درس ۲

احتمال

فعالیت

نرگس هر روز صبح ساعت ۷ از منزل خارج می‌شود؛ با وسایل نقلیهٔ عمومی به مدرسه می‌رود و به‌طور معمول، قبل از ملیکا به مدرسه می‌رسد. امروز صبح نیز نرگس مانند هر روز رأس ساعت ۷ از منزل خارج شده است. آیا می‌توانید به‌طور قطع بگویید که او قبل از ملیکا به مدرسه می‌رسد؟

هیچ‌کس نمی‌تواند به این پرسش پاسخ قطعی دهد. تجربه نشان داده است که اگر وضعیت مانند هر روز عادی باشد، نرگس به موقع به مدرسه می‌رسد، اما آیا وضعیت همیشه عادی است؟

عامل‌های زیادی می‌توانند وضع را از حالت عادی خارج کنند؛ مانند میزان ترافیک. از طرفی رفت و آمد در خیابان‌ها همیشه در حال تغییر است، آغاز حرکت و سرعت وسایل نقلیهٔ عمومی به‌طور معمول منظم نیست و... . بنابراین : دو وضعیت وجود دارد : یکی اینکه نرگس قبل از ملیکا به مدرسه برسد و دوم اینکه نرگس قبل از ملیکا به مدرسه نرسد.

پدیده‌هایی وجود دارند که نتیجهٔ آنها از قبل به‌طور قطع مشخص نیست اما از وقوع همهٔ حالت‌های ممکن در آنها اطلاع داریم. برای مثال، وقتی از کیسه‌ای که شامل پنج مهرهٔ قرمز و یک مهرهٔ سبز است، به‌طور تصادفی مهره‌ای خارج می‌کنیم، می‌دانیم که رنگ مهرهٔ خارج شده سبز یا قرمز است اما قبل از بیرون کشیدن مهره، رنگ آن به‌طور قطعی مشخص نیست. این‌گونه آزمایش‌ها را آزمایش‌های تصادفی می‌نامیم.

به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجهٔ آنها قبل از اجرای آزمایش به‌طور قطع مشخص نیست، پدیده یا آزمایش تصادفی می‌گویند. در پدیده‌های تصادفی از همهٔ نتیجه‌های ممکن اطلاع داریم اما از اینکه کدام حالت قطعاً رخ می‌دهد، اطمینان نداریم. به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، برآمد می‌گوییم.

۱. چند آزمایش تصادفی مثال بزنید.

به آزمایش‌هایی که نتیجهٔ آنها قبل از اجرای آزمایش به‌طور قطع مشخص باشد، آزمایش‌ها یا پدیده‌های قطعی می‌گوییم.

برای مثال، چنانچه سنگی را به داخل استخر آبی پرتاب کنیم، قبل از اجرای آزمایش می‌دانیم که سنگ به داخل آب فرو می‌رود یا پیش از پرتاب یک سکه، می‌دانیم که سکه روی زمین می‌نشیند. این‌گونه پدیده‌ها، آزمایش‌هایی قطعی هستند.

۲. چند آزمایش قطعی مثال بزنید.

کار در کلاس

۱. کدام‌یک از پدیده‌های زیر تصادفی و کدام‌یک قطعی است؟ چرا؟

الف) وجود دانش‌آموزی که سن او بیشتر از ده سال باشد، در کلاس پایه دوازدهم؛

ب) در ابتدای مسابقهٔ فوتبال، پرتاب سکه‌ای که در یک طرف آن عدد ۱ و در طرف دیگرش عدد ۲ حک شده باشد؛

پ) مشاهدهٔ دو مهرهٔ سفید، پس از خارج کردن دو مهره از جعبه‌ای که در آن ۷ مهرهٔ سفید وجود دارد؛

ت) پیش‌بینی نتیجهٔ بازی فوتبال بین دو تیم، قبل از بازی؛

ث) در یک بازی بین دو نفر، سکه‌ای پرتاب می‌شود و به دنبال آن تاسی انداخته می‌شود. اگر شخصی سکه‌اش رو و تاسش زوج بیاید، برنده است. آیا قبل از بازی می‌توان نفر برنده را مشخص کرد؟

۲. از ۳ مداد و ۵ خودکاری که در یک جعبه قرار دارند، به‌طور تصادفی یکی از آنها را خارج می‌کنیم.

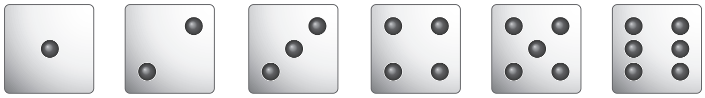
الف) آیا مجموعهٔ دو عضوی {خودکار، مداد} می‌تواند همهٔ برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را نشان دهد؟

ب) به نظر شما چگونه می‌توان همهٔ برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را مشخص کرد؟

در این کتاب، اشیای مورد بحث را با شماره‌گذاری متمایز می‌کنیم.

فضای نمونه

در پرتاب یک تاس بعد از آنکه تاس به زمین نشست، یکی از برآمدهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ را خواهیم داشت. همهٔ برآمدهای ممکن در یک آزمایش تصادفی، مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهد که به آن **فضای نمونه** می‌گوییم و آن را با حرف S نمایش می‌دهیم.



