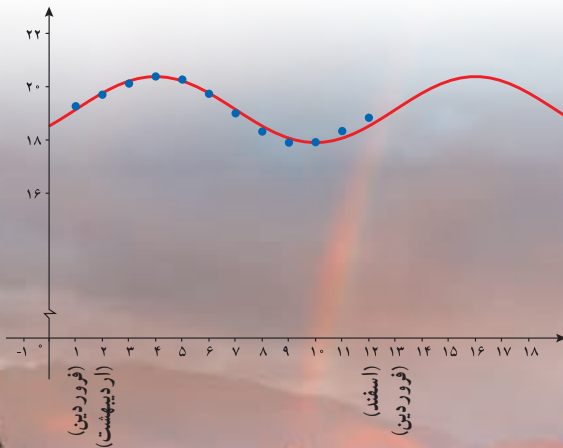


# تابع

# ۱

# فصل

- ۱ تبدیل نمودار توابع
- ۲ تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم



پل طبیعت (تهران)

بسیاری از وقایع طبیعی به کمک توابع، مدل سازی می شوند. تبدیل نمودار تابع  $y = \sin x$  به صورت  $y = 1/24 \sin(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{6}) + 19/14$ ، مدل ریاضی زمان های غروب آفتاب در ابتدای هر ماه شهر تهران است که نمودار آن در بالا رسم شده است.

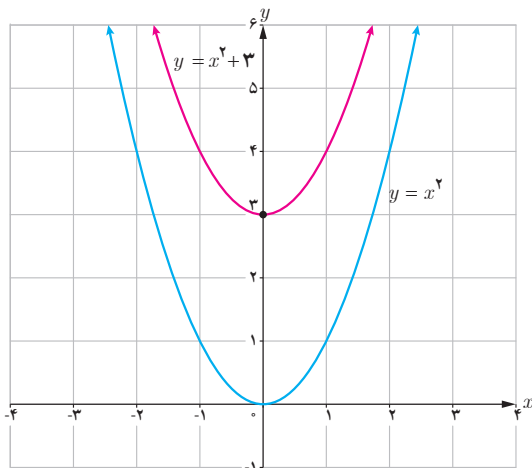
# تبدیل نمودار توابع

## درس

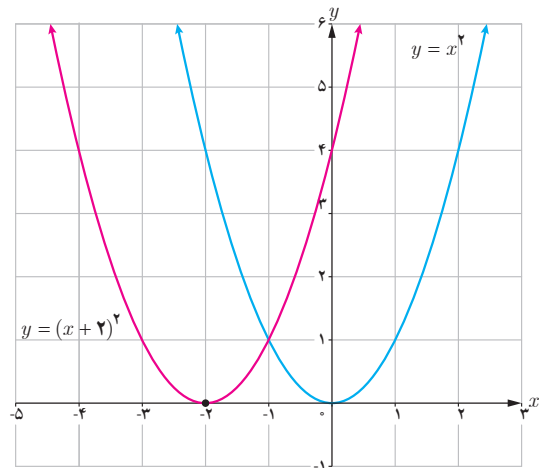
برای رسم بسیاری از توابع، نیاز به روش‌های پیچیده نیست. اگر نمودار یک تابع را در اختیار داشته باشیم، می‌توانیم به کمک برخی از تبدیل‌ها، نمودار توابع دیگری را رسم کنیم.

### انتقال‌های عمودی و افقی

در سال‌های قبل با انتقال‌های عمودی و افقی آشنا شده‌اید. به‌عنوان مثال می‌توانید نمودار توابع  $y = x^2 + 3$  و  $y = (x + 2)^2$  را به کمک نمودار تابع  $y = x^2$  رسم کنید.



(ب)



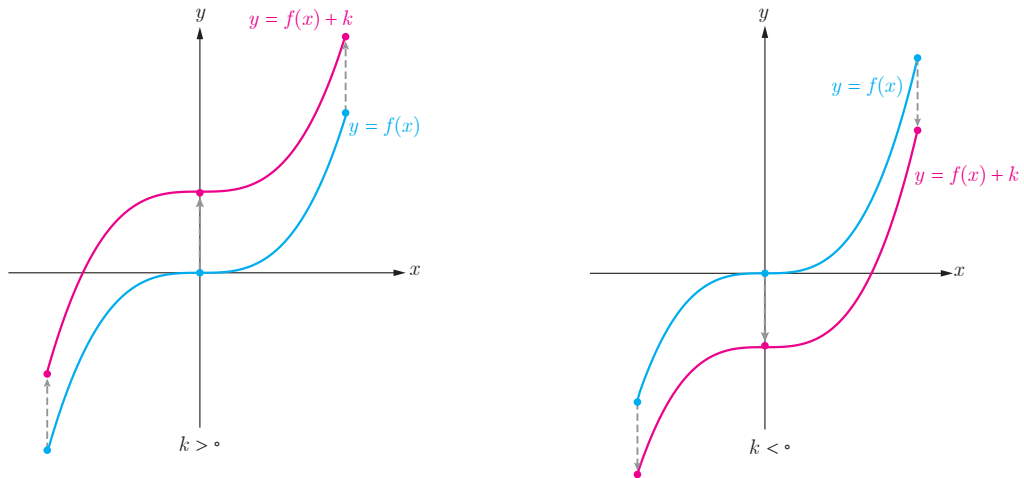
(الف)

در حالت کلی (مانند مثال بالا، قسمت ب) اگر  $(x_0, y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد و تابع  $g$  به صورت  $g(x) = f(x) + k$  تعریف شده باشد، آنگاه:

$$g(x_0) = f(x_0) + k = y_0 + k$$

بنابراین نقطه  $(x_0, y_0 + k)$  از نمودار تابع  $g$  متناظر با نقطه  $(x_0, y_0)$  از نمودار  $f$  است.

برای رسم نمودار  $y = f(x) + k$ ، اگر  $k > 0$  باشد، کافی است نمودار تابع  $f(x)$  را  $k$  واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای  $k < 0$  این انتقال به سمت پایین انجام می‌شود.

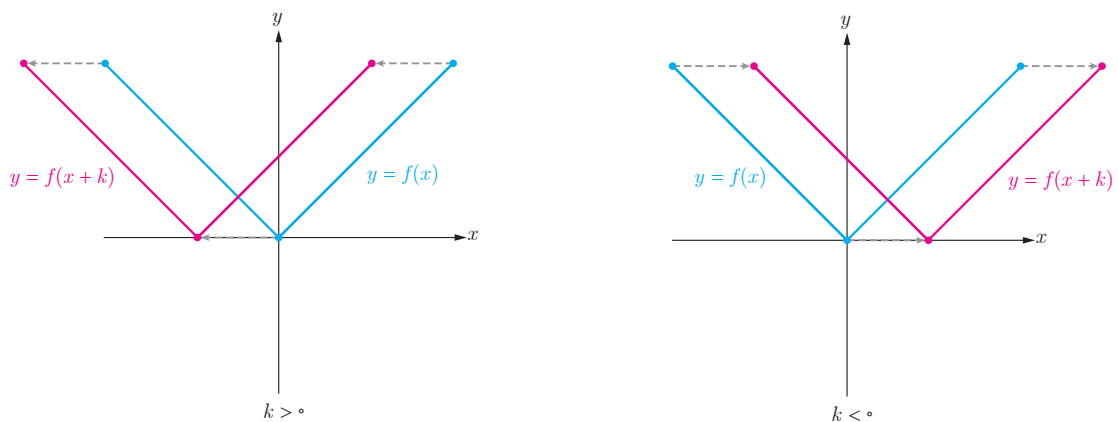


به روش مشابه، اگر  $(x_0, y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد و تابع  $h$  به صورت  $h(x) = f(x+k)$  تعریف شده باشد، آنگاه:

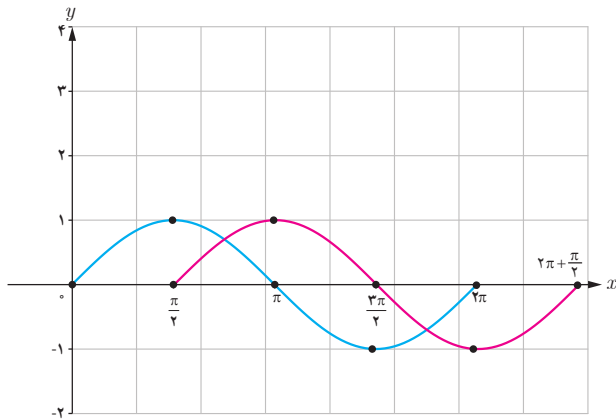
$$h(x_0 - k) = f(x_0 - k + k) = f(x_0) = y_0.$$

بنابراین نقطه  $(x_0 - k, y_0)$  از نمودار تابع  $h$  متناظر با نقطه  $(x_0, y_0)$  از نمودار تابع  $f$  است.

