

حدهای نامتناهی – حد در بی نهایت

۱. حدهای نامتناهی

۲. حد در بی نهایت

۳

فصل

آذربایجان غربی (ماکو)

بسیاری از پدیده‌های طبیعی به وسیله توابع ریاضی مدل‌سازی می‌شوند. در مسئله پاک‌سازی آب رودخانه‌ها، با تابع $f(x) = \frac{255x}{100-x}$ مدل‌سازی می‌شود. که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است. از آنجا که این تابع رفتار بی‌نهایت دارد برای پاک‌سازی نزدیک صد درصد آلودگی‌های آب این رودخانه هزینه‌ها بسیار زیاد خواهد بود. به طوری که می‌توان گفت هزینه‌ها به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

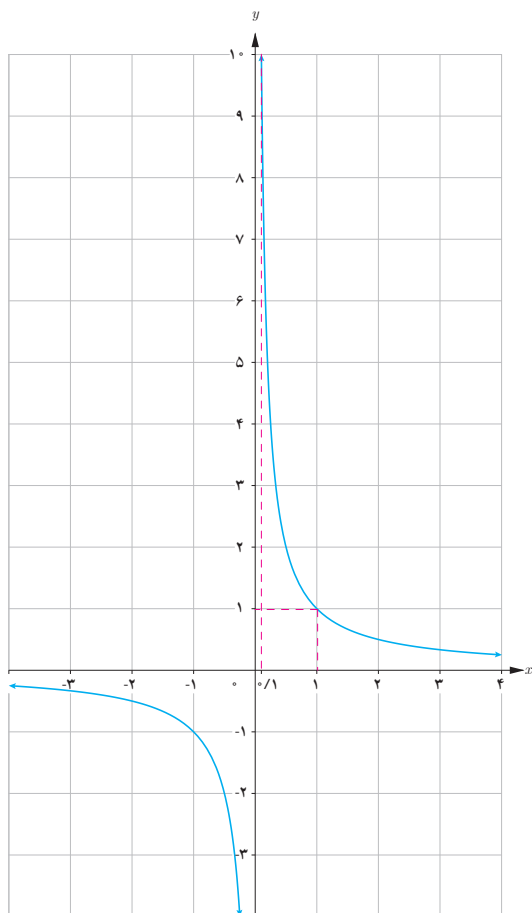
حدهای نامتناهی



درس

در سال قبل با حد یک تابع در یک نقطه آشنا شدیم. دیدیم که l حد تابع f در نقطه a است هرگاه بتوانیم مقادیر $f(x)$ را به دلخواه (هر قدر که بخواهیم) به l نزدیک کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a (از دو طرف a) نزدیک کرده باشیم اما x برابر a نشده باشد در این درس با رفتار برخی دیگر از توابع در همسایگی محذوف یک نقطه آشنا می‌شویم.

فعالیت



در سال قبل با نمودار تابع گویای $f(x) = \frac{1}{x}$ آشنا شدیم می‌خواهیم رفتار این تابع را در همسایگی راست $x = 0$ بررسی کنیم.

۱ جدول زیر رفتار تابع را به ازای برخی از مقادیر x نشان می دهد آن را تکمیل کنید.

x	$0/1$	$0/01$	$0/001$	$0/0001$	$\dots \rightarrow$	0
$f(x)$	10	100	1000	\dots	$\dots \rightarrow$	تعریف نشده

۲ اگر بخواهیم $f(x)$ از یک میلیون بزرگ تر شود مقدار x از چه عددی باید کوچک تر شود؟

۳ وقتی x با مقادیر بزرگ تر از صفر به صفر نزدیک می شود آیا مقادیر تابع به عددی خاص نزدیک می شوند؟ چرا؟

با توجه به این فعالیت مشاهده می شود که وقتی x با مقادیر بزرگ تر از صفر به صفر نزدیک می شود مقادیر $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی افزایش می یابد. به بیان دیگر می توان $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواهی، بزرگ تر کرد به شرطی که x را به اندازه کافی با مقادیر بزرگ تر از صفر، به صفر نزدیک کرد در این صورت می نویسیم: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

❖ **تذکر:** این نماد نشان می دهد که حد فوق موجود نیست. چون مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک نمی شود و مثبت بی نهایت فقط یک نماد است که نشان می دهد مقدار تابع از هر عدد مثبتی می تواند بزرگ تر باشد.

کاردرکلاس

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ برای تابع}$$

الف) جدول زیر را کامل کنید:

x	$-\frac{1}{2}$	$-0/2$	$-0/1$	$-0/001$	$-0/0001$	$-0/00001$	$\dots \rightarrow$	0
$f(x)$				-1000			$\dots \rightarrow$	تعریف نشده

ب) اگر بخواهیم مقدار $f(x)$ از $10^6 -$ کوچک تر شود x باید چگونه انتخاب شود؟

پ) وقتی x از سمت چپ به صفر نزدیک شود $f(x)$ چه تغییری می کند؟

ت) در مورد $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$ چه می توان گفت؟

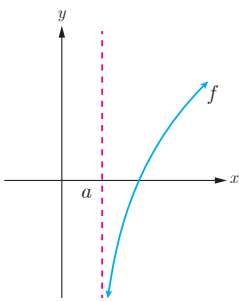
با توجه به آنچه در فعالیت و کار در کلاس صفحه قبل مشاهده شد تعریف زیر را می توان ارائه داد.