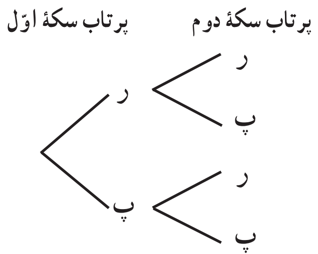
بنابراین، در پرتاب یک تاس، فضای نمونه برابر است با : $S=\{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶\}$

فعالیت

فضای نمونهٔ هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر را بنویسید.

۱. پرتاب دو سکه باهم.

$S=\{$(پ , پ) , (ر , پ) , (پ , ر) , (ر , ر)$\}$



۲. پرتاب سه سکه با هم (پرتاب یک سکه سه بار)

۳. پرتاب یک تاس و یک سکه باهم.

کار در کلاس

۱. برای تعیین فضای نمونهٔ پرتاب دو تاس آبی و قرمز، جدول زیر را کامل کنید. سپس به کمک اصل ضرب، درستی تعداد کل حالات موجود در جدول را بررسی کنید.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱ , ۱)	(۱ , ۲)				(۱ , ۶)
۲	(۲ , ۱)	(۲ , ۲)				
۳			(۳ , ۳)		(۳ , ۵)	
۴				(۴ , ۴)		
۵			(۵ , ۳)			
۶						(۶ , ۶)

۲. سه دوست با نام‌های علی، پارسا و محمد در یک ردیف کنار هم می‌نشینند. فضای نمونهٔ این آزمایش تصادفی را مشخص کنید. چگونه می‌توان تعداد همهٔ برآمدهای این آزمایش تصادفی را بدون شمردن، مشخص کرد؟

۳. در کیسه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز، ۴ مهرهٔ آبی و ۴ مهرهٔ سبز وجود دارد. به‌طور تصادفی سه مهره را هم‌زمان از کیسه خارج می‌کنیم. تعداد اعضای فضای نمونهٔ این پدیدهٔ تصادفی را مشخص کنید.

پیشامد

با مفهوم مجموعه و زیرمجموعه در کلاس نهم آشنا شده‌اید. مجموعهٔ A را زیرمجموعهٔ B می‌گوییم، هرگاه هر عضو مجموعهٔ A عضوی از مجموعهٔ B باشد؛ در این صورت می‌نویسیم: $A \subseteq B$. برای مثال:

$$\{۱, ۲, ۳\} \subseteq \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$$

از طرفی، می‌دانیم $A \subseteq A$؛ یعنی هر مجموعه‌ای زیرمجموعهٔ خودش است و مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها است؛ یعنی $\varnothing \subseteq A$.

مثال: تمام زیرمجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ را بنویسید.

حل:

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

مثال: در پرتاب یک تاس، پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) عدد کوچک‌تر از ۷ ظاهر شود. ب) عدد بزرگ‌تر از ۷ ظاهر شود.

حل:

الف) $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ ب) $A = \{\ \}$

به هر یک از زیرمجموعه‌های فضای نمونهٔ S یک پیشامد می‌گویند. از آنجا که $\varnothing \subseteq S$، پس $\varnothing$ یک پیشامد روی S است و آن را پیشامد غیرممکن (نشدنی)، همچنین $S \subseteq S$ پس S نیز یک پیشامد است که آن را پیشامد حتمی می‌نامیم.

کار در کلاس

۱. سکه‌ای را یک‌بار پرتاب می‌کنیم؛ می‌دانیم $S = \{$پ, ر$\}$. تمام پیشامدهای ممکن برای این فضای نمونه را بنویسید.

۲. مریم، ملیکا و سوگند پول‌هایشان را روی هم گذاشتند و یک رمان دربارهٔ دفاع مقدس از نمایشگاه کتاب مدرسه خریدند. سپس، اسامی خود را روی سه کارت متمایز نوشتند و داخل کیسه‌ای انداختند. آنها با هم قرار گذاشتند که یک کارت را به‌طور تصادفی از کیسه خارج کنند و نام هرکسی که روی آن کارت بود، ابتدا کتاب را به منزل ببرد و مطالعه کند. فضای نمونهٔ این پدیدهٔ تصادفی را بنویسید. سپس، تمام زیرمجموعه‌های یک عضوی S را مشخص کنید.

اگر قرار باشد دو نفر از آنها بعد از مطالعهٔ کتاب، با هم خلاصهٔ آن را در کلاس ارائه کنند، پیشامدهای ممکن را بنویسید.

۳. تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر پس از نشستن تاس روی زمین، عدد ۲ نمایان شود، به نظر شما در این آزمایش تصادفی کدام‌یک از پیشامدهای زیر رخ داده‌اند؟

الف) $A = \{۳, ۲, ۵\}$

ب) $B = \{۲\}$

پ) $C=\{2,4,6\}$

برای اینکه یک پیشامد رخ دهد، کافی است یکی از برآمدهای آن در آزمایش تصادفی به وقوع بپیوندد.