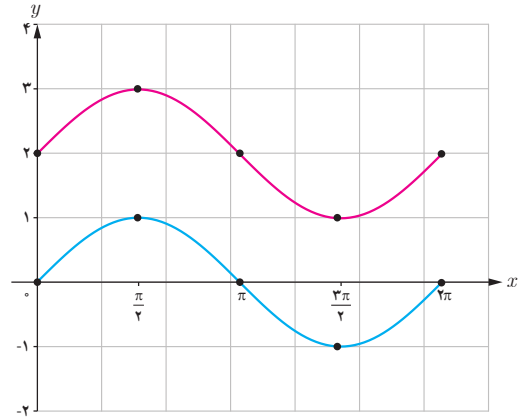
برای رسم نمودار  $y = f(x+k)$ ، اگر  $k > 0$  باشد، کافی است نمودار تابع  $f(x)$  را  $k$  واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای  $k < 0$ ، این انتقال به اندازه  $|k|$  واحد به سمت راست انجام می‌شود.



❁ **مثال:** نمودار تابع  $y = \sin x$  با دامنه  $[0, 2\pi]$  رسم شده است. می‌خواهیم نمودار تابع  $f(x) = \sin x + 2$  و  $g(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$  را به کمک انتقال رسم کنیم. با توجه به توضیحات صفحه قبل، کافی است نمودار تابع  $y = \sin x$  را ۲ واحد به بالا انتقال دهیم تا  $f(x)$  رسم شود (شکل الف) و اگر آن را  $\frac{\pi}{4}$  واحد به راست انتقال دهیم،  $g(x)$  رسم می‌شود. (شکل ب)



(ب)

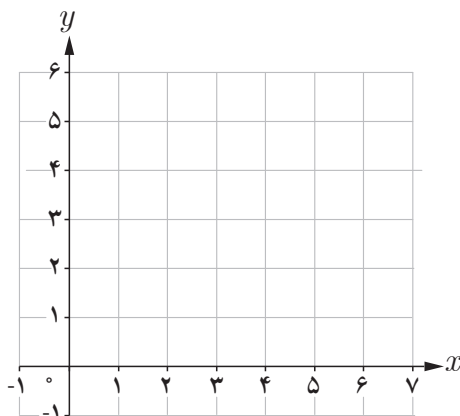


(الف)

### کاردکلاس

۱

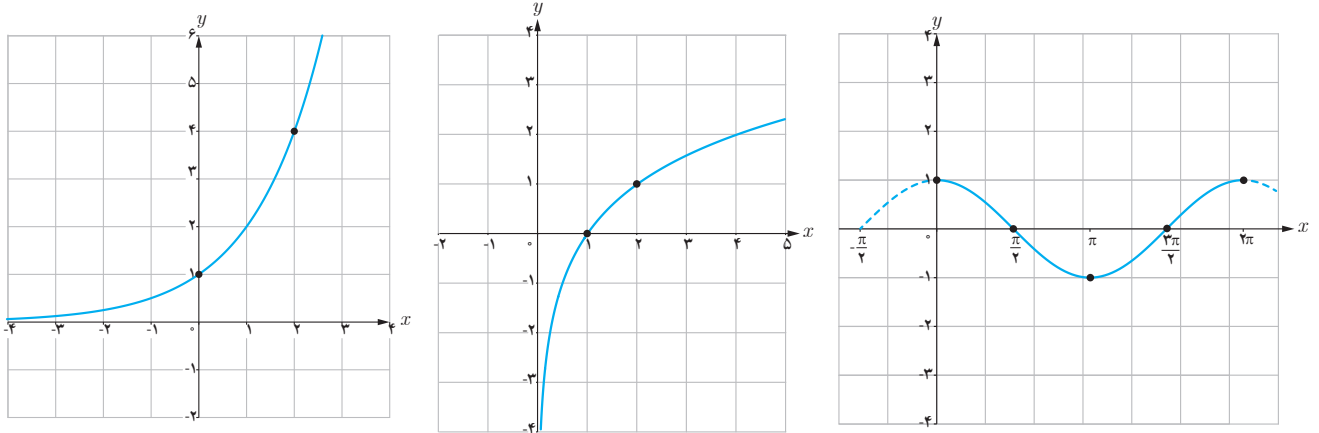
- الف) نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را با دامنه  $[0, 4]$  رسم کنید و برد تابع را مشخص کنید.  
 ب) نمودار توابع  $k(x) = f(x - 2)$  و  $g(x) = f(x) + 3$  را به کمک انتقال رسم کنید.  
 پ) دامنه و برد توابع  $k$  و  $g$  را محاسبه و با دامنه و برد تابع  $f$  مقایسه کنید.



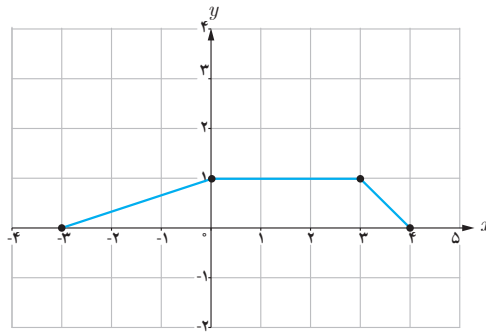
	$f(x) = \sqrt{x}$	$k(x) = f(x - 2)$	$g(x) = f(x) + 3$
دامنه	$[0, 4]$		
برد			

فصل اول: تابع ۵

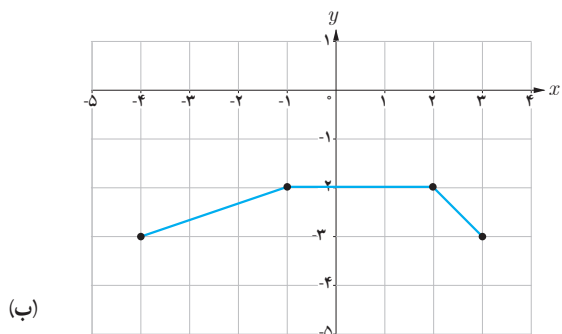
۲ در زیر، نمودار توابع  $y = \cos x$  و  $y = \log_r x$ ،  $y = 2^x$  و  $y = 2^{x-1} + 2$ ،  $y = \log_r(x+2)$  و  $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$  را به کمک انتقال رسم کنید.



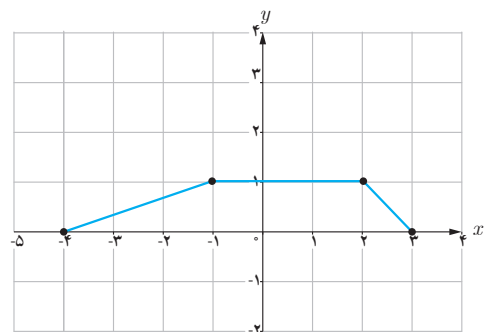
❁ مثال: نمودار تابع  $f$  به صورت زیر داده شده است. با انتقال‌های افقی و عمودی، نمودار تابع  $y = f(x+1) - 3$  را رسم می‌کنیم.