تعریف حدهای یک طرفه نامتناهی

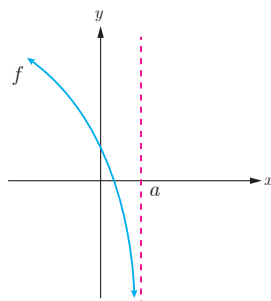
فرض کنیم تابع f در یک همسایگی راست نقطه ای مانند a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ بدین معنی است که می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ تر کنیم به شرطی که x را از سمت راست به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

همچنین فرض کنیم تابع f در یک همسایگی چپ نقطه ای مانند a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ بدین معنی است که می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ تر کنیم به شرطی که x را از سمت چپ به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

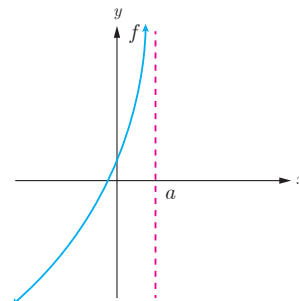
❁ **تذکر:** تعریف حدهای یک طرفه نامتناهی $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ نیز مشابه تعاریف فوق است. توصیف حالت های مختلف حدهای یک طرفه نامتناهی در شکل های زیر آمده است.



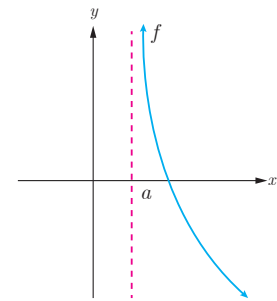
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



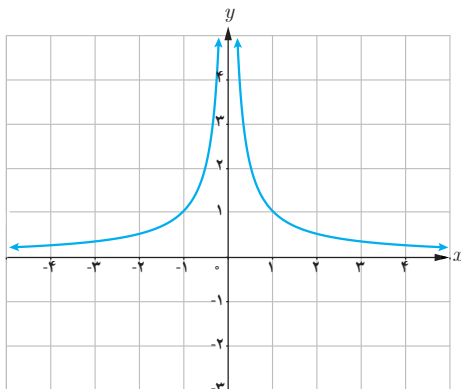
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



❁ **مثال:** نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ در شکل روبه رو رسم شده

است می خواهیم رفتار تابع f را در همسایگی محذوف نقطه $x = 0$

بررسی کنیم به جدول صفحه بعد توجه کنید:

x	$-0/5$	$-0/1$	$-0/0.1$	$-0/0.01$	$000 \rightarrow$	0	$\leftarrow 000$	$0/0.01$	$0/0.1$	$0/1$	$0/5$
$f(x)$					$000 \rightarrow$	تعریف نشده	$\leftarrow 000$				

مشاهده می شود با نزدیک کردن x به اندازه کافی به صفر، مقدارهای $f(x)$ را می توان به دلخواه بزرگ کرد بنابراین $f(x)$ از هر عدد دلخواهی بزرگ تر می شود و در نتیجه مقدار حد تابع یک عدد خاصی نمی شود و حد متناهی ندارد. در اینجا می نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

تعریف :

فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ یعنی اینکه می توانیم $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد مثبت بزرگ تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

تعریف مشابهی از حد در مورد تابع هایی که وقتی x به a نزدیک می شود و مقدار تابع خیلی کوچک تر می شود در زیر وجود دارد.

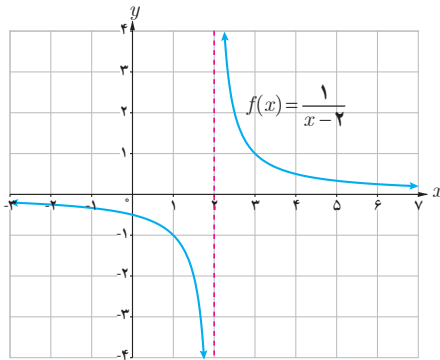
تعریف :

فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ یعنی اینکه می توانیم مقدارهای $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد منفی کوچک تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

❖ **مثال :** برای حد تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در نقطه $x = 0$ می توان گفت : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$.

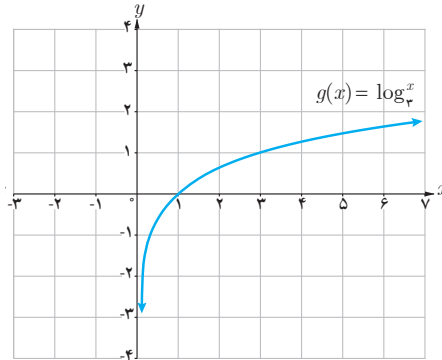
❖ **مثال :** در مورد حد تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ در نقطه $x = 0$ می توان گفت : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{|x|} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{|x|} = +\infty$.

نمودار توابع f ، g و h در شکل‌های زیر داده شده‌اند با توجه به آنها حدود خواسته شده را در صورت وجود به دست آورید.

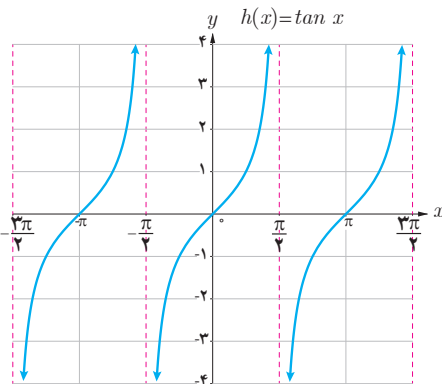


$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \dots$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \dots$$



$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} h(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} h(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} h(x) = \dots$$

خواندنی

بی‌نهایت مفهومی انتزاعی است که در رشته‌های مختلف ریاضیات با تعبیرات مختلف به کار می‌رود و معمولاً به معنای «فراتر از هر مقدار» است و برای توصیف مقادیر بیش از هر عدد به کار می‌رود و نشانه آن در ریاضیات ∞ می‌باشد.

این نماد به صورت چیزی است که محدود نیست و در آن هیچ محدودیت فضایی و زمانی وجود ندارد. در حسابان بی‌نهایت به معنای حدی بی‌کران است $x \rightarrow \infty$ یعنی متغیر x فراتر از هر مقدار در نظر گرفته شده رشد می‌کند.