۴. دو تاس را پرتاب می‌کنیم؛ پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) اعداد رو شده از دو تاس مانند هم باشد.

ب) مجموع اعداد برآمده از دو تاس برابر با ۷ باشد. $\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

پ) مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۱۳ باشد.

ت) حاصل ضرب اعداد برآمده از دو تاس کمتر از ۳۷ باشد.

۵. در یک برنامهٔ کوهنوردی، ۵ دانش‌آموز سال دهم، ۶ دانش‌آموز سال یازدهم و ۴ دانش‌آموز سال دوازدهم شرکت دارند. قرار است یک گروه پیشتاز ۳ نفره از بین آنها برای صعود انتخاب کنیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

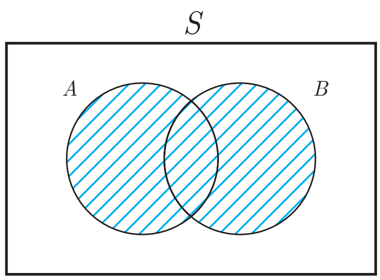
الف) سه نفر دانش‌آموز پیشتاز از سه پایه مختلف باشند.

$$n(A)=\overset{\text{دهم}}{\binom{5}{1}}\times\overset{\text{یازدهم}}{\binom{6}{1}}\times\overset{\text{دوازدهم}}{\binom{4}{1}}=\cdots\times\cdots\times\cdots=120$$

ب) حداقل ۲ دانش‌آموز در این گروه پیشتاز از دانش‌آموزان سال یازدهم باشند.

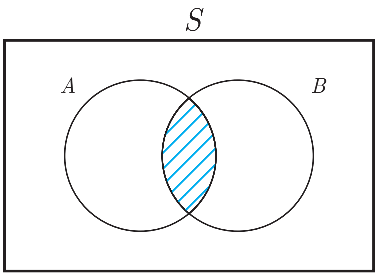
اعمال روی پیشامدها

فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند؛ اجتماع و اشتراک دو مجموعهٔ A و B، تفاضل B از A و متمم مجموعهٔ A را به‌صورت زیر یادآوری می‌کنیم.



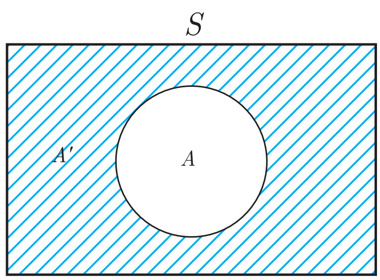
$A\cup B=\{x\in S \mid x\in A \vee x\in B\}$

(شکل ۲)



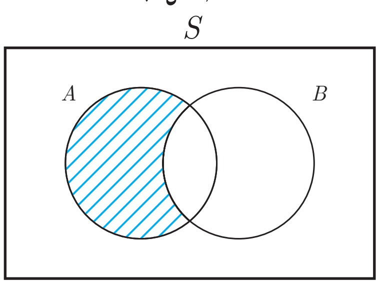
$A\cap B=\{x\in S \mid x\in A \wedge x\in B\}$

(شکل ۱)



$A'=\{x\in S \mid x\notin A\}$

(شکل ۴)



$A-B=\{x\in S \mid x\in A \wedge x\notin B\}$

(شکل ۳)

هرگاه A و B دو پیشامد در فضای نمونهٔ S باشند :

الف) پیشامد $A\cap B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامدهای A و B هردو رخ دهند. (شکل ۱)

دو تاس را پرتاب می‌کنیم. پیشامد آن را مشخص کنید؛ طوری‌که یکی از تاس‌ها ۵ و مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد.

$A=\{(۱,۵),(۲,۵),(۳,۵),(۴,۵),(۵,۵),(۶,۵)(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۶)\}$: یکی از تاس‌ها ۵ باشد

$B=\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\}$: مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد

برای مشخص کردن پیشامدی که در آن یکی از تاس‌ها ۵ و مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد، کافی است $A\cap B$ را محاسبه کنیم.

$$A\cap B=\{(۱,۵),(۵,۱)\}$$

ب) پیشامد $A\cup B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامدهای A یا B (حداقل یکی از پیشامدها) رخ دهند. (شکل ۲)

دو تاس را پرتاب می‌کنیم. پیشامد آن را مشخص کنید؛ طوری‌که دو تاس یکسان یا مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۴ باشد.

$A=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\}$: دو تاس یکسان

$B=\{(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱)\}$: مجموع ۴ باشد

پیشامد مورد نظر برابر با $A\cup B$ است.

$$A\cup B=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶),(۱,۳),(۳,۱)\}$$

پ) پیشامد $A-B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد و پیشامد B رخ ندهد. (شکل ۳)

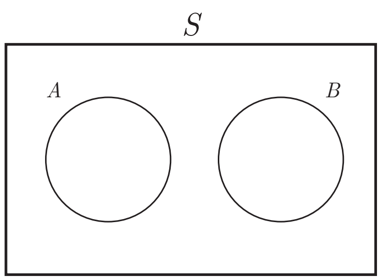
ت) پیشامد A' وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد. (شکل ۴)

در این حالت A و A' را دو پیشامد متمم می‌گوییم و همواره داریم :

$$A\cup A'=S \quad , \quad A\cap A'=\varnothing$$

مثال : هرگاه A و B دو پیشامد ناتهی در فضای نمونهٔ S باشند، به طوری که $A-B=A$ و $B-A=B$، در این صورت پیشامد $A\cap B$ را محاسبه کنید.

