحت کشور جمهوری اسلامی ایران حدود $1/648000$ کیلومتر مربع است. مساحت ایران چه کسری از مساحت کره زمین است؟ این نسبت را با درصد نشان دهید.



- ۲- یک استوانک^۱ (کپسول) گاز از قرار گرفتن یک نیمکره روی یک استوانه به صورت مقابل درست شده است. اگر قطر دایره قاعده استوانک 60 سانتی متر و ارتفاع آن یک متر باشد، حجم استوانک را بر حسب متر مکعب به دست آورید.
 اگر بخواهیم سطح کل این استوانک را رنگ کنیم، چند کیلوگرم رنگ لازم است، به شرط اینکه رنگ آمیزی هر متر مربع به 100 گرم رنگ نیاز داشته باشد؟

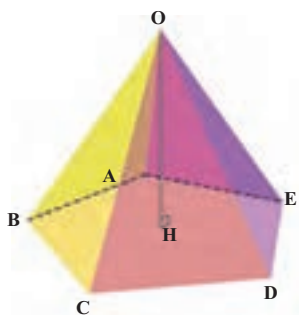


- ۳- پیمانه ای به شکل نیمکره و به قطر دهانه 24 سانتی متر را از آب پر و آب آن را در لیوانی استوانه ای شکل با همان قطر خالی می کنیم؛ آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا می آید؟

درس دوم: حجم هرم و مخروط



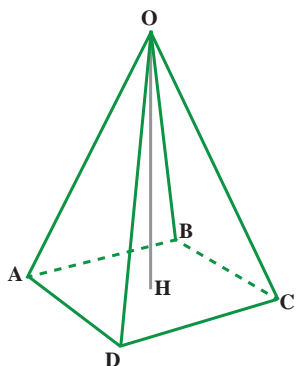
یکی دیگر از حجم‌های هندسی، حجم هرمی است. به طور حتم نام اهرام مصر را شنیده‌اید. نمونه دیگری از شکل‌های هرمی را نام ببرید.



هرم، یک شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین به نام قاعده است. قاعده هرم، یک چند ضلعی است. مانند شکل مقابل روی تمام محیط این چند ضلعی، سطح‌هایی قرار دارد که در یک نقطه به نام رأس، یکدیگر را قطع می‌کنند. به این سطح‌ها وجه جانبی می‌گویند. در هرم مقابل، نام رأس: تعداد وجه‌ها: شکل وجه‌ها: شکل قاعده: نام قاعده:

به فاصله رأس هرم تا قاعده، یعنی طول عمودی که از رأس بر قاعده رسم می‌شود، ارتفاع هرم می‌گویند. در شکل، OH بر قاعده $ABCDE$ عمود است و ارتفاع هرم است. معمولاً برای نام‌گذاری هرم از رأس شروع می‌کنیم؛ به عنوان مثال مثل هرم بالا به صورت $OABCDE$ خوانده می‌شود.

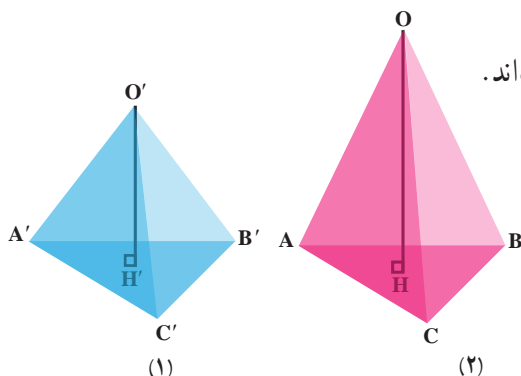
فعالیت



۱- اگر چند ضلعی قاعده، یک چند ضلعی منتظم باشد و وجه‌های جانبی با هم، هم‌نهشت باشند، هرم را منتظم می‌گوییم. در این صورت اگر قاعده، مرکز تقارن داشته باشد، پای ارتفاع (نقطه برخورد ارتفاع و قاعده) روی مرکز تقارن می‌افتد. در هرم منتظم مقابل، نام رأس: ارتفاع: شکل قاعده: شکل وجه‌های جانبی: تعداد وجه‌ها:

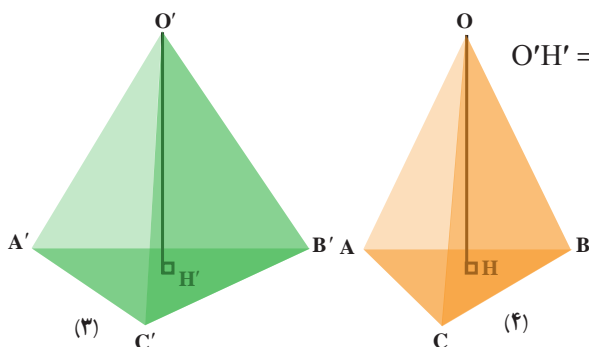
۲- الف) با توجه به شکل‌ها و اطلاعات داده شده به نظر شما حجم کدام هرم بیشتر است؟ در

شکل های (۱) و (۲) مثلث های قاعده هم نهشت اند.



$$O'H' < OH \Rightarrow V' \circ V$$

در شکل های (۳) و (۴) ارتفاع ها برابر است.



$$O'H' = OH \text{ و } S_{ABC} < S_{A'B'C'} \Rightarrow V' \circ V$$

ب) به نظر شما حجم هرم به چه مقادیری وابسته است؟

ج) برای محاسبه مساحت مثلث از چه مقادیری استفاده می کردید؟ برای محاسبه حجم هرم چه

حدسی می زنید؟

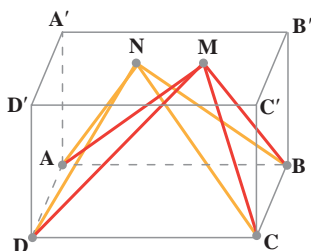
د) اگر دو هرم دارای قاعده های با مساحت مساوی و ارتفاع های مساوی باشند، درباره حجم های

آنها چه می توانید بگویید؟

اگر دو هرم دارای قاعده های هم مساحت و ارتفاع های مساوی باشند، حجم های

آنها با هم برابر است.

کار در کلاس



در شکل مقابل، یک وجه یک مکعب مستطیل و

M و N دو نقطه دلخواه روی وجه مقابل (A'B'C'D') است. چرا

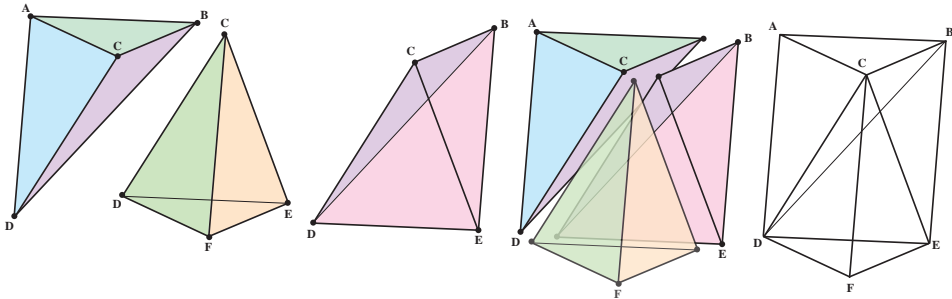
هرم های MABCD و NABCD دارای حجم های یکسان است؟

به این ترتیب چند هرم می توان ساخت که با هرم های بالا

حجم یکسان داشته باشند؟

محاسبه حجم هرم

در شکل زیر، منشوری با دو قاعده $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ را می بینید. نقطه C را به نقطه های D و E و نقطه B را به نقطه D وصل می کنیم؛ به این ترتیب منشور را به سه هرم، مطابق شکل تجزیه می کنیم. آیا این سه هرم را در این منشور تشخیص می دهید؟ با پاسخ دادن به سؤالات زیر، نشان دهید که این سه هرم، حجم های برابر دارد و از آنجا نتیجه بگیرید که حجم هر یک از آنها، یک سوم حجم منشور است.

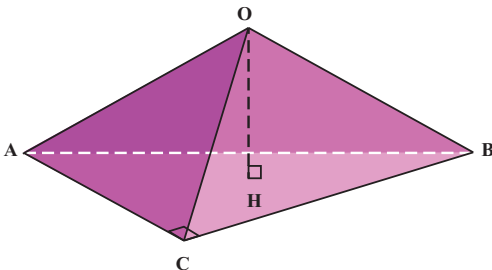


- ۱- چهارضلعی ABED، چه نوع چهارضلعی است؟ چرا مثلث های ABD و BDE هم مساحت اند؟
- ۲- چرا هرم های CBAD و CBED دارای حجم های برابرند؟
- ۳- چرا مثلث های ABC و DEF هم مساحت اند؟
- ۴- چرا هرم های DABC و CDEF دارای حجم های برابرند؟
- ۵- با توجه به پاسخ سؤال های ۲ و ۴ چه نتیجه ای می گیریم؟