برای این کار ابتدا نمودار تابع  $f$  را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع  $y = f(x+1)$  رسم شود (شکل الف) و سپس این نمودار را سه واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع  $y = f(x+1) - 3$  رسم شود (شکل ب).



(ب)



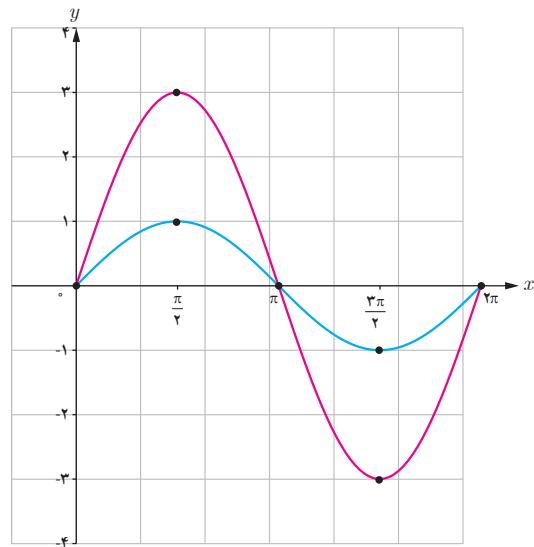
(الف)

## انبساط و انقباض عمودی

### فعالیت

۱ در جدول زیر، چند نقطه از نمودارهای توابع  $y = \sin x$  و  $y = 3\sin x$  را مشخص کرده و نمودار آنها را در بازه  $[0, 2\pi]$  رسم کرده‌ایم. با تکمیل این جدول، نمودار تابع  $y = \frac{1}{3}\sin x$  را نیز در دستگاه زیر رسم کنید.

$x$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$y = \sin x$	$0$	$1$	$0$	$-1$	$0$
$y = 3\sin x$	$0$	$3$	$0$	$-3$	$0$
$y = \frac{1}{3}\sin x$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$



۲ با مقایسه نمودارهای بالا، نمودارهای توابع  $y = 3\sin x$  و  $y = \frac{1}{3}\sin x$  چه تفاوتی با نمودار تابع  $y = \sin x$  دارند؟

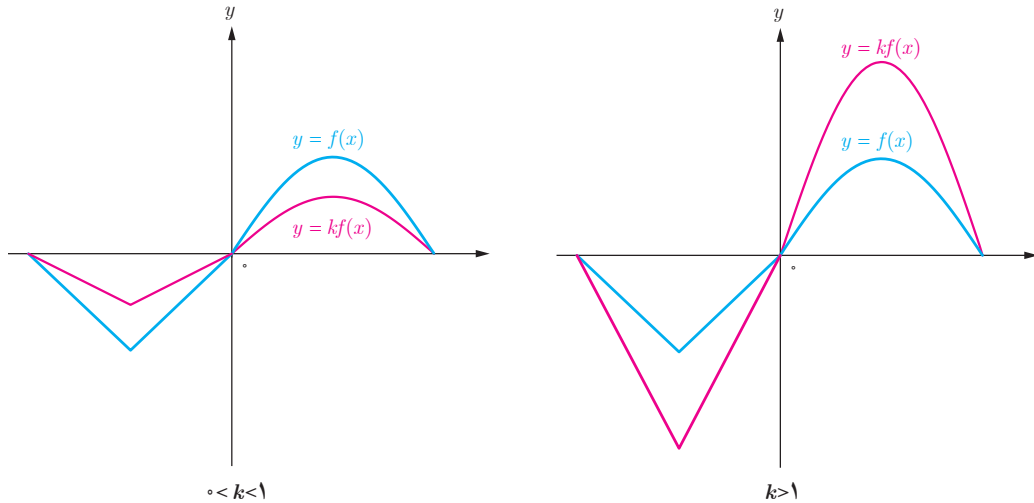
۳ دامنه و برد توابع  $y = 3\sin x$  و  $y = \frac{1}{3}\sin x$  چه تفاوتی با دامنه و برد تابع  $y = \sin x$  دارند؟

در حالت کلی اگر  $(x_0, y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد و تابع  $g$  به صورت  $g(x) = kf(x)$  تعریف شده باشد، آنگاه:

$$g(x_0) = k f(x_0) = k y_0$$

بنابراین  $(x_0, k y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $g$  متناظر با نقطه  $(x_0, y_0)$  از نمودار تابع  $f$  است.

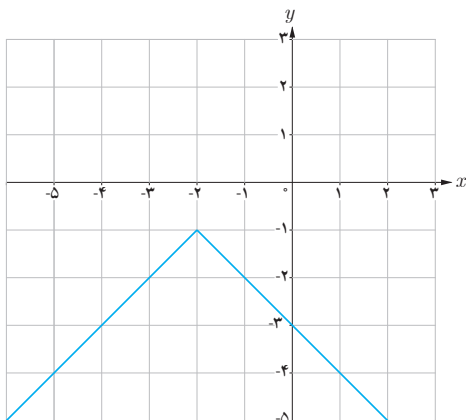
برای رسم نمودار تابع  $y = kf(x)$ ، کافی است عرض نقاط نمودار تابع  $y = f(x)$  را در  $k$  ضرب کنیم. در شکل‌های زیر، نمودار تابع  $y = kf(x)$  برای دو حالت  $k > 1$  و  $0 < k < 1$  رسم شده است.



اگر  $k > 1$  باشد، نمودار  $y = kf(x)$  از انبساط عمودی نمودار  $y = f(x)$  حاصل می‌شود و اگر  $0 < k < 1$  باشد، نمودار  $y = kf(x)$  از انقباض عمودی نمودار  $y = f(x)$  به دست می‌آید.

اگر عرض نقاط تابع  $y = f(x)$  را قرینه کنیم، نقاط تابع  $y = -f(x)$  به دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع  $y = -f(x)$  قرینه نمودار تابع  $y = f(x)$  نسبت به محور  $x$  است.

### کارد کلاس



۱ اگر دامنه و برد تابع  $y = f(x)$  به ترتیب بازه‌های  $[a, b]$  و  $[c, d]$  باشند، دامنه و برد تابع  $y = kf(x)$  را برای  $k > 0$  و  $k < 0$  تعیین کنید.

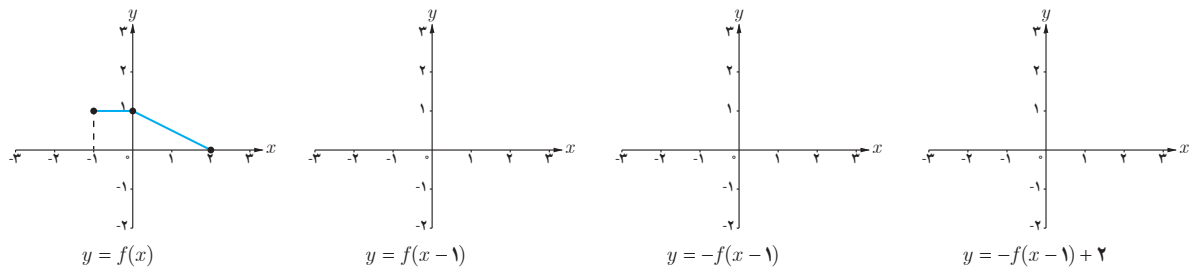
۲ نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع  $y = x^2$  رسم کنید.

الف)  $y = -x^2$

ب)  $y = 2x^2 - 1$

پ) نمودار روبه‌رو از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع  $y = |x|$  به دست آمده است. ضابطه این تابع را مشخص کنید.