حل : چون $A-B=A$ و $B-A=B$ و از آنجا که A و B پیشامدهای ناتهی هستند، بنابراین A و B عضو مشترکی ندارند؛ در این حالت $A\cap B=\varnothing$.



هرگاه A و B دو پیشامد از فضای نمونهٔ S باشند، به طوری که $A\cap B=\varnothing$، در این صورت پیشامدهای A و B را ناسازگار می‌گوییم.

برای مثال، در پرتاب یک تاس پیشامدهای زوج آمدن و فرد آمدن، ناسازگارند.

کار در کلاس

۱. تاسی را پرتاب می‌کنیم؛ هر یک از پیشامدهای زیر را با اعضا مشخص کنید.

ــ پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج و اوّل باشد.

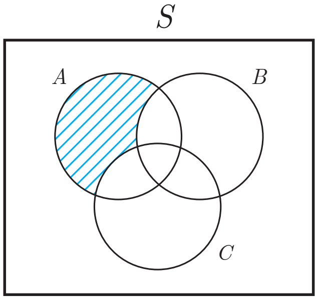
ــ پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج یا اوّل باشد.

ــ پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج باشد ولی اوّل نباشد.

ــ پیشامد اینکه عدد رو آمده اوّل باشد ولی زوج نباشد.

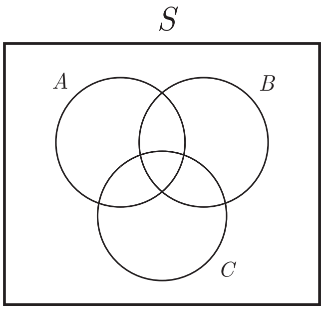
ــ پیشامد اینکه عدد رو آمده اول نباشد.

۲. فرض کنید A و B و C سه پیشامد در فضای نمونهٔ S باشند. هر یک از پیشامدهای زیر را روی نمودار ون سایه بزنید. سپس، عبارت مجموعه‌ای مربوط به هر پیشامد را مانند نمونه بنویسید.

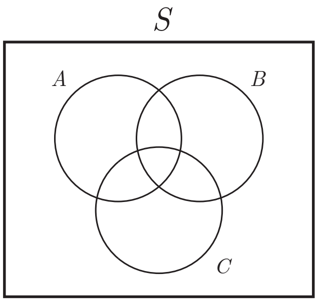


$\boldsymbol{A-(B\cup C)}$

ــ فقط پیشامد A رخ دهد و پیشامدهای B یا C رخ ندهد.



ــ پیشامدهای A و B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.



ــ پیشامدهای A یا B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد.

۳. خانواده‌ای صاحب ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) پیشامد A اینکه همهٔ فرزندان خانواده دارای یک جنسیت باشند.

ب) پیشامد B اینکه دو فرزند خانواده پسر و یک فرزند دختر باشند.

ج) پیشامد C اینکه حداقل دو فرزند این خانواده دختر باشند.

با توجه به پیشامدهای A و B و C به سؤالات زیر پاسخ دهید :

آیا پیشامدهای A و B ناسازگارند؟

آیا پیشامدهای C و B ناسازگارند؟

آیا پیشامدهای C و A ناسازگارند؟

۴. دو پیشامد ناسازگار از یک آزمایش تصادفی را بنویسید.

احتمال یک پیشامد

فرض کنید $S \neq \varnothing$ فضای نمونهٔ متناهی یک پدیدهٔ تصادفی باشد. اگر S، n برآمد برای وقوع داشته باشد و A پیشامدی در S باشد، در این صورت احتمال وقوع پیشامد A را با نماد $P(A)$ نمایش می‌دهیم و مقدار آن را طبق دستور زیر محاسبه می‌کنیم.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

فعالیت

۱. چنان‌که پیشامد A نشدنی باشد، یعنی $A=\varnothing$، در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید.

۲. در حالتی که پیشامد A حتمی باشد، یعنی $A=S$، در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید.

۳. هرگاه $A\subseteq B$، در این صورت جاهای خالی را پر کنید.

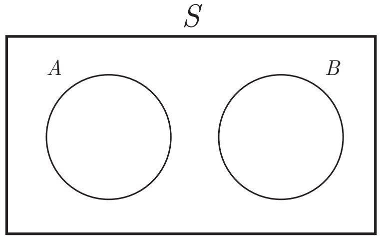
$$A\subseteq B \Rightarrow n(A)\leq \ldots \Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)}\leq \frac{\cdots}{\cdots} \Rightarrow P(A)\leq P(B)$$

۴. با توجه به ۱ و ۲ و ۳، اگر A پیشامد دلخواهی در فضای نمونهٔ S باشد، در این صورت داریم :

$$۰ \leq P(A)\leq ۱$$

۵. هرگاه A و B دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونهٔ S باشند، با پر کردن جاهای خالی مقدار $P(A\cup B)$ را طبق اصل جمع پیدا کنید.

$$n(A\cup B)=n(A)+\ \ldots \ \Rightarrow \ \frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{}{n(S)}+\frac{}{} \ \Rightarrow \ P(A\cup B)=\ \ldots\ +\ \ldots$$



$A\cap B=\varnothing \Rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

کار در کلاس

۱. یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه :

الف) تاس زوج بیاید.

