درس ۲ بخش‌پذیری در اعداد صحیح[1]

قرار دادن تعدادی شیء در دسته‌های مساوی یا دسته‌بندی کردن تعدادی از چیزها را، بدون آنکه باقی‌مانده‌ای داشته باشیم، «عاد کردن» یا شمارش آن اشیا، توسط شمارنده‌ها می‌گویند. مثلاً، ۱۲ شیء را می‌توان با شمارنده‌های مثبتِ عدد ۱۲ یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ و ۱۲ دسته‌بندی یا شمارش کرد.

در این فصل برای نمایش این مفهوم از نماد «|» استفاده کرده و مثلاً می‌نویسیم ۱۲|۲ و می‌خوانیم عدد ۲ عدد ۱۲ را می‌شمارد یا عاد می‌کند. بیان دیگر این مفهوم آن است که بگوییم عدد ۱۲ بر عدد ۲ بخش‌پذیر است (باقی ماندهٔ تقسیم صفر است).

توجه داشته باشید که دسته‌بندی کردن اشیا در دسته‌های صفرتایی یا شمارش تعدادی شیء خاص به‌صورت صفر تا صفر تا کار بی‌معنایی است؛ لذا صفر هیچ عدد غیر صفری را نمی‌شمارد و هیچ عدد غیر صفری بر صفر بخش‌پذیر نمی‌باشد در ضمن توجه داشته باشید که هر عدد بر خودش و بر ۱ بخش‌پذیر است؛ یعنی اگر a عددی طبیعی باشد $1|a$ و $a|a$. (عدد ۱ هر عدد صحیح را عاد می‌کند و هر عدد برخودش بخش‌پذیر است).

حال با توجه به اینکه مفهوم بخش‌پذیری b بر a معادل است با اینکه بنویسیم $a|b$ (عدد a، عدد b را می‌شمارد یا عدد a، عدد b را عاد می‌کند) مفهوم بخش‌پذیری را می‌توان برای هر دو عدد صحیح به‌کار برد، مثلاً می‌توان گفت، عدد ۲۸- بر ۴ بخش‌پذیر است (زیرا، $(-7)\times 4=-28$ یا باقی‌مانده تقسیم ۲۸- بر عدد ۴ صفر است) پس در حالت کلّی و با تعمیم مفهوم عاد کردن به مجموعهٔ اعداد صحیح عاد کردن به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

> عدد صحیح a، که مخالف صفر است[2]، شمارندهٔ عدد b است ــ یا a، b را می‌شمارد یا $a|b$ یا b بر a بخش‌پذیر است ــ هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد به‌طوری که $b=aq$.
>
> اگر عدد b بر عدد a بخش‌پذیر نباشد یا عدد a عدد b را عاد نکند می‌نویسیم، $a \nmid b$

۱ــ در سراسر این فصل منظور از عدد، عدد صحیح است.
۲ــ اینکه صفر عدد صفر را می‌شمارد به‌صورت یک قرارداد پذیرفته می‌شود.

کار در کلاس

۱ با توجه به تعریف رابطهٔ عاد کردن جاهای خالی را پر کنید.

الف) $۷|۶۳ \Leftrightarrow ۶۳= \cdots \times \cdots$

ب) $\cdots|۹۱ \Leftrightarrow ۹۱=۷\times \cdots$

پ) $-۶|۵۴ \Leftrightarrow \cdots = \cdots \times (-۶)$

ت) $۵|-۳۵ \Leftrightarrow \cdots = ۵ \times \cdots$

ث) $\cdots|۱۸ \Leftrightarrow ۰=۱۸\times \cdots$

ج) $a|۱ \Rightarrow a=\cdots$ یا $a=\cdots$

چ) $۲۶=۲\times ۱۳ \Rightarrow ۲|\cdots$ و $\cdots|۲۶$

۲ با استفاده از تعریف عاد کردن و قوانین ضرب و تقسیمِ اعداد توان‌دار با پایه‌های برابر، ابتدا نشان دهید که $۳^۵|۳^۹$ و سپس ثابت کنید:

$$\forall m,n \in \mathbb{N}; m \le n \Rightarrow a^m \mid a^n$$

$$(۳^۹ = ۳^۵ \times ۳^۴ \overset{(۳^۴=q)}{\Rightarrow} ۳^۵ \mid \cdots)$$

ویژگی‌های رابطهٔ عاد کردن

ویژگی ۱ : اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیحِ عدد b را نیز می‌شمارد؛ یعنی :

$$\boxed{a|b \Rightarrow a|mb}$$

مثال: $۳|۶ \Rightarrow ۳|۶\times ۵\ ,\ ۳|۶\times ۴\ ,\ ۳|۶\times(-۷)\ ,\ \cdots$

نتیجه : اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه $b^۲$ را می‌شمارد و در حالت کلّی b^n را می‌شمارد که $n\in\mathbb{N}$ است. یعنی :

الف) $a \mid b \Rightarrow a \mid b^۲$

ب) $a \mid b \Rightarrow a \mid b^n$

برای اثبات (الف) کافی است از ویژگی ۱ استفاده کرده و m را مساوی با b فرض کنیم؛ و برای اثبات (ب) نیز کافی است $m=b^{n-۱}$ فرض شود.