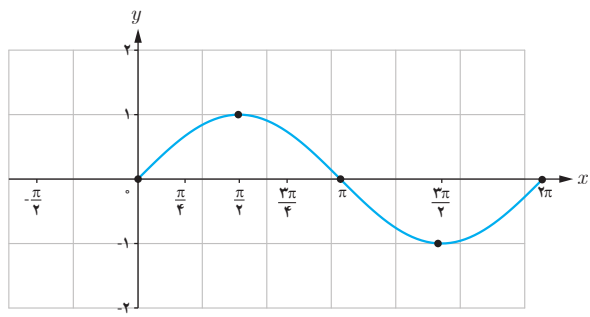
۳ نمودار تابع  $y = f(x)$  در زیر رسم شده است. با انجام مراحل زیر، نمودار تابع  $y = -f(x-1) + 2$  را رسم کنید.



## انبساط و انقباض افقی

### فعالیت

در دستگاه زیر، نمودار تابع  $y = \sin x$  در فاصله  $[0, 2\pi]$  رسم شده است.   
 ۱ با تکمیل جدول زیر، نقاطی از نمودار تابع  $y = \sin 2x$  مشخص می‌شود. با کمک این جدول نمودار این تابع را در فاصله  $[0, \pi]$  رسم کنید.



$x$	$0$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$
$y = \sin 2x$	...	...	...	...	...

۲ با مقایسه نمودارهای توابع  $y = \sin 2x$  و  $y = \sin x$ ، چه تفاوتی بین آنها وجود دارد؟



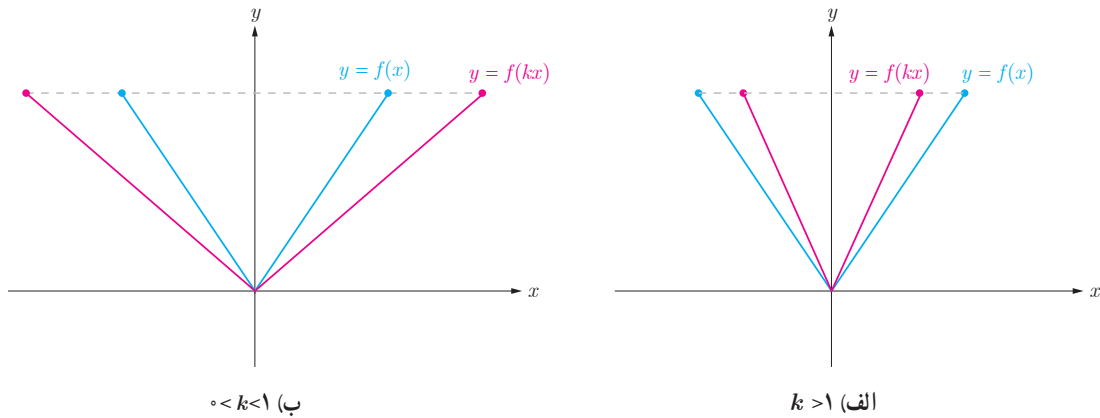
در حالت کلی اگر  $(x_0, y_0)$  یک نقطه دلخواه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد و تابع  $g$  به صورت  $g(x) = f(kx)$  تعریف شده باشد،

$$g\left(\frac{x_0}{k}\right) = f\left(k \frac{x_0}{k}\right) = f(x_0) = y_0 \quad \text{آنگاه:}$$

بنابراین نقطه  $\left(\frac{x_0}{k}, y_0\right)$  یک نقطه از نمودار تابع و متناظر با نقطه  $(x_0, y_0)$  از نمودار تابع  $f$  است.

برای رسم نمودار تابع  $y = f(kx)$ ، کافی است طول نقاط نمودار تابع  $y = f(x)$  را در  $\frac{1}{k}$  ضرب کنیم.

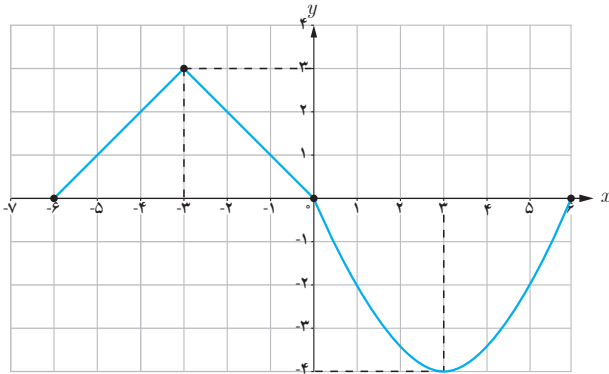
در شکل های زیر، نمودار تابع  $y = f(kx)$  برای دو حالت  $k > 1$  و  $0 < k < 1$  رسم شده است.



اگر  $k > 1$  باشد، نمودار  $y = f(kx)$  از انقباض افقی نمودار  $y = f(x)$  در راستای محور  $x$ ها به دست می‌آید و اگر  $0 < k < 1$  باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار  $y = f(x)$  حاصل می‌شود.

اگر طول نقاط تابع  $y = f(x)$  را قرینه کنیم، نقاط تابع  $y = f(-x)$  به دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع  $y = f(-x)$  قرینه نمودار تابع  $y = f(x)$  نسبت به محور  $y$  است.

۱ اگر دامنه و برد تابع  $y = f(x)$  به ترتیب بازه‌های  $[a, b]$  و  $[c, d]$  باشند، دامنه و برد تابع  $y = f(kx)$  را برای  $k > 0$  و  $k < 0$  تعیین کنید.



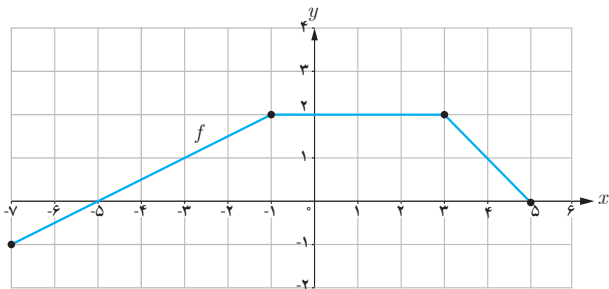
۲ اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت مقابل باشد، نمودار توابع  $y = f(3x)$  و  $y = f(-\frac{x}{3})$  را رسم کنید.

۳ نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع  $y = \cos x$  رسم کنید.

الف)  $y = \cos 2x - 1$

ب)  $y = 2 \cos(\frac{x}{3})$

❁ مثال: اگر نمودار تابع  $f$  به صورت زیر باشد، نمودار تابع  $g(x) = f(2x + 1)$  را به کمک آن رسم می‌کنیم.



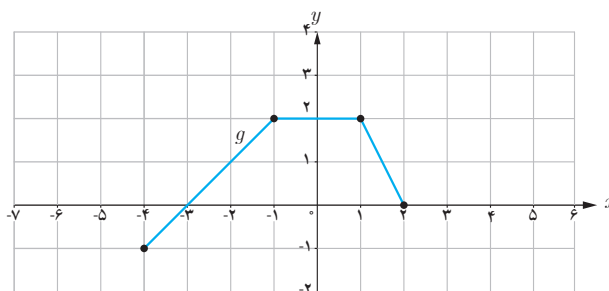
اگر  $A = (x_0, y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $f$  باشد، آنگاه نقطه متناظر آن روی نمودار تابع  $g$  است، زیرا:

$$g\left(\frac{x_0 - 1}{2}\right) = f\left(2\left(\frac{x_0 - 1}{2}\right) + 1\right) = f(x_0 - 1 + 1) = f(x_0) = y_0.$$

بنابراین نقاط مشخص شده در نمودار  $f$  را یک واحد به سمت چپ منتقل کرده و سپس طول آنها را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نقاط متناظر از  $g$  به دست آیند.

با توجه به اینکه  $\frac{x_0 - 1}{2} = \frac{x_0}{2} - \frac{1}{2}$ ، آیا می‌توانید روشی دیگر برای رسم نمودار تابع  $g$  پیشنهاد کنید؟

آیا می‌توان برای رسم نمودار تابع  $g$ ، ابتدا نمودار تابع  $y = f(2x)$  را رسم کرد و سپس آن را یک واحد به چپ منتقل کرد تا  $g(x) = f(2x + 1)$  رسم شود؟ چرا؟



۱ هر یک از توابع زیر، تبدیل یافته تابع  $y = \sqrt{x}$  هستند. هر یک از آنها را به نمودارش نظیر کنید.