می‌دانیم فضای نمونهٔ این آزمایش تصادفی ۱۲ عضو دارد؛ بنابراین، $n(S) = ۱۲$.

$$S = \{(۱\,,\text{ر}), (۲\,,\text{ر}), \dots, (۶\,,\text{ر}), (۱\,,\text{پ}), (۲\,,\text{پ}), \dots, (۶\,,\text{پ})\}$$

پیشامد اینکه تاس زوج بیاید، برابر است با :

$$A = \{(۲\,,\text{ر}), (۴\,,\text{ر}), (۶\,,\text{ر}), (۲\,,\text{پ}), (۴\,,\text{پ}), (۶\,,\text{پ})\} \text{ ؛ } n(A) = ۶$$

بنابراین، داریم :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲}$$

ب) سکه پشت بیاید.

پ) تاس زوج یا سکه رو بیاید.

ت) تاس فرد و سکه پشت بیاید.

۲. یک تاکسی دارای ۵ سرنشین است؛ مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه :

الف) هر پنج نفر آنها در ماه فروردین متولد شده باشند.

هر یک از پنج نفر می‌توانند در هر یک از ۱۲ ماه سال به دنیا آمده باشند؛ بنابراین، در محاسبهٔ $n(S)$ به کمک اصل ضرب، هر یک از خانه‌های زیر با ۱۲ حالت پر می‌شوند.

$$\text{تعداد انتخاب‌ها} \rightarrow \underset{\text{نفر اول}}{\underline{۱۲}}\ \underset{\text{نفر دوم}}{\underline{۱۲}}\ \underset{\text{نفر سوم}}{\underline{۱۲}}\ \underset{\text{نفر چهارم}}{\underline{۱۲}}\ \underset{\text{نفر پنجم}}{\underline{۱۲}} \rightarrow n(s) = ۱۲^{۵}$$

برای محاسبهٔ تعداد اعضای پیشامد A، به‌طوری که همهٔ آنها در فروردین متولد شده باشند، کافی است در محاسبهٔ $n(A)$ به کمک اصل ضرب، هر یک از خانه‌های زیر فقط با یک حالت پر شوند.

تعداد انتخاب‌ها $\rightarrow \underset{\text{نفر اول}}{\underline{۱}}\ \underset{\text{نفر دوم}}{\underline{۱}}\ \underset{\text{نفر سوم}}{\underline{۱}}\ \underset{\text{نفر چهارم}}{\underline{۱}}\ \underset{\text{نفر پنجم}}{\underline{۱}} \rightarrow n(A) = ۱$

در نتیجه داریم :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۱۲^{۵}}$$

ب) هر پنج نفر آنها در یک ماه از سال متولد شده باشند.

پ) تولد هیچ دو تای آنها در یک ماه نباشد.

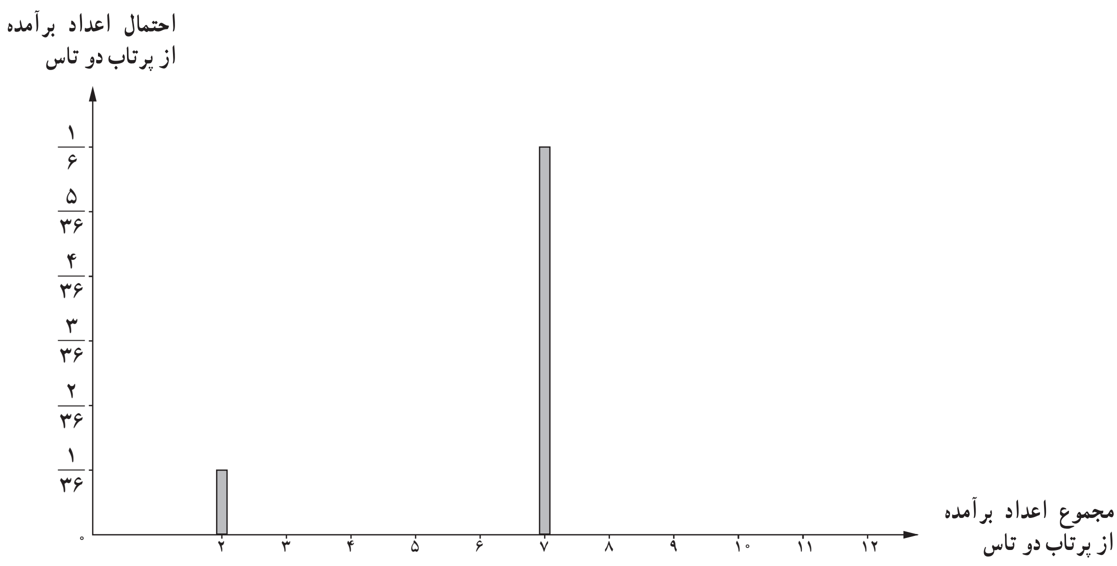
۳. در یک بازی ۱۱ نفره، به هر شخصی یکی از شماره‌های ۲، ۳، ۴، . . . و ۱۲ را نسبت می‌دهیم. سپس با پرتاب دو تاس و مجموع اعداد برآمده از آنها، نفر برنده مشخص می‌شود.