حجم هر هرم با مساحت قاعده S و ارتفاع h برابر است با :

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

کار در کلاس



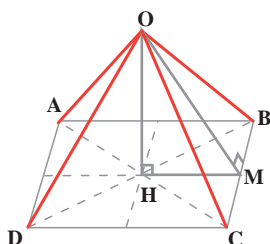
در هرم $OABC$ ، $AC = 6\text{ cm}$ و $BC = 1\text{ cm}$ و زاویه $\hat{ACB} = 90^\circ$ و OH ارتفاع هرم مساوی 5 cm است. با کامل کردن عبارت های زیر حجم هرم را به دست آورید.

$$S_{ABC} = \frac{AC \times CB}{2} = \frac{\text{---} \times \text{---}}{\text{---}} = \text{---} \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \times \text{---} \times \text{---} = \text{---} \text{ cm}^3$$

فعالیت

۱- در شکل زیر، هرم منتظم با قاعده مربع، رسم شده که وجه‌های جانبی آن همگی مثلث‌هایی متساوی الساقین و طول ساق‌های آنها ۱۰ cm و M وسط BC است.



(الف) پاره خط OM در مثلث OBC چه خواصی دارد؟

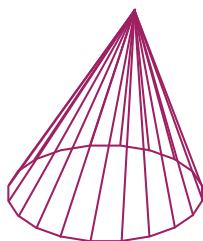
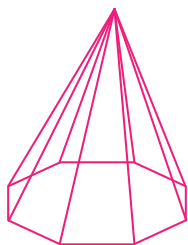
(ب) مثلث OBM چه نوع مثلثی است؟

(ج) اگر طول ضلع قاعده، ۱۲ cm باشد، به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث OBM طول OM را حساب کنید.

(د) مثلث OMH چه نوع مثلثی است؟ طول MH چقدر است؟

(هـ) به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث OMH، طول OH را به دست آورید.

(و) حجم هرم OABCD را به دست آورید.



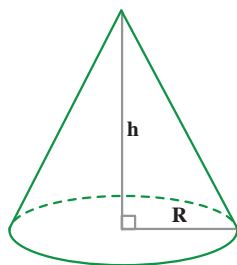
۲- هرم منتظمی را در نظر بگیرید که قاعده آن یک چندضلعی منتظم باشد. مانند مربع، پنج ضلعی منتظم، شش ضلعی منتظم و حال تعداد ضلع‌های این چندضلعی را بیشتر و بیشتر کنید؛ چند ضلعی فوق به چه شکلی نزدیک می‌شود؟ هرم به چه شکلی نزدیک می‌شود؟



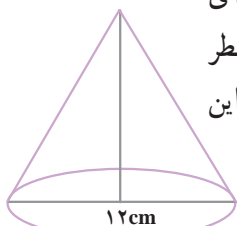
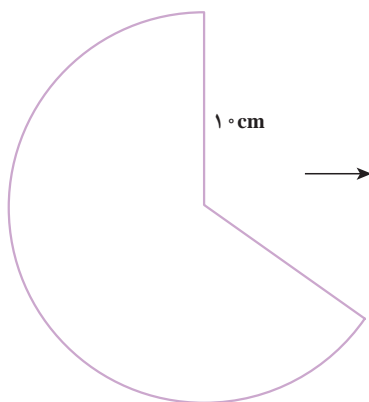
مخروط، شکلی شبیه هرم منتظم است که قاعده آن به شکل دایره و پای ارتفاع مخروط مرکز این دایره است.

از اینجا نتیجه می‌شود که حجم مخروط، مانند حجم هرم از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$



کار در کلاس



علی با قسمتی از دایره‌ای به شعاع ۱۰ cm، مخروطی به قطر قاعده ۱۲ cm ساخته است. حجم این مخروط را به دست آورید.

تمرین

۱- حجم هرمی را به دست آورید که قاعده آن مستطیلی به ابعاد ۶ و ۵ سانتی متر و ارتفاع آن ۱۰ سانتی متر باشد.