بی‌نهایت دارای دو مفهوم فیزیکی و ریاضی است که کاملاً با یکدیگر متفاوت‌اند مفهوم فیزیکی بی‌نهایت دارای تعریف دقیقی نیست و در جاهای مختلف دارای تعاریف متفاوت است. به عنوان مثال می‌گوییم اگر جسم در کانون عدسی محدب قرار گیرد تصویر در بی‌نهایت تشکیل می‌شود. حال اگر دو عدسی یا فواصل کانونی متفاوت در نظر بگیریم و اجسامی را روی کانون این دو عدسی قرار دهیم. طبق قاعده تصاویر هر دو در بی‌نهایت تشکیل می‌شود. اما تصویر این دو دقیقاً در یک نقطه تشکیل نمی‌شود. یعنی بی‌نهایت برای این دو عدسی متفاوت است اما مفهوم بی‌نهایت در ریاضیات کاملاً متفاوت با بی‌نهایت فیزیکی است در ریاضیات می‌گوییم «بی‌نهایت از هر مقدار دیگری بیشتر است» این مفهوم دقیقاً همان مفهومی است که در «حد در بی‌نهایت» در نظر گرفته می‌شود. به عنوان مثال در حد تابع می‌گوییم $x \rightarrow \infty$ یعنی اینکه x از هر عدد انتخاب شده‌ای بزرگ‌تر باشد.

برخی از قضایای حدهای بی نهایت^۱

❖ **قضیه ۱:** اگر n یک عدد طبیعی باشد؛ آن گاه :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{عددی زوج باشد،} \\ -\infty & \text{عددی فرد باشد،} \end{cases}$$

❖ **مثال:** با توجه به قضیه فوق می توان نوشت :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^4} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

❖ **قضیه ۲:** الف) اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و برعکس.

ب) اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ و برعکس.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{|x-1|} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{|x-1|} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{|x-1|} = +\infty$$

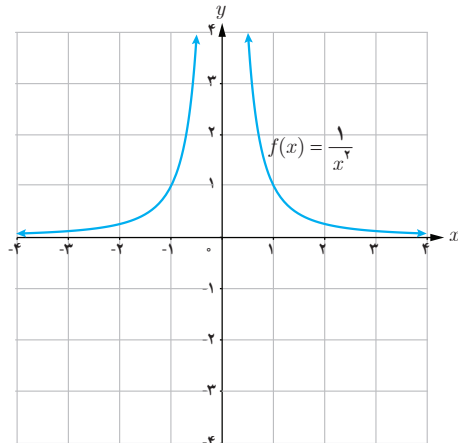
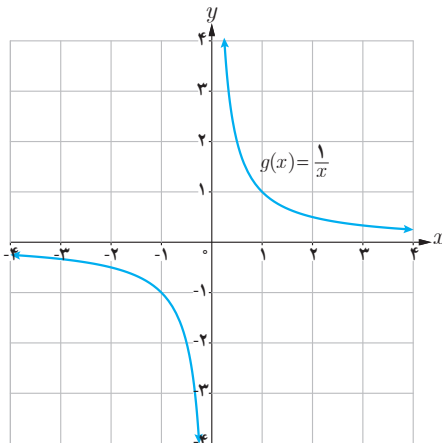
❖ **مثال:**

کاردر کلاس

با استفاده از نمودار توابع داده شده و همچنین قضایای بالا حاصل حدود زیر را به دست آورید.

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$



۱- در این کتاب به بیان برخی از قضایای حدهای بی نهایت پرداخته شده است و اثبات آنها مورد نظر نیست.

❁ **قضیه ۳:** اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ آن گاه:

(الف) اگر $L > 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

(ب) اگر $L < 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

(پ) اگر $L > 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

(ت) اگر $L < 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

❁ **تذکر:** قضیه ۳ در حالتی که $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

❁ **مثال:** هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای به وسیله تابعی، با ضابطه $f(x) = \frac{255x}{100-x}$

محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است دامنه تابع $(0, 100)$ می‌باشد.

مثلاً برای هزینه ۲۰ درصد از آلودگی‌های این رودخانه $63/75$ میلیون تومان لازم است.

برای پاک‌سازی ۹۵ درصد از آلودگی‌ها $f(95) = 4845$ و در نتیجه نزدیک به پنج میلیارد تومان برای این کار لازم است. با

توجه به قضیه فوق داریم: $\lim_{x \rightarrow 100^-} \frac{255x}{100-x} = +\infty$

و این بدان معنا است که با نزدیک شدن x به عدد 100 مقدار $f(x)$ از هر عدد مثبت از پیش تعیین شده‌ای بزرگ‌تر خواهد شد

لذا نمی‌توان صد درصد آلودگی‌های رودخانه را پاک‌سازی کرد.

سد شهید عباسپور، اندیکا، خوزستان (عکاس: سیدمهدی حسینی)

❁ **مثال:** حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{4-x^2}$ را به دست آورید.

حل: از آنجا که $4 - x^2 = (2-x)(2+x)$ وقتی x در همسایگی چپ ۲، باشد. مخرج کسر با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند.

از طرفی $\lim_{x \rightarrow 2^-} x+1 = 3$ طبق بند (الف) قضیه فوق $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{4-x^2} = +\infty$

❖ **مثال:** حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sin x}$ را به دست آورید.

حل: وقتی x در همسایگی راست صفر باشد حد صورت کسر برابر -1 و حد مخرج کسر برابر صفر است و از آنجا که در

همسایگی راست صفر $\sin x$ مقداری مثبت است. در نتیجه طبق بند (ب) قضیه فوق $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sin x} = -\infty$

❖ **مثال:** حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2+x}{x^2+2x+1}$ را به دست آورید.