الف) احتمال برنده شدن چه شماره‌ای نسبت به بقیه بیشتر است؟

ب) احتمال برنده شدن کدام شماره‌ها از همه کمتر است؟

پ) آیا کسی که احتمال برنده شدنش کمتر است، ممکن است در این مسابقه برنده شود؟ چرا؟

ت) در شکل زیر دستگاه مختصاتی رسم شده و روی محور افقی، مجموع اعداد برآمده از دو تاس و روی محور عمودی، احتمال متناظر با هر یک از آنها نوشته شده است. نمودار میله‌ای زیر را کامل کنید.



فعالیت

در جعبه‌ای ۳ مداد و ۵ خودکار وجود دارد. از این جعبه به‌طور تصادفی یک شیء خارج می‌کنیم. مطلوب است محاسبهٔ :

الف) احتمال این را بیابید که شیء انتخابی مداد باشد؛ $P(A)$.

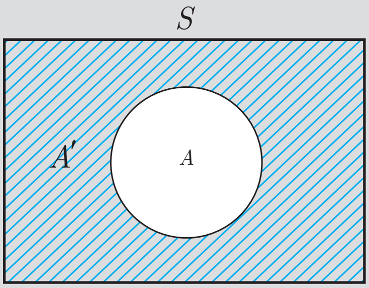
ب) احتمال این را بیابید که شیء انتخابی خودکار باشد؛ $P(B)$.

پ) احتمال این را بیابید که شیء انتخاب شده مداد نباشد؛ $P(A')$.

ت) پاسخ‌های قسمت‌های ب و پ را با هم مقایسه کنید؛ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ث) حاصل $P(A) + P(A')$ را پیدا کنید.

اگر $P(A)$ احتمال وقوع پیشامد A در فضای نمونه S باشد، در این صورت، احتمال واقع نشدن آن پیشامد را با $P(A')$ نمایش می‌دهیم و داریم : $P(A) + P(A') = ۱$ یا $P(A') = ۱ - P(A)$. در این حالت، A و A' را دو پیشامد متمم می‌گوییم.



کار در کلاس

۱. احتمال اینکه فردا بارانی باشد برابر با $\frac{۱}{۱۰}$ است. مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه فردا بارانی نباشد.

۲. احتمال اینکه کیارش فردا به مدرسه نرود برابر با ۰/۰۱ است. مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه فردا کیارش به مدرسه برود.

۳. احتمال اینکه ریحانه امشب سریال شبکهٔ یک سیما را تماشا نکند برابر با $\frac{۳۲}{۴۹}$ است، مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه ریحانه امشب سریال را تماشا کند.

مثال : در یک فروشگاه ورزشی تعدادی پیراهن ورزشی شامل ۴ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۲ پیراهن زرد در یک رخت‌آویز قرار دارند. شخصی درخواست می‌کند که فروشنده به‌طور تصادفی ۳ پیراهن انتخاب کند و برای او بفرستد.

الف) احتمال این را که ۳ پیراهن از یک رنگ باشند، محاسبه کنید.

ب) احتمال این را که رنگ ۳ پیراهن متفاوت باشد، محاسبه کنید.

پ) احتمال این را که حداقل ۲ پیراهن قرمز باشند، محاسبه کنید.

ت) احتمال این را که حداکثر ۲ پیراهن آبی باشند، محاسبه کنید.

ث) احتمال این را که رنگ ۳ پیراهن آبی نباشد، محاسبه کنید.

ج) جواب‌های قسمت‌های ت و ث را مقایسه کنید؛ چه نتیجه ای می‌گیرید؟

حل : الف) چون قرار است ۳ پیراهن از بین ۱۰ پیراهن انتخاب شود، بنابراین داریم :

$$n(S)=\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰!}{۳!\times ۷!}=۱۲۰$$

چنانچه هر سه پیراهن یک رنگ باشند، آن‌گاه هر سه قرمز یا هر سه آبی هستند؛ بنابراین، اگر A پیشامد هر سه قرمز و B پیشامد هر سه آبی باشند، در این صورت می‌خواهیم $P(A\cup B)$ را محاسبه کنیم. از آنجا که A و B ناسازگاراند، داریم :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{\overset{\text{قرمز}}{\binom{۴}{۳}}}{۱۲۰}+\frac{\overset{\text{آبی}}{\binom{۴}{۳}}}{۱۲۰}=\frac{۸}{۱۲۰}=\frac{۱}{۱۵}$$