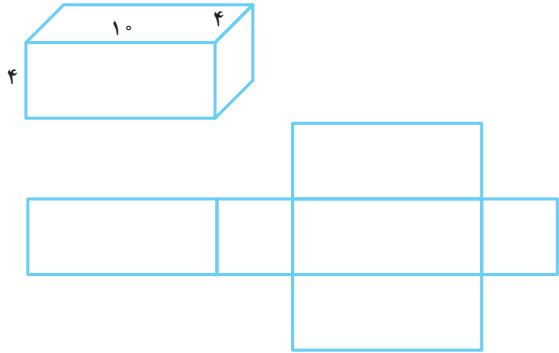
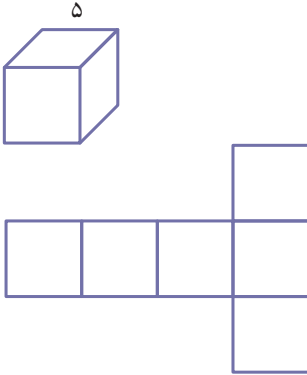
۲- حجم هرمی با قاعده مربع را به دست آورید که ضلع قاعده آن ۴ cm باشد و وجه‌های جانبی آن مثلث‌های متساوی الساقینی به ساق‌های ۸ cm باشد.

۳- ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه ۴ cm و به ارتفاع ۱۲ cm را از آب پر می‌کنیم و در لیوانی استوانه‌ای شکل، که شعاع قاعده آن ۶ cm است، خالی می‌کنیم؛ آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می‌آید؟

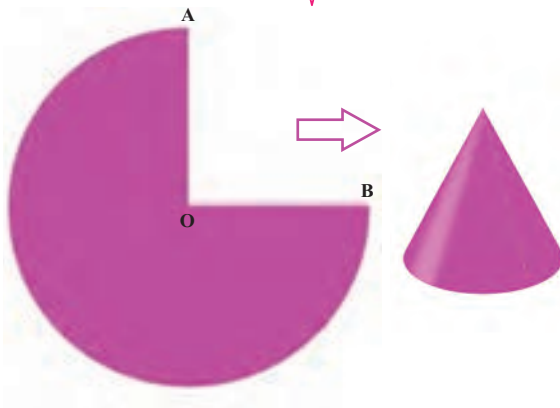
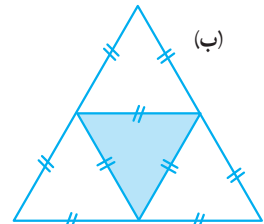
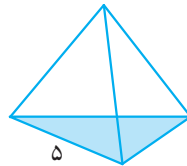
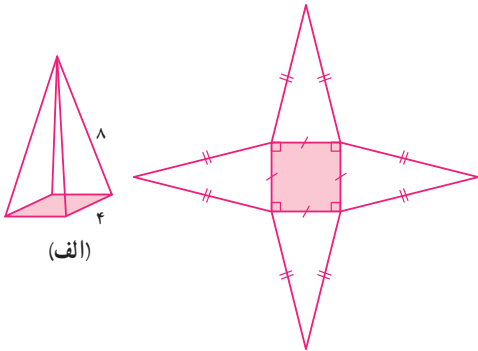


فعالیت

۱- با توجه به اندازه‌های ابعاد مکعب و مکعب مستطیل، اندازه ضلع‌ها را در گسترده هر کدام مشخص کنید.

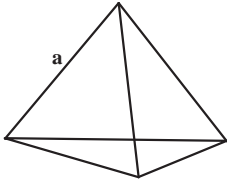


۲- مساحت گسترده هر یک از هرم‌ها را با توجه به اندازه‌های روی هر هرم محاسبه کنید.

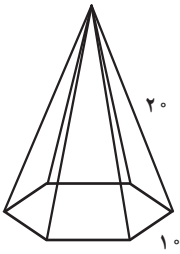


۳- با $\frac{3}{4}$ دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی متر یک سطح مخروطی شکل درست کرده‌ایم؛ طول کمان AB چقدر است؟

چه رابطه‌ای بین طول کمان AB و محیط دایره قاعده مخروط وجود دارد؟ شعاع قاعده مخروط را پیدا کنید.



۱- مساحت کل هرم منتظم مقابل را به دست آورید. طول همه یال‌های آن a است.



۲- با توجه به اندازه‌های داده شده، گسترده هرم را رسم کنید و مساحت جانبی آن را به دست آورید.

فعالیت



۱- با دوران دادن یک مستطیل حول ضلع آن چه حجمی به دست می‌آید؟

شعاع قاعده شکل حاصل :

ارتفاع شکل حاصل :

حجم شکل حاصل را پیدا کنید.



۲- اگر مثلث قائم‌الزاویه را حول ضلع مشخص شده در شکل،

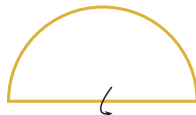
دوران دهیم، چه شکلی به دست می‌آید؟ حجم آن را پیدا کنید.