حل: از آنجا که حد فوق به صورت $\frac{0}{0}$ در می آید و چون $x \neq -1$ پس می توان صورت و مخرج کسر را بر $x+1$ تقسیم کرد. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2+x}{x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x(x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x}{x+1} = +\infty$$

کارد در کلاس

حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1-x}{x+2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]-2}{x-2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{(x-1)^2}$

❖ **قضیه ۴:** اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ (و یا $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$) آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

❖ **تذکر:** قضیه فوق در حالتی که $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

❖ **مثال:** حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x+1}{\tan x}$ را به دست آورید.

حل: در یکی از کار در کلاس های قبل به صورت شهودی دیده شد که: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \tan x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \tan x = +\infty$ از طرفی

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x+1}{\tan x} = 0 \text{ طبق قضیه فوق } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (x+1) = \frac{\pi}{4} + 1$$

۱ توابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ و $g(x) = x + 1$ را در نظر بگیرید.

الف) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ را به دست آورید.

ب) تابع $f + g$ را به صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} ((f + g)(x))$ را محاسبه کنید.

پ) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲ تابع $f \times g$ را به صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \times g(x)$ را محاسبه کنید و ارتباط آن را با $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ بیان کنید.

همان‌طور که در فعالیت فوق مشاهده کردید به‌طور کلی قضیه زیر را می‌توان بیان کرد.

❖ **قضیه ۵:** اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ آن‌گاه:

الف) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty$

ب) اگر $L > 0$ آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$

پ) اگر $L < 0$ آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty$

❖ **تذکر:** قضیه فوق برای حالتی که $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

❖ **مثال:** برای به دست آوردن حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (2x + 1 + \frac{1}{x^2})$ از آنجا که $\lim_{x \rightarrow 0} 2x + 1 = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ با توجه به بند الف قضیه فوق حاصل حد برابر $+\infty$ می‌شود.

❖ **مثال:** حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin^2 x}{x^2}$ را به دست آورید.

حل: می‌توان نوشت $\frac{x + \sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{\sin^2 x}{x^2}$ از طرفی $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ و با توجه به بند الف قضیه فوق حاصل حد برابر $+\infty$ خواهد شد.

۱ قضیه ۵، را در حالتی که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ بازنویسی کنید.

۲ حاصل حدود زیر را به دست آورید در هر مرحله مشخص کنید از کدام قضیه استفاده کرده‌اید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1}$

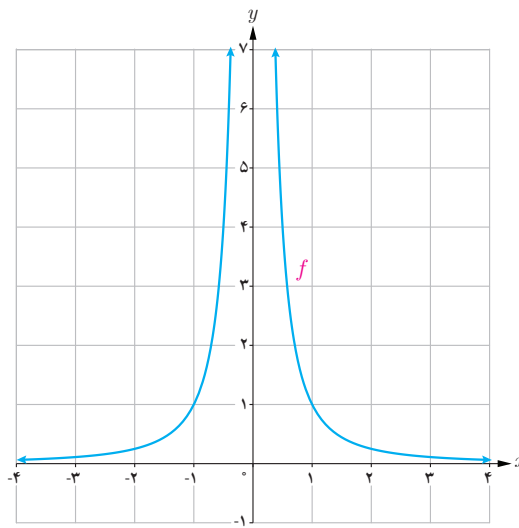
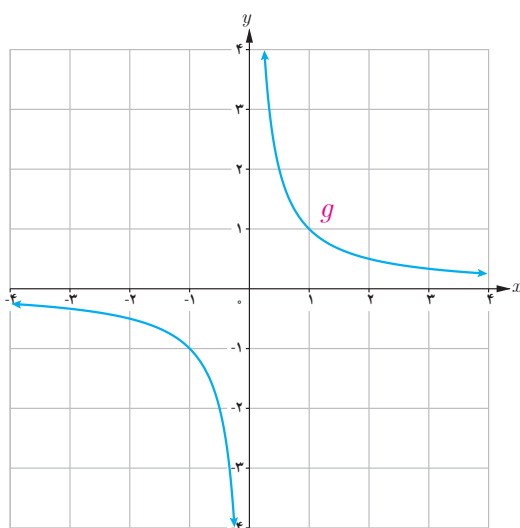
ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x^2}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{x^2 + 4x + 4}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 - \cos 2x}{x}$

مجانِب قائم

به نمودارهای هر یک از توابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ در اطراف نقطه صفر توجه کنید.



$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$ خط $x = 0$ را در هر دو منحنی، مجانِب قائم نمودار می‌گویند.

تعریف :

خط $x = a$ را مجانِب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

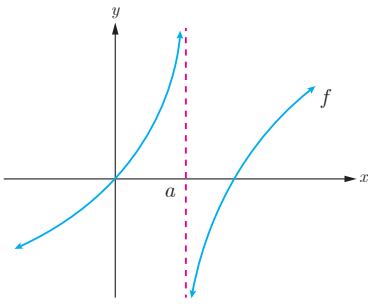
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

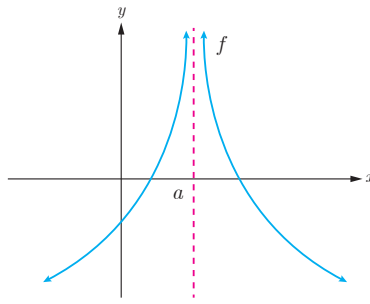
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

❁ مثال: در هر یک از شکل‌های زیر خط $x = a$ یک مجانب قائم منحنی داده شده است.