ب) برای اینکه رنگ سه پیراهن متفاوت باشد، آن‌گاه یک پیراهن قرمز، یک پیراهن آبی و یک پیراهن زرد است؛ بنابراین، داریم :

$$n(C)=\overset{\text{قرمز}}{\binom{۴}{۱}}\times\overset{\text{آبی}}{\binom{۴}{۱}}\times\overset{\text{زرد}}{\binom{۲}{۱}}=۴\times۴\times۲=۳۲\qquad ; \qquad P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۳۲}{۱۲۰}=\frac{۴}{۱۵}$$

پ) برای اینکه حداقل ۲ پیراهن قرمز باشند، آن‌گاه ۲ پیراهن قرمز یا ۳ پیراهن قرمزند؛ بنابراین، مشابه با قسمت «الف» خواهیم داشت :

$$n(D)=\overset{\text{قرمز}}{\binom{4}{2}}\times\overset{\substack{\text{پیراهن‌های}\\ \text{غیرقرمز}}}{\binom{6}{1}}+\overset{\text{قرمز}}{\binom{4}{3}}=6\times6+4=40 \quad ; \qquad P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{40}{120}=\frac{1}{3}$$

ت) برای اینکه حداکثر دو پیراهن آبی باشند، باید دو پیراهن آبی یا یک پیراهن آبی و یا صفر پیراهن آبی داشته باشیم :

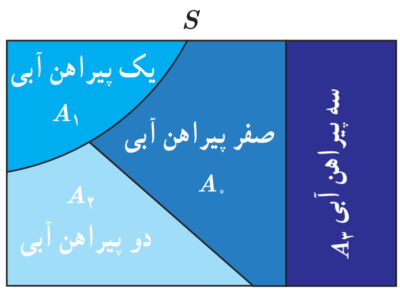
$$n(E)=\overset{\text{آبی}}{\binom{4}{2}}\times\overset{\text{غیرآبی}}{\binom{6}{1}}+\overset{\text{آبی}}{\binom{4}{1}}\times\overset{\text{غیرآبی}}{\binom{6}{2}}+\overset{\text{آبی}}{\binom{4}{0}}\times\overset{\text{غیرآبی}}{\binom{6}{3}}=6\times6+4\times15+1\times20=116$$

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{116}{120}=\frac{29}{30}$$

ث) اگر $P(F)$ احتمال ۳ پیراهن آبی باشد، آن‌گاه $P(F')=1-P(F)$ احتمال این است که ۳ پیراهن آبی نباشند؛ بنابراین :

$$P(F')=1-P(F)=1-\frac{\overset{\text{آبی}}{\binom{4}{3}}}{\binom{10}{3}}=1-\frac{4}{120}=\frac{116}{120}=\frac{29}{30}$$

ج) قسمت‌های «ت» و «ث» یکسان‌اند. یعنی می‌توان راه‌حل قسمت «ث» را برای قسمت «ت» به کار برد. چنانچه در انتخاب ۳ پیراهن به دنبال تعداد پیراهن‌های آبی باشیم، پیشامدهای ممکن روی فضای نمونه به‌صورت زیر است.



$$P(A_0\cup A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_0)+P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=P(S)=1$$

تمرین

۱. کدام‌یک از پدیده‌های زیر آزمایش تصادفی و کدام‌یک آزمایش قطعی است؟

الف) نام ۲۰ دانش‌آموز را روی ۲۰ کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، به طور تصادفی یک کارت بیرون می‌کشیم تا نام یکی از دانش‌آموزها استخراج شود.

ب) مقداری آب را حرارت می‌دهیم تا به بخار تبدیل شود.

پ) نتیجهٔ یک آزمون چهارجوابی، که نیمی از سؤالات آن را شانسی پاسخ داده‌ایم.

ت) در یک بازی سادهٔ دو نفره، یکی از دو نفر مراحل زیر را انجام می‌دهد.

ـ عددی را انتخاب می‌کند.

ـ سه واحد به آن عدد می‌افزاید.

ـ سپس حاصل را دو برابر می‌کند.

ـ از عدد حاصل ۲ واحد کم می‌کند.

ـ نتیجهٔ به دست آمده را نصف می‌کند.

ـ از حاصل به دست آمده، عدد اوّلیه را کم می‌کند.

ـ در مرحلهٔ آخر، فرد دوم به جای شخص محاسبه‌کننده پاسخ را اعلام می‌کند.

۲. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو ظاهر شد، آن‌گاه تاس را می‌ریزیم. در غیر این صورت، یک‌بار دیگر سکه را می‌اندازیم.

الف) فضای نمونهٔ این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد A را که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید، با اعضا مشخص کنید.