الف)  $y = \sqrt{2+x}$

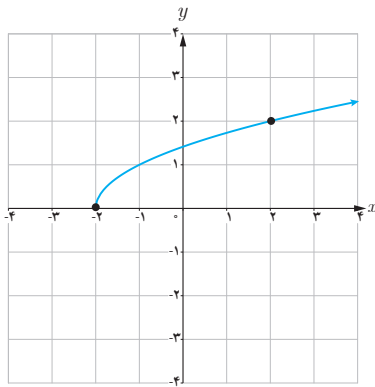
ب)  $y = 2 + \sqrt{x}$

پ)  $y = -2\sqrt{x}$

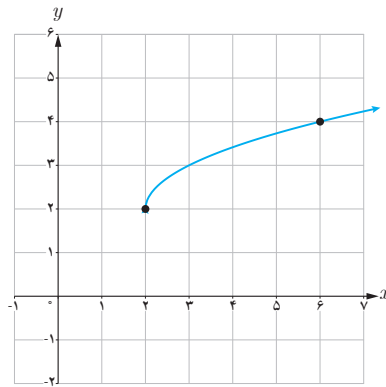
ت)  $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$

ث)  $y = 2 + \sqrt{x-2}$

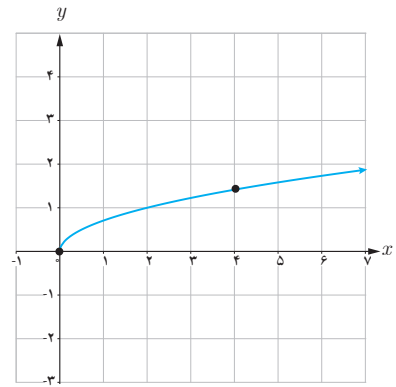
ج)  $y = \sqrt{-2x}$



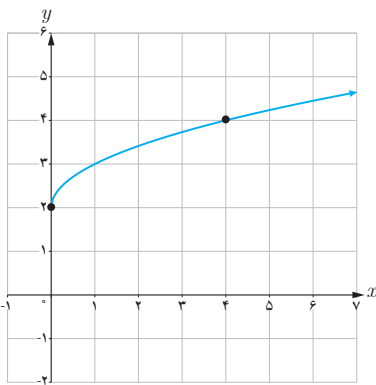
(a)



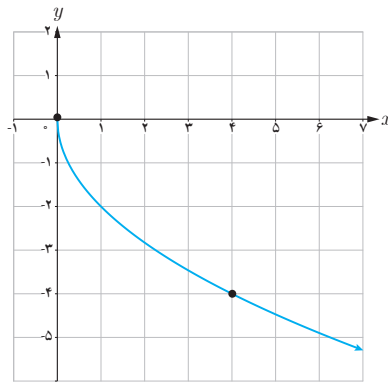
(b)



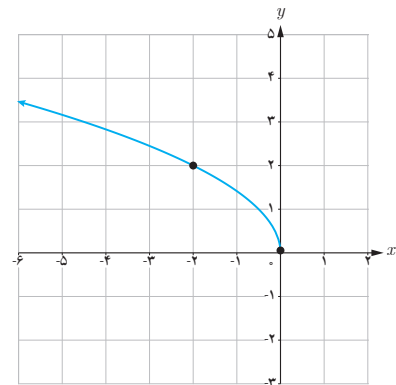
(c)



(d)



(e)



(f)

۲ نمودار تابع  $f$  در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

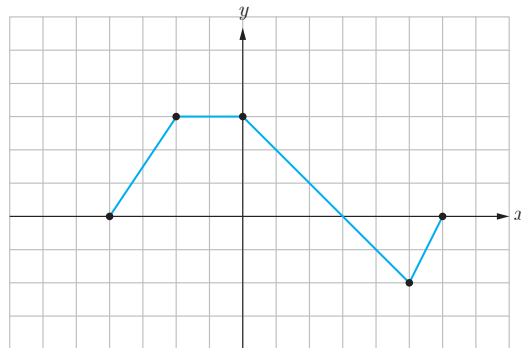
الف)  $y = f(-x)$

ب)  $y = 2f(x-1)$

پ)  $y = -f(x) + 2$

ت)  $y = f(2x-1)$

ث)  $y = f(3-x)$

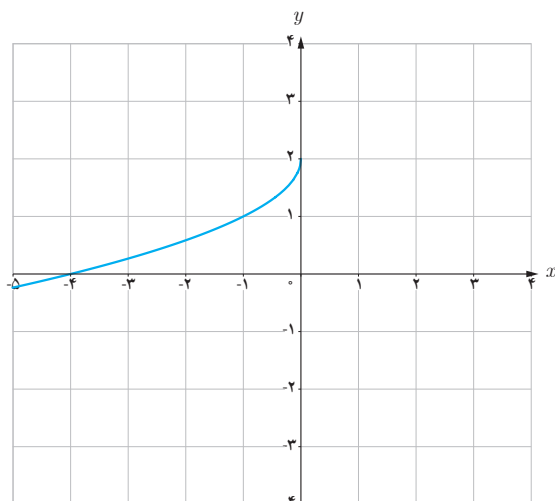
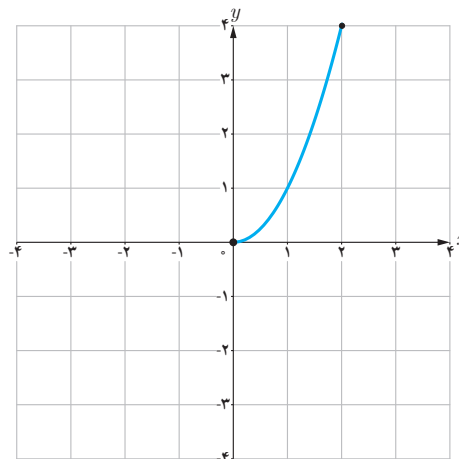


۳ نمودار تابع  $f$  در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را رسم کنید و آنها را با نمودار  $f$  مقایسه کنید.

الف)  $y = f(-x)$

ب)  $y = -f(x)$

پ)  $y = -f(-x)$



۴ نمودار تابع مقابل فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  به دست آمده است. ضابطه این تابع را بنویسید.

## ۲

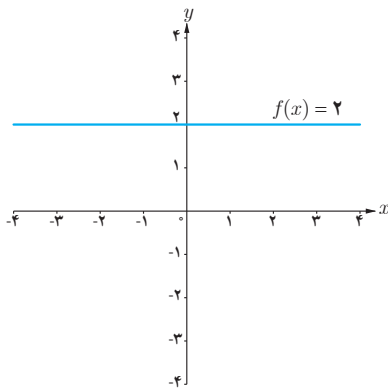
## درس

## تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم

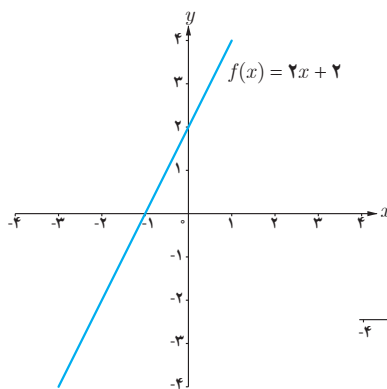
فرض کنید  $n$  یک عدد صحیح نامنفی و  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$  اعداد حقیقی باشند که  $a_n \neq 0$ . تابع  $f(x)$  که به صورت زیر تعریف می‌شود، تابع چند جمله‌ای از درجه  $n$  نامیده می‌شود.<sup>۱</sup>

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

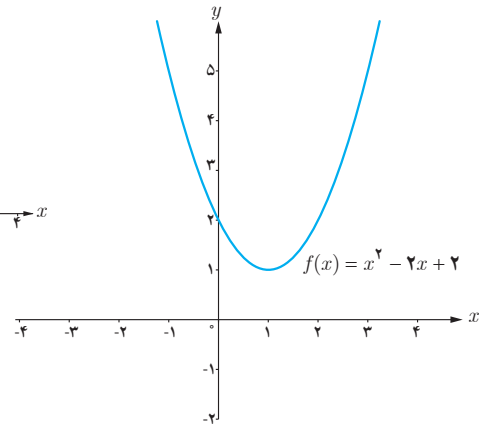
تابع ثابت  $f(x) = c$ ، یک تابع چند جمله‌ای از درجه صفر و تابع خطی  $f(x) = mx + b$  که  $m \neq 0$ ، یک تابع چند جمله‌ای از درجه یک است. به همین ترتیب یک سهمی به معادله  $f(x) = ax^2 + bx + c$  یک تابع چند جمله‌ای از درجه دو است.