سؤال : آیا از اینکه $a|bc$ می‌توان نتیجه گرفت که a حداقل یکی از دو عدد b و c را عاد می‌کند؟ به گزاره‌های زیر دقت کنید و پس از آن پاسخ دهید :

الف) $۳|۶\times۹$ و $۳|۶$ و $۳|۹$

ب) $۳|۶\times۵$ و $۳|۶$ و $۳\nmid۵$

ج) $۶|۳\times۴$ و $۶\nmid۳$ و $۶\nmid۴$

سؤال : آیا از اینکه $a|b$ می‌توان نتیجه گرفت که $ka|kb$؟ آیا از $ka|kb$ می‌توان نتیجه گرفت $a|b$؟ $(k\in\mathbb{Z})$

$$a|b \Rightarrow b=\cdots \overset{\text{در } k \text{ ضرب}}{\Rightarrow} kb=\cdots \Rightarrow \cdots$$

$$ka|kb \Rightarrow kb=\cdots \overset{\text{بر } k \text{ تقسیم}}{\Rightarrow} b=\cdots \Rightarrow \cdots$$

ویژگی ۲ : اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b نیز عدد c را بشمارد آنگاه عدد a عدد c را می‌شمارد.

$$\boxed{a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c}$$

اثبات:
$$\begin{cases} a\,|\,b \Rightarrow b = aq_۱ \quad (۱) \\ b\,|\,c \Rightarrow c = bq_۲ \end{cases}$$

$$c = bq_۲ \overset{(۱)}{\Rightarrow} c = \cdots q_۲ \overset{q_۱q_۲=q}{\Rightarrow} c = a\cdots \Rightarrow a\,|\,c$$

این خاصیّت را «خاصیت تعدّی» برای رابطهٔ عاد کردن می‌نامیم.

سؤال : با استفاده از خاصیت تعدّی برای رابطهٔ عاد کردن، نشان دهید که :

$$a|b \Rightarrow a|b^n$$

اثبات:
$$\left.\begin{matrix} \text{طبق فرض: } a\,|\,b \\ \text{و می‌دانیم: } b\,|\,b^n \end{matrix}\right\} \overset{\text{تعدی}}{\Rightarrow} \cdots|\cdots$$

ویژگی ۳ : هرگاه عددی دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$$\boxed{a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c}$$

اثبات:
$$\left.\begin{matrix} a\,|\,b \Rightarrow b = \cdots \times q_۱ \\ a\,|\,c \Rightarrow \cdots = aq_۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow b \pm c = \cdots \underbrace{(q_۱ \pm q_۲)}_{q} \Rightarrow a\,|\cdots$$

سؤال : آیا از اینکه $a|b+c$ همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a|c$ یا $a|b$؟

ویژگی ۴ : اگر $a|b$ و $b \neq ۰$ در این صورت $|a| \leq |b|$.

اثبات : چون $a|b$ پس $b = aq$ و چون $b \neq ۰$ پس $q \neq ۰$ و چون $q \in \mathbb{Z}$ لذا $|q| \geq ۱$. حال اگر طرفین نامساوی اخیر را در $|a|$ ضرب کنیم خواهیم داشت :

$$۱ \leq |q| \Rightarrow |a| \times ۱ \leq |a|\,|q| \Rightarrow |a| \leq |aq| \Rightarrow |a| \leq \cdots$$

نتیجه : اگر $a|b$ و $b|a$ آنگاه $a = \pm b$.

اثبات:
$$\left.\begin{matrix} a\,|\,b \overset{(۴)}{\Rightarrow} |\,a\,| \leq \cdots \\ b\,|\,a \overset{(۴)}{\Rightarrow} \cdots \leq |\,a\,| \end{matrix}\right\} \Rightarrow |\,a\,| = |\,b\,| \Rightarrow a = \pm b$$

کار در کلاس

۱ اگر $a \neq ۰$ عددی صحیح و دو عدد $(۷m+۶)$ و $(۶m+۵)$ بر a بخش‌پذیر باشند ثابت کنید $a = \pm ۱$.

$$\left.\begin{matrix} a\,|\,۷m+۶ \Rightarrow a\,|\,۴۲m + \cdots \\ a\,|\,۶m+۵ \Rightarrow \cdots|\,۴۲m