۳. هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به‌طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم؛ مطلوب است تعیین :

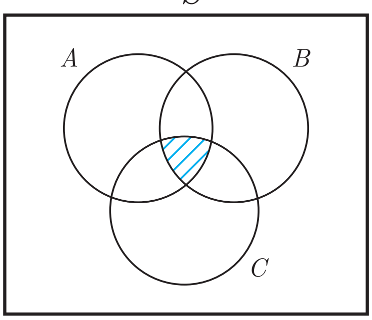
الف) فضای نمونهٔ این آزمایش تصادفی

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

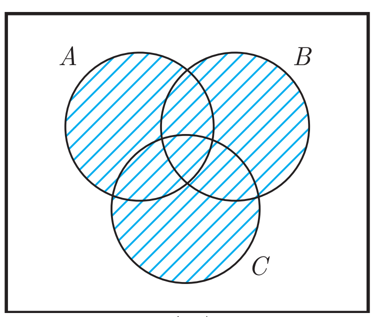
پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، مجذور کامل باشد.

ت) پیشامدهای $A\cap B$ و $A-B$ را با اعضا مشخص کنید.

۴. برای هر یک از پیشامدهای زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.



(الف)



(ب)

۵. هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۴، ۳، ۲، ۱ می‌توان نوشت، روی کارت‌هایی می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یک کارت را به‌طور تصادفی خارج می‌کنیم. الف) فضای نمونهٔ این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.
ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۶ باشد. پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اوّل باشد.

۶. خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است.

الف) فضای نمونهٔ مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟

ب) پیشامد A که در آن هر سه فرزند از یک جنس باشند. **پ)** پیشامد B که در آن فقط یک فرزند دختر باشد.

ت) پیشامد C که در آن حداقل ۲ فرزند پسر باشند. **ث)** پیشامد D که در آن حداکثر یک فرزند پسر باشد.

۷. خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چند عضو دارد؟

ب) پیشامد A را مشخص کنید؛ طوری که در آن دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

پ) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد. **ت)** آیا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟

۸. از جعبه‌ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب لکه‌دار است، ۳ سیب را به‌طور تصادفی برمی‌داریم. مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه :

الف) هر سه سیب سالم باشند. ب) دو سیب سالم و یک سیب لکه‌دار باشد.

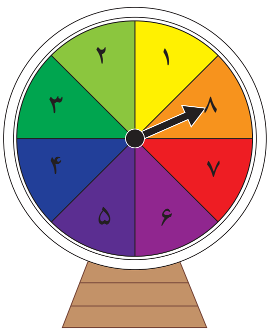
پ) تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های لکه‌دار بیشتر باشد.

۹. عقربهٔ دستگاه چرخندهٔ زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. چقدر احتمال دارد که :

الف) عقربه روی یک عدد اوّل بایستد.

ب) عقربه یک عدد اوّل یا فرد را نشان دهد.

پ) عقربه روی یک عدد مضرب ۳ بایستد.



۱۰. ۷ پرچم مختلف را به هفت میلهٔ پرچم نصب کرده‌ایم و روی میله‌ها شماره‌های ۱ تا ۷ را حک کرده‌ایم. چنانچه این پرچم‌ها به‌طور تصادفی کنار هم قرار گیرند، مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه میلهٔ پرچم‌ها با شماره‌های غیر اوّل در مکان‌های زوج باشند.

۱۱. یازده بازیکن فوتبال تیم مدرسهٔ شما به‌طور تصادفی کنار یکدیگر قرار می‌گیرند تا عکسی یادگاری بیندازند. چنانچه دروازه‌بان و کاپیتان تیم دو نفر متفاوت باشند، مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه در عکس دقیقاً ۴ نفر بین دروازه‌بان و کاپیتان حضور داشته باشند؟

۱۲. در یک پارک جنگلی حفاظت شده، ۲۰ قوچ وحشی البرز مرکزی وجود دارد؛ ۵ تا از آنها را می‌گیرند و پس از نشان‌دار کردن، رهایشان می‌کنند. بعد از مدتی، محیط‌بانان به‌طور تصادفی ۷ تا از آنها را می‌گیرند و می‌خواهند تعداد قوچ‌های نشان‌دار را بشمارند. مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه حداکثر ۲ قوچ نشانه‌دار باشند.

۱۳. انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان ۱۰ نفر عضو دارد. به یک برنامهٔ خاص، ۵ نفر رأی موافق، ۳ نفر رأی مخالف و ۲ نفر رأی ممتنع داده‌اند. از بین آنها به‌طور تصادفی ۳ نفر انتخاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه :

الف) حداقل ۲ نفر از افراد انتخابی موافق برنامه باشند.

ب) نظر هیچ دو نفری از آنها مانند هم نباشد.

خواندنی

در یک مسابقه، سه دریچه مطابق شکل زیر در مقابل یک شرکت‌کننده قرار دارد. ناگهان یک دریچه به‌طور تصادفی باز می‌شود و توپی از آن به طرف شرکت‌کننده پرتاب می‌شود. اگر این فرد بتواند توپ را بگیرد، برنده است و در غیراین‌صورت، بازنده می‌شود.

به نظر شما، احتمال پرتاب توپ از هر دریچه چقدر است؟

اگر یک دریچه را غیرفعال کنند و شرکت‌کننده شمارهٔ دریچهٔ غیرفعال را نداند، در این صورت احتمال پرتاب توپ از هر دریچه برای شرکت‌کننده در مسابقه چقدر است؟