تابع درجه صفر



تابع درجه یک



تابع درجه دو

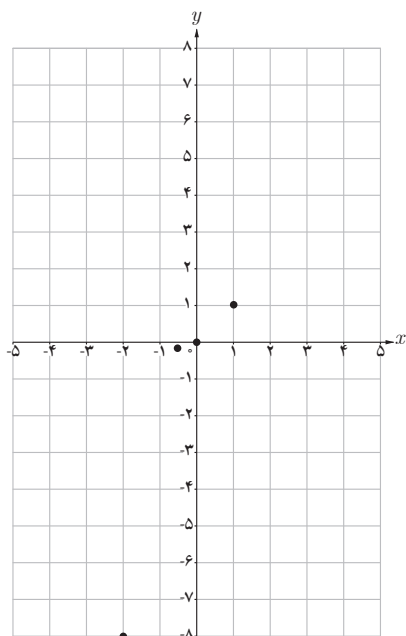
## کاردرکلاس

در زیر چند تابع چند جمله‌ای نوشته شده‌اند. درجه هر کدام را مشخص کنید.

$$f(x) = 2x - 3, \quad h(x) = x^2 + x - 4, \quad n(x) = 2x - x^2$$

$$g(x) = (x-1)^2 + 3, \quad m(x) = 5, \quad p(x) = x^2(1-x)^2$$

۱- برای  $f(x) = 0$ ، درجه تعریف نمی‌شود.



$x$	$y = x^3$
-2	$(-2)^3 = -8$
-1	
$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2})^3 = -\frac{1}{8}$
0	0
$\frac{1}{2}$	
1	1
2	

یکی از توابع چند جمله‌ای درجه سه، تابع  $f(x) = x^3$  است.

۱ با تکمیل جدول مقابل، نمودار تابع  $f(x) = x^3$  را رسم کنید.

۲ به کمک نمودار رسم شده برای تابع  $f(x) = x^3$ ، نشان دهید که این تابع وارون‌پذیر است.

۳ نمودار تابع  $f^{-1}$  را رسم کنید و ضابطه  $f^{-1}$  را تعیین کنید.

۱ نمودار هر یک از توابع زیر را به کمک نمودار تابع  $y = x^3$  رسم کنید.

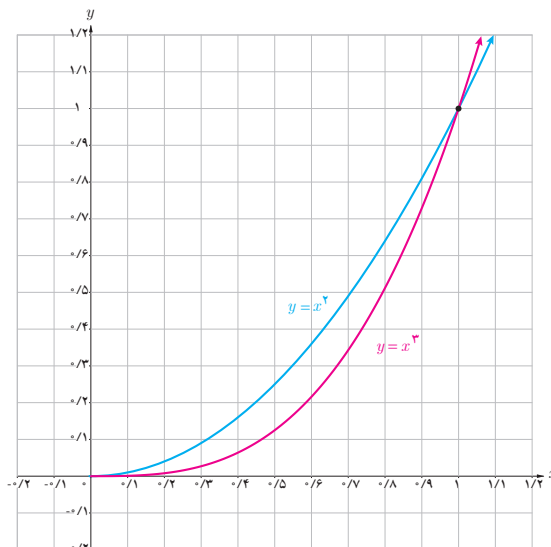
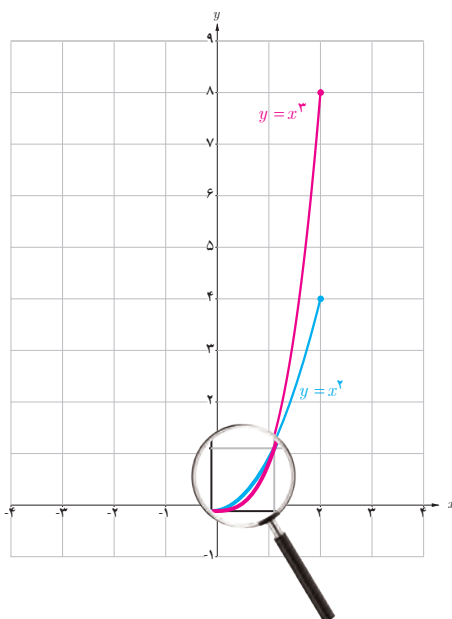
الف)  $y = (x+1)^3$

ب)  $y = -x^3 + 1$

پ)  $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

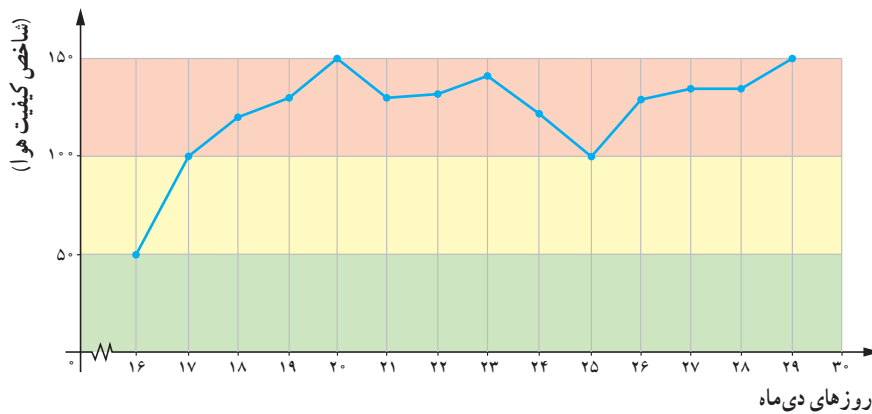
۲ نمودار هر یک از توابع  $y = x^3$  و  $y = x^3$  در فاصله  $[0, 2]$  رسم شده است.

در فاصله  $[0, 1]$ ، نمودار کدام تابع پایین‌تر و نمودار کدام تابع بالاتر است؟ در فاصله  $[1, 2]$  چطور؟

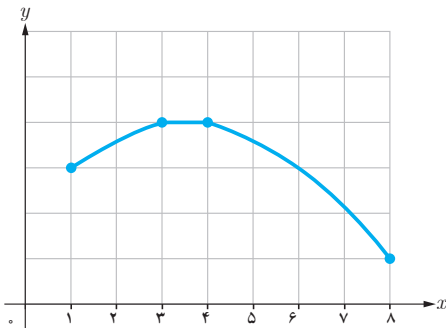


## توابع صعودی و توابع نزولی

تنفس هوای پاک در شهرهای صنعتی یکی از آرزوهای ساکنین این شهرهاست. براساس شاخص کیفیت هوا (AQI)، کیفیت هوای یک منطقه، یکی از وضعیت‌های پاک، سالم، ناسالم برای گروه‌های حساس، ناسالم، بسیار ناسالم و خطرناک می‌باشد. نمودار زیر، میانگین شاخص کیفیت هوا در ۱۵ روز پایانی دی ماه سال ۱۳۹۵ در شهر تهران را نشان می‌دهد.