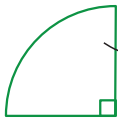
شعاع قاعده شکل حاصل :

ارتفاع شکل حاصل :

۳- در هر شکل با توجه به محور دوران، که در هر یک مشخص شده است، شکل حجم حاصل

را توصیف کنید.

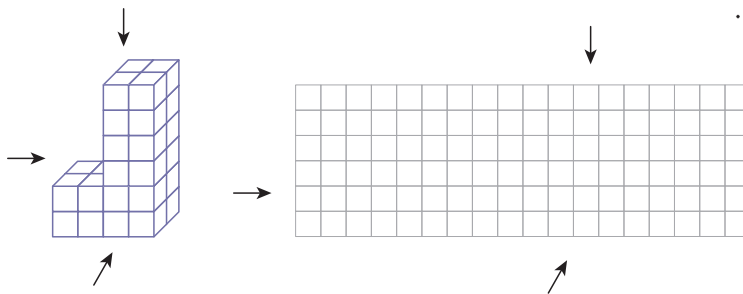




حجم حاصل از دوران یک ربع دایره به شعاع ۵cm را حول شعاع آن پیدا کنید.

فعالیت

۱- با توجه به حجم زیر، در صفحه شطرنجی زیر سطح دیده شده از جهت‌های مشخص شده را رسم کنید.



۲- اگر هر کدام از هرم‌های منتظم زیر را از بالا نگاه کنیم، چه شکلی دیده می‌شود؟

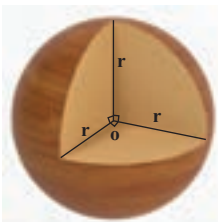
الف) هرم منتظم با قاعده مثلث

ب) هرم منتظم با قاعده مربع

ج) هرم منتظم با قاعده شش ضلعی

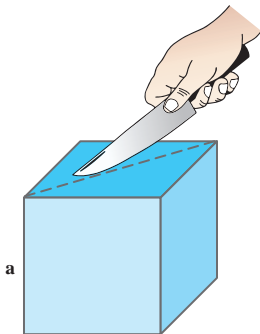


۳- کره مقابل با یک صفحه بریده شده است. سطح بریده شده چه شکلی دارد؟ در چه صورت این شکل بیشترین مساحت را دارد؟



۴- در شکل مقابل، چه کسری از حجم کره برداشته شده است؟

کار در کلاس



یک اسفنج مکعب شکل به ضلع a را مانند شکل مقابل بریده ایم. سطح بریده شده به چه شکلی است؟ اندازه ضلع های آن را پیدا کنید.

تمرین

۱- حجم و سطح کل شکل های زیر را پیدا و باهم مقایسه کنید.

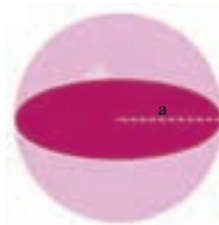
مکعب به ضلع a



$V =$

$S =$

کره به شعاع a

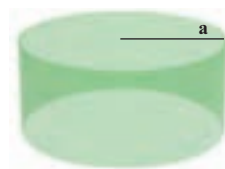


$V =$

$S =$

استوانه به ارتفاع

شعاع قاعده a



$V =$

$S =$

استوانه به ارتفاع

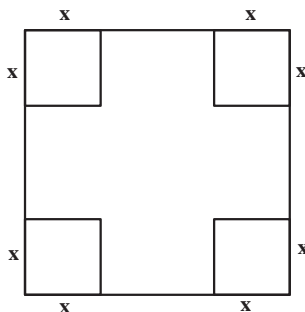
و قطر قاعده a



$V =$

$S =$

در هر مورد، نسبت حجم به سطح ($\frac{V}{S}$) را به دست آورید. در کدام شکل این نسبت بزرگ تر است؟



۲- از یک مقوا به ضلع a گوشه های مربع شکل به ضلع x را بریده و با سطح باقیمانده یک جعبه مکعب مستطیل شکل درست کرده ایم. چه رابطه ای باید بین a و x باشد تا بتوان چهار کره را به شعاع x داخل این جعبه جای داد به طوری که هر کره به کره مجاورش و به دیواره جعبه مماس باشد؟



معلمان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می توانند نظر اصلاحی خود را در باره مطالب
این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۴۸۷۴/۱۵۸۷۵ - گروه درسی مربوط و یا پیام نگار (Email)
talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر تألیف کتاب های درسی عمومی و متوسطه نظری