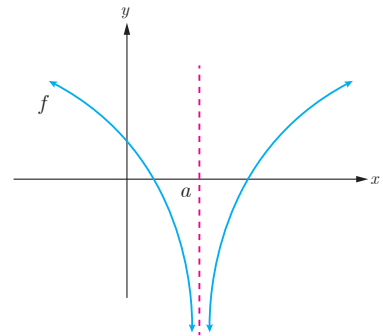
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



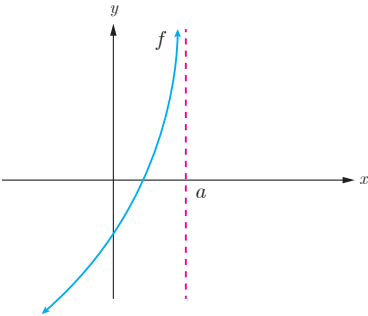
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

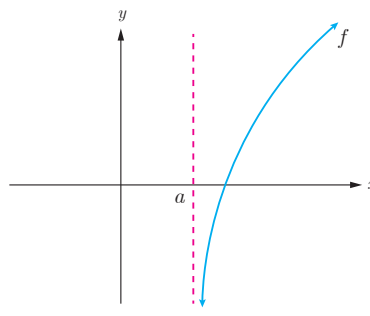


$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

❁ مثال: کدام یک از خطوط $x = 3$ و $x = -1$ مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$ می‌باشند؟

حل: شرایط مجانب قائم را برای دو خط مذکور بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = -\infty$$

به علاوه از آنجا که $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ می‌توانیم بگوییم $x = -1$ نیز مجانب قائم منحنی تابع f است از طرفی

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

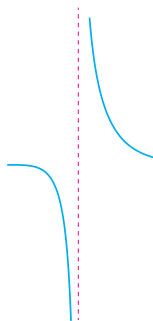
خط $x = 3$ شرایط مجانب قائم را ندارد. لذا منحنی تابع f فقط یک مجانب قائم به صورت $x = -1$ دارد.

❖ **مثال :** نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی می باشد؟

$$f(x) = \frac{x+1}{x(x^2+1)}$$

حل :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$



پس خط $x = 0$ مجانب قائم منحنی تابع است و در مجاورت این خط نمودار تابع به صورت روبه رو خواهد بود.

کارد کلاس

مجانب های قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 6}$ را در صورت وجود به دست آورید.

۱ با استفاده از قضایای حدهای نامتناهی درستی حدهای زیر را نشان دهید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2} = +\infty$

پ) $\lim_{x \rightarrow -2} \left| \frac{5-x}{2+x} \right| = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^4} = +\infty$

۲ حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{x^2-4}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2+2x-1}{x^2+x-12}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2}$

۳ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ بوده و دارای دو مجانب قائم باشد.

۴ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $\{1\} - [-2, 2]$ بوده و دارای مجانب قائم باشد.

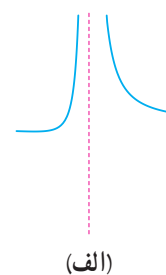
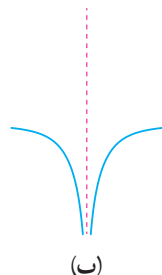
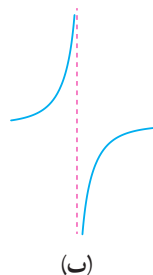
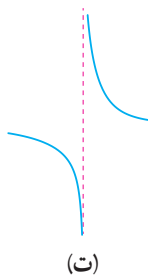
۵ مجانب‌های قائم توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{2x-1}{3-x}$

ب) $g(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x}$

۶ نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x-|x|}$ در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟

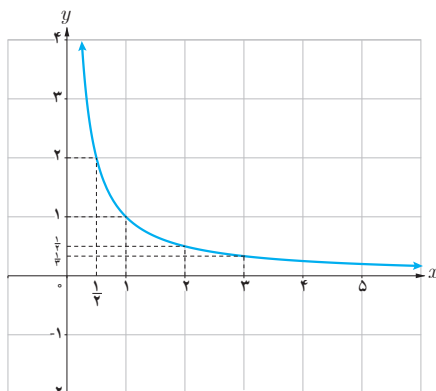
۷ کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x^2-2x+1}$ را در همسایگی $x=1$ نمایش می‌دهد؟ چرا؟



حد در بی نهایت

در درس قبل حدهای نامتناهی و مجانب‌های قائم یک منحنی را بررسی کردیم در آنجا مشاهده کردیم که با نزدیک شدن x به چه عددی $f(x)$ به دلخواه بزرگ تر می‌شود.
در این درس بررسی می‌کنیم که با دلخواه بزرگ شدن (نزدیک شدن) x مقادیر $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟ این مطلب در رسم نمودارها و برای بررسی رفتار شاخه‌های نمودار تابع بسیار مفید است.

فعالیت



نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در بازه $(0, +\infty)$ در نظر بگیرید.

۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	۱	۲	۵	۱۰	۱۰۰	۱۰۲	۱۰۵	۱۰۶
$f(x)$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

۲ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور x ها از $\frac{1}{5}$ کمتر شود x را باید حداقل از چه عددی بزرگ تر بگیریم؟

۳ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور x ها از $\frac{1}{10}$ کمتر شود x را باید حداقل از چه عددی بزرگ تر در نظر بگیریم؟

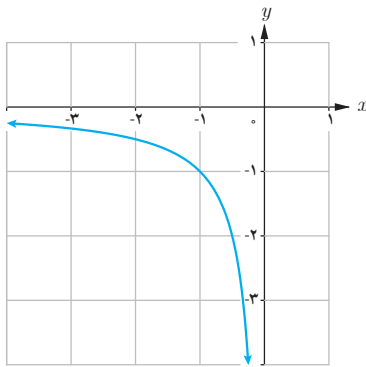
۴ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور x ها از $\frac{1}{100}$ کوچک تر شود x را باید حداقل از چه عددی بزرگ تر در نظر بگیریم؟

۵ آیا فاصله $f(x)$ تا محور x ها را می توان به هر میزان دلخواه کاهش داد؟

با توجه به نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ و جدول صفحه قبل می توان مشاهده کرد در صورتی که x به اندازه کافی بزرگ اختیار شود می توان $f(x)$ را به اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد. در این صورت می گوئیم حد $f(x)$ وقتی x به سمت مثبت بی نهایت میل کند

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ . برابر صفر است و می نویسیم .}$$

کارد کلاس



نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در بازه $(-\infty, 0)$ در نظر بگیرید.

۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	-۱	-۲	-۵	-۱۰	-۱۰۰	-۱۰۰۰	-۱۰۰۰۰	...
$f(x)$...

۲ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ از محور x ها کمتر از $\frac{1}{10}$ شود، x را باید از چه عددی کوچک تر در نظر بگیریم؟

۳ اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور x ها از $\frac{1}{100}$ کمتر شود x را باید از چه عددی کوچک تر در نظر بگیریم؟

با توجه به نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ و جدول بالا می توان مشاهده کرد اگر x به اندازه کافی کوچک تر (یعنی از هر عدد منفی

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ : می نویسیم . در این صورت می نویسیم :}$$

❖ **تذکر:** منظور از $x \rightarrow \pm\infty$ آن است که $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ لذا با توجه به فعالیت و کار در کلاس صفحه قبل به طور خلاصه می توان نوشت:

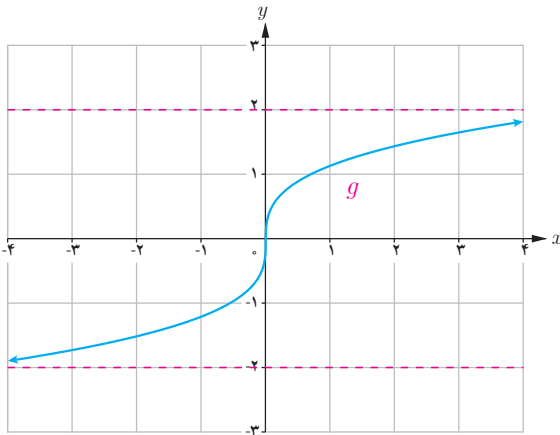
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

تعریف:

- اگر تابع $f(x)$ در بازه ای مانند $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت مثبت بی نهایت میل می کند برابر l است و می نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ هرگاه بتوان با اختیار x های به قدر کافی بزرگ، فاصله $f(x)$ از l را به هر اندازه کوچک کرد.
- اگر تابع f در بازه $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد. می گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت منفی بی نهایت میل می کند برابر l است و می نویسیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ هرگاه بتوان با اختیار x های به قدر کافی کوچک فاصله $f(x)$ را از l به هر اندازه کوچک کرد.

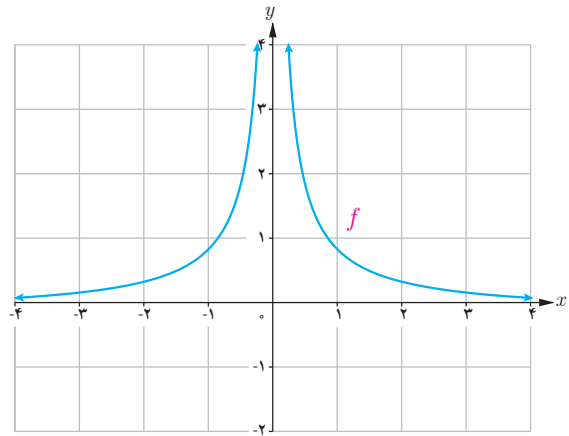
کاردر کلاس

با استفاده از نمودارهای f و g حدهای زیر را به دست آورید.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

❖ **قضیه ۶:** اگر a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

❖ **مثال:** حاصل هر یک از حدود $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-5}{2x^3}$ و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{2}}{x^2}$ برابر صفر است.

❖ **قضیه ۷:** اگر L_1 و L_2 اعداد حقیقی و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_2$ آنگاه:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_1 \pm L_2$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_1 L_2$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad (\text{با فرض } L_2 \neq 0)$$

❖ **تذکر:** قضیه فوق وقتی x به سمت $-\infty$ میل می کند نیز برقرار است.

❖ **مثال:** حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{5}{x^3} \right)$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{\frac{5}{x} + 4}$$

حل:

الف) با استفاده از قسمت الف قضیه ۷ و سپس استفاده از قضیه ۶ می توان نوشت:

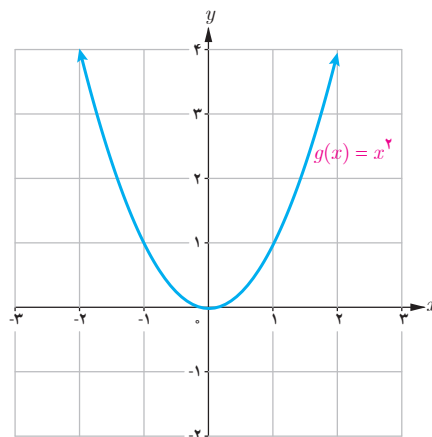
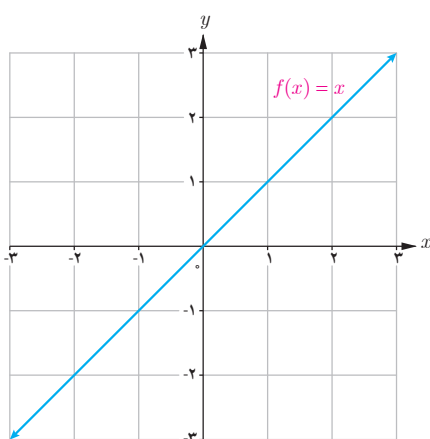
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{5}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^3} = 3 + 0 = 3$$

ب) با استفاده از قسمت (پ) قضیه ۷ و سپس استفاده از قضیه ۶ می توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{\frac{5}{x} + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} 4} = \frac{2 + 0}{0 + 4} = \frac{1}{2}$$

حدهای نامتناهی در بی نهایت

در محاسبه حد توابع وقتی x به $+\infty$ میل می کند. ممکن است، با بزرگ شدن مقادیر x مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک نشوند ولی مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه مثبت بزرگ تر شوند همان طور که در نمودار توابع $f(x) = x$ و $g(x) = x^2$ در شکل زیر دیده می شود با افزایش مقادیر x مقادیر $f(x)$ و $g(x)$ از هر عدد دلخواه مثبتی بزرگ تر می شود.