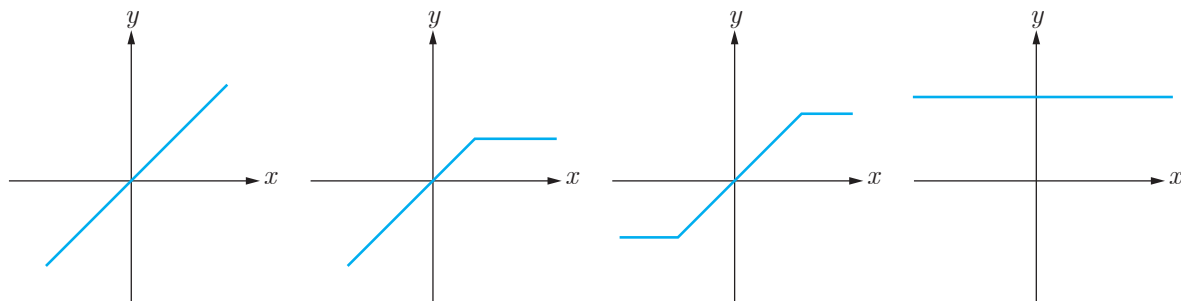
- الف) شاخص کیفیت هوا در چه فاصله‌های زمانی روبه افزایش بوده است؟  
 ب) شاخص کیفیت هوا در چه فاصله‌های زمانی روبه کاهش بوده است؟  
 پ) این شاخص در چه فاصله زمانی ثابت بوده است؟



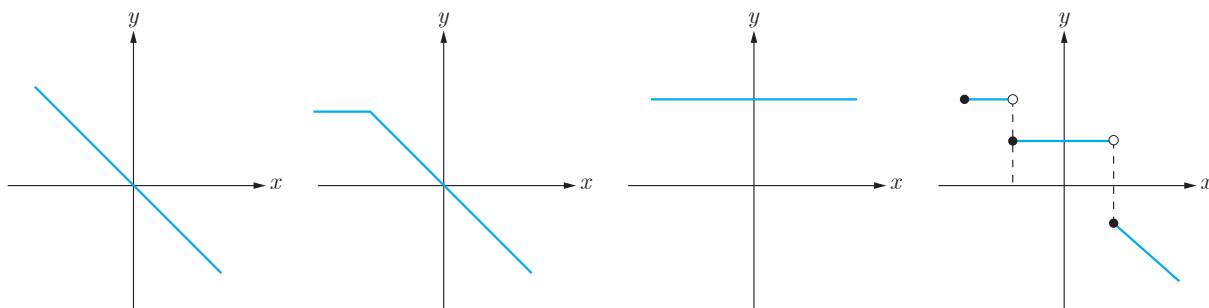
دامنه تابع  $f$  که در شکل مقابل دیده می‌شود، بازه  $[1, 8]$  است. در بازه  $[1, 3]$ ، هم‌زمان با افزایش  $x$ ، نمودار تابع روبه بالا می‌رود. به همین خاطر به تابع  $f$  در بازه  $[1, 3]$  صعودی می‌گوییم. در بازه  $[3, 4]$  مقدار تابع ثابت است. در ادامه و در بازه  $[4, 8]$ ، هم‌زمان با افزایش  $x$ ، نمودار تابع روبه پایین می‌رود و به همین منظور به تابع  $f$  در بازه  $[4, 8]$  نزولی گفته می‌شود.

## توابع صعودی و توابع نزولی

تابع  $f$  را در مجموعه  $A \subseteq D_f$  صعودی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار  $a$  و  $b$  در این مجموعه که  $a < b$ ، آنگاه  $f(a) \leq f(b)$  در فاصله‌ای که یک تابع صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، روبه پایین نخواهیم رفت. نمودارهای زیر همگی مربوط به توابع صعودی‌اند.



تابع  $f$  را در مجموعه  $A \subseteq D_f$  نزولی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار  $a$  و  $b$  از این مجموعه که  $a < b$ ، آنگاه  $f(a) \geq f(b)$  در فاصله‌ای که یک تابع نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، روبه بالا نخواهیم رفت. نمودارهای زیر همگی مربوط به توابع نزولی‌اند.

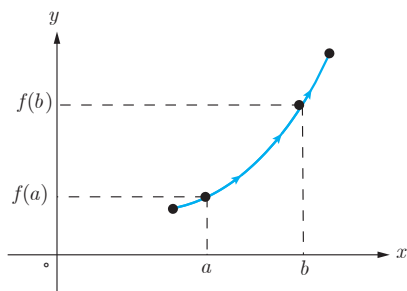


❖ تابع  $f$  را بر مجموعه  $A$  یکنوا گوییم، هرگاه در این مجموعه، صعودی (نزولی) باشد.

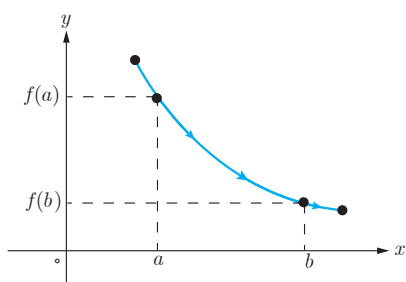
❖ تابع  $f$  را در یک مجموعه، ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر  $x$  در این مجموعه، مقدار  $f(x)$  ثابت باشد. با توجه به

تعاریف بالا، تابع ثابت در یک مجموعه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

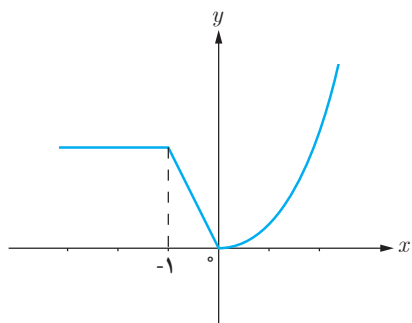




الف) تابع اکیداً صعودی



ب) تابع اکیداً نزولی



## توابع اکیداً صعودی و توابع اکیداً نزولی

❖ تابع  $f$  را در یک مجموعه، اکیداً صعودی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار  $a$  و  $b$  در این مجموعه که  $a < b$ ، آنگاه  $f(a) < f(b)$ . در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه بالا خواهیم رفت. (شکل الف)

❖ تابع  $f$  را در یک مجموعه، اکیداً نزولی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار  $a$  و  $b$  در این مجموعه که  $a < b$ ، آنگاه  $f(a) > f(b)$ . در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه پایین خواهیم رفت. (شکل ب)

❖ به تابعی که در یک مجموعه اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، اکیداً یکنوا می‌گوییم.

❖ مثال: نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. در فاصله  $(-\infty, -1]$  تابع  $f$  ثابت است. همچنین در فاصله  $[-1, 0]$  تابع اکیداً نزولی و در فاصله  $[0, +\infty)$  تابع اکیداً صعودی است.

## کارد کلاس

۱ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = x^2 + 2x, \quad g(x) = 2^{-x}, \quad h(x) = |x + 2|$$

الف) در چه بازه‌هایی این توابع، اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟

ب) کدام یک از آنها در تمام دامنه خود، اکیداً یکنوا است؟

۲ نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq -1 \\ 2 & x < -1 \end{cases}$  را رسم کنید. در چه فاصله‌هایی این تابع صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟

۳

الف) اگر تابع  $f$  در یک فاصله اکیداً صعودی باشد، آیا صعودی نیز هست؟ چرا؟  
ب) اگر تابع  $f$  در یک فاصله صعودی باشد، آیا اکیداً صعودی نیز خواهد بود؟ مثال بزنید.

۴

الف) فرض کنید تابع  $f$  در یک فاصله اکیداً صعودی باشد و  $a$  و  $b$  متعلق به این فاصله باشند. اگر  $f(a) \leq f(b)$  نشان دهید که  $a \leq b$ .  
ب) اگر  $\log(x+1) \leq \log(2x-3)$ ، حدود  $x$  را به دست آورید.

## تقسیم و بخش پذیری

### فعالیت

با تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر یکدیگر آشنا هستید. چند جمله‌ای‌های  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$  و  $p(x) = x^2 - 2$  را در نظر می‌گیریم.  
الف) اگر  $q(x)$  و  $r(x)$  به ترتیب خارج قسمت و باقیمانده تقسیم  $f(x)$  بر  $p(x)$  باشند. نشان دهید که  $q(x) = x - 5$  و  $r(x) = 2x - 5$ .  
ب) درستی تساوی  $f(x) = p(x)q(x) + r(x)$  را بررسی کنید.

### قضیه تقسیم برای چند جمله‌ای‌ها

اگر  $f(x)$  و  $p(x)$  چند جمله‌ای باشند و درجه  $p(x)$  از صفر بزرگ‌تر باشد، آنگاه چند جمله‌ای‌های منحصر بفرد  $q(x)$  و  $r(x)$  وجود دارند به طوری که:

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x)$$

که در آن  $r(x) = 0$  یا درجه  $r(x)$  از درجه  $p(x)$  کمتر است.

اگر  $r(x) = 0$  باشد، چند جمله‌ای  $f$  بر چند جمله‌ای  $p$  بخش پذیر است.

اگر  $f(x) = x^2 - 16$  و  $p(x) = x + 2$ ، نشان دهید که  $f(x)$  بر  $p(x)$  بخش پذیر است.

در تقسیم  $f(x) = x^2 + 2$  بر  $p(x) = 2x - 1$ ،  $q(x)$  و  $r(x)$  به ترتیب خارج قسمت و باقی مانده اند.

الف) نشان دهید که  $r(x)$  از درجه صفر است.

ب) با توجه به قضیه تقسیم می توان نوشت:

$$f(x) = (2x - 1)q(x) + r(x)$$

اکنون ریشه چند جمله ای  $p(x) = 2x - 1$  را به دست آورید و با قرار دادن در رابطه بالا نشان دهید که  $r(x) = f(\frac{1}{2})$ . به طور کلی می توان گفت:

**قضیه:** باقی مانده تقسیم چند جمله ای  $f(x)$  بر  $ax + b$  عبارت است از  $r(x) = f(\frac{-b}{a})$ .

۱ باقی مانده تقسیم چند جمله ای  $x^2 + x - 2$  را بر  $2x + 1$  به دست آورید.

۲ اگر چند جمله ای  $x^2 + ax - 2$  بر  $x - a$  بخش پذیر باشد، مقدار  $a$  را تعیین کنید.

با اتحادهای زیر از سال‌های قبل، آشنا هستید.

$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a) \quad \text{و} \quad x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$$

۱ از تقسیم  $x^3 - a^3$  بر  $x-a$  نشان دهید که:

$$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$$

۲ آیا  $x^n - a^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) بر  $x-a$  بخش پذیر است؟

۳ از تقسیم  $x^n - a^n$  بر  $x-a$  نشان دهید که  $x^n - a^n$  به صورت زیر تجزیه می‌شود.

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

۴ چند جمله‌ای‌های  $x^5 - 1$  و  $x^6 - 64$  را به کمک اتحاد بالا تجزیه کنید.

۱ در اتحاد بالا، اگر  $n$  فرد باشد، با تغییر  $a$  به  $-a$  اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

$$x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-2}x + a^{n-1})$$

به کمک این اتحاد، چند جمله‌ای  $x^5 + 1$  را تجزیه کنید.

۲ در فعالیت بالا، اگر  $n$  زوج باشد، با تغییر  $a$  به  $-a$  اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

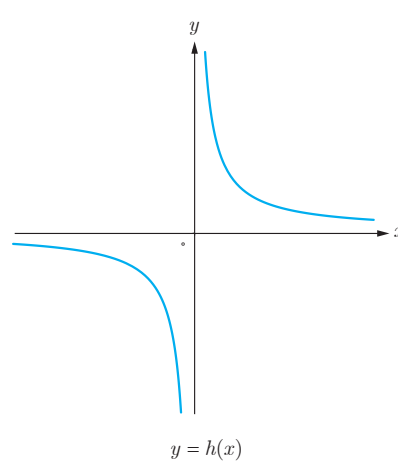
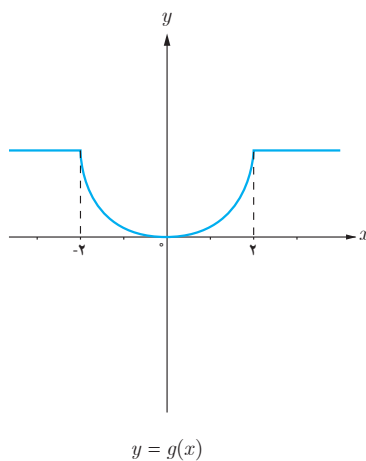
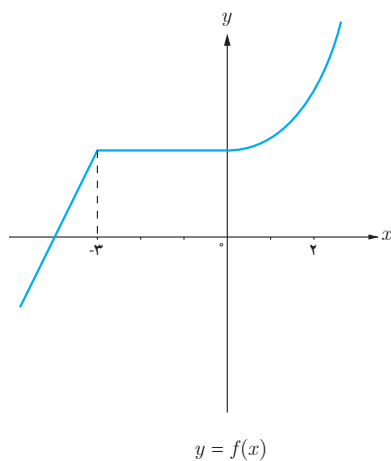
$$x^n - a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots + a^{n-2}x - a^{n-1})$$

به کمک این اتحاد، چند جمله‌ای  $x^4 - 16$  را طوری تجزیه کنید که  $x+2$  یک عامل آن باشد.

۱ تابع  $f(x) = (x-2)^2 + 1$  را در نظر بگیرید.

- الف) نمودار تابع  $f$  را به کمک نمودار تابع  $y = x^2$  رسم کنید.  
 ب) نشان دهید که  $f$  وارون پذیر است و نمودار  $f^{-1}$  را رسم کنید.  
 پ) ضابطه  $f^{-1}$  را به دست آورید.

۲ نمودار توابع  $f$ ،  $g$  و  $h$  در زیر رسم شده اند.



- الف) تابع  $f$  در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی است؟  
 ب) تابع  $g$  در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟  
 پ) تابع  $h$  در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی است؟

۳ نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. کدام یک از آنها در تمام دامنه خود، اکیداً یکنواست؟

الف)  $f(x) = \sqrt{2-x}$

ب)  $g(x) = 2^{-x}$

پ)  $h(x) = \log_2 x$

۴

الف) آیا تابعی وجود دارد که در یک فاصله، هم صعودی و هم نزولی باشد؟  
 ب) نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های  $(-\infty, 0)$  و  $[0, +\infty)$  اکیداً صعودی باشد ولی در  $\mathbb{R}$  اکیداً صعودی نباشد.

۵ اگر توابع  $f$  و  $g$  در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، نشان دهید که تابع  $f + g$  نیز در این فاصله اکیداً صعودی است. برای تابع  $f - g$  چه می‌توان گفت؟

۶ اگر باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای  $x^3 + kx^2 + 2$  بر  $x - 2$  برابر با ۶ باشد،  $k$  را تعیین کنید.

۷ مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای  $x^3 + ax^2 + bx + 1$  بر  $x - 2$  و  $x + 1$  بخش‌پذیر باشد.

۸ هر یک از چند جمله‌ای‌های زیر را بر حسب عامل‌های خواسته شده تجزیه کنید.

الف)  $x^6 - 1$  با عامل  $x - 1$

ب)  $x^6 - 1$  با عامل  $x + 1$

پ)  $x^5 + 32$  با عامل  $x + 2$

۹

الف) فرض کنید تابع  $f$  در یک بازه اکیداً نزولی باشد و  $a$  و  $b$  متعلق به این بازه باشند. اگر  $f(a) \leq f(b)$  نشان دهید که  $a \geq b$ .  
 ب) اگر  $\frac{1}{64} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{3x-2}$ ، حدود  $x$  را به دست آورید.