همچنین با کوچک شدن مقادیر x ، مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه منفی کوچک تر می شود. در نمودارهای بالا می توان مشاهده کرد که با کاهش مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد منفی دلخواه کوچک تر و مقادیر $g(x)$ از هر عدد دلخواهی بزرگ تر می شود. در حالت کلی برای یک تابع f که در یک بازه $(a, +\infty)$ تعریف شده است اگر با میل کردن x به سمت $+\infty$ ، نیز به سمت

$+\infty$ میل کند می گوئیم حد این تابع در $+\infty$ برابر $+\infty$ است و می نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

برای مثال $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

همچنین اگر با میل کردن x به سمت $+\infty$ ، $f(x)$ به سمت $-\infty$ میل کند می گوئیم حد این تابع در $+\infty$ برابر $-\infty$ است و می نویسیم

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ به عنوان مثال $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$

۱ مفاهیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ را بیان کنید.

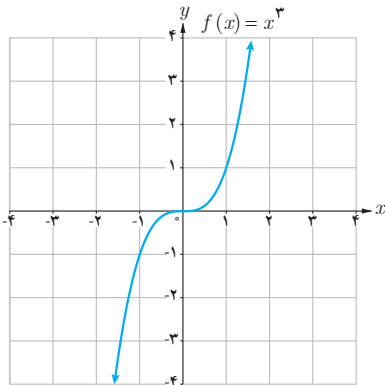
۲ با توجه به نمودار توابع $y = x^2$ و $y = x$ حدود زیر را مشخص کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 =$$

فعالیت

تابع $f(x) = x^3$ را با نمودار روبه‌رو در نظر بگیرید.



۱ جدول زیر را کامل کنید.

x	$\dots \leftarrow$	-10^6	-1000	-100	-1	1	10	100	1000	10^6	$\rightarrow \dots$
$f(x)$	$\dots \leftarrow$	\dots	\dots	-10^6	\dots	1	1000	\dots	\dots	\dots	$\rightarrow \dots$

۲ با افزایش (کاهش) x ، مقدار $f(x)$ چه تغییری می‌کند؟

۳ در مورد حدهای $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$ چه می‌توان گفت؟

❖ **قضیه ۸:** اگر n عددی طبیعی باشد آن گاه

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \end{array} \right\} \text{ (ب) اگر } n \text{ فرد باشد:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = +\infty \text{ (الف) اگر } n \text{ زوج باشد:}$$

❖ **قضیه ۹:** اگر l عددی حقیقی (ناصفر) و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ آن گاه

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{اگر } l \text{ مثبت باشد} \\ -\infty & \text{اگر } l \text{ منفی باشد} \end{cases}$$

❖ **تذکر:** قضیه ۹ در حالتی که $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ نیز به طریق مشابه برقرار است.

❖ **قضیه ۱۰:** اگر l عددی حقیقی (ناصفر) و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ آن گاه.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{اگر } l \text{ مثبت باشد} \\ -\infty & \text{اگر } l \text{ منفی باشد} \end{cases}$$

❖ **تذکر:** قضیه ۱۰ در حالتی که $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ نیز به طریق مشابه برقرار است.

❖ **مثال:** حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x - 1) \qquad \text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2x - 5x^4)$$

حل:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 = +\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2x - 5x^4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(\frac{3}{x^4} - \frac{2}{x^3} - 5\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^4 = -\infty$$

به طور کلی حد هر چند جمله‌ای به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ در $\pm\infty$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

۱ الف) اگر $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ و $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ دو چند جمله‌ای باشند نشان دهید.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

۲ در هر یک از حالت‌های $m > n$ و $m < n$ و $m = n$ حد قسمت قبل به چه صورت‌هایی نوشته می‌شود؟

۳ به کمک نتیجه قسمت قبل حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف)
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3 - 7x + 1}{2x^2 - x + 3}$$

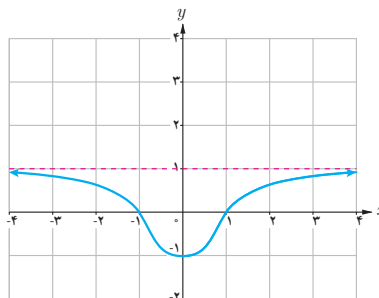
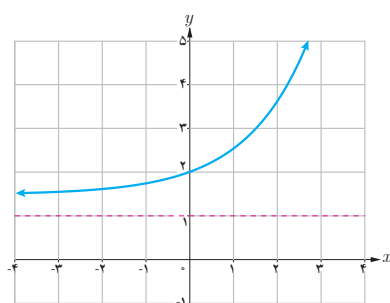
ب)
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^3 + x - 1}{6x^3 - 2x + 1}$$

پ)
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^3 + 2x - 1}$$

مجانب افقی

خط $y = L$ را مجانب افقی نمودار $y = f(x)$ می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ برقرار باشد

به عنوان مثال در هر یک از شکل‌های زیر خط $y = 1$ مجانب افقی نمودارها است. چرا؟



❁ **مثال:** مجانب‌های افقی و قائم تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ را به دست آورید.

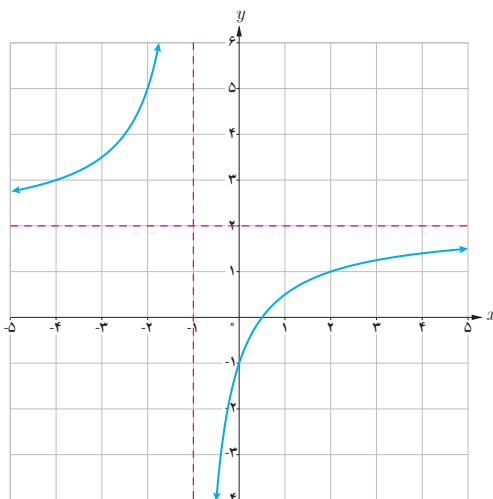
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$$

حل: برای یافتن مجانب افقی کافی است حد تابع را در $\pm\infty$ حساب کنیم:

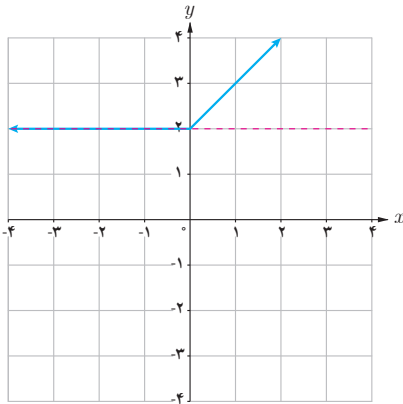
پس خط $y = 2$ مجانب افقی تابع است.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-1}{x+1} = -\infty$$

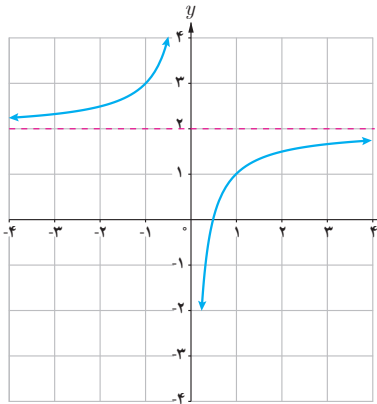
این تابع دارای مجانب قائم نیز می‌باشد و خط $x = -1$ مجانب قائم تابع است زیرا:
نمودار تابع به صورت زیر است.



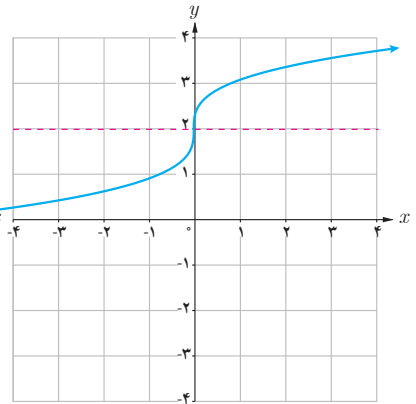
۱ در کدام یک از توابع زیر، خط $y=2$ مجانب افقی تابع است؟



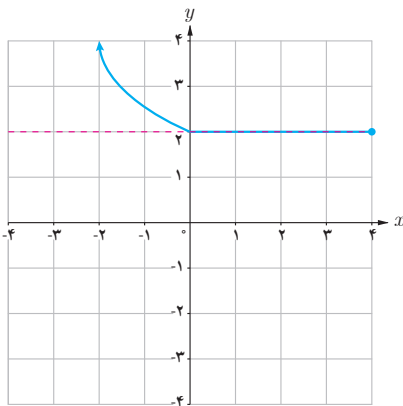
ب



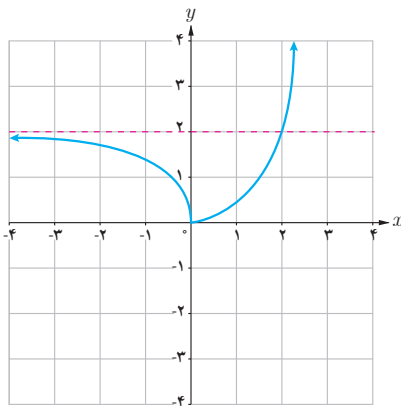
ب



الف



ث



ث

۲ مجانب‌های افقی و قائم‌تایی تابع‌های زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$

ب) $g(x) = x^x$

پ) $h(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$

۱ مفهوم هر یک از گزاره‌های زیر را بیان کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$

۲ برای تابع f که نمودار آن داده شده است موارد زیر را به دست آورید :

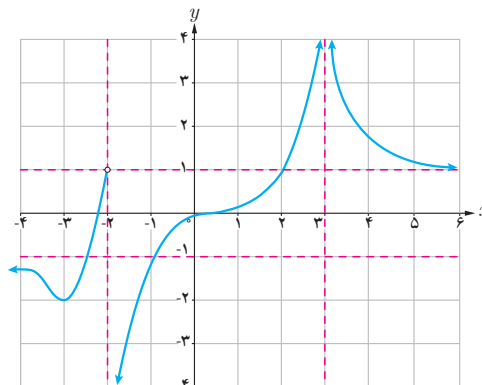
الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$

ث) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$



مجانب‌های افقی و قائم (ج)

۳ حاصل حدود زیر را به دست آورید :

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{x-2}$

ب) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^2+1}{t^3-2t^2+1}$

پ) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2+2x}{4x+1}$

ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2)$

۴ مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید :

الف) $y = \frac{2x-1}{x-3}$

ب) $y = \frac{x}{x^2-4}$

پ) $y = \frac{1+2x^2}{1-x^2}$

ت) $y = \frac{2x}{1+x^2}$

۵ نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد :

الف) $f(1) = f(-2) = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

پ) خط $y = -1$ مجانب افقی آن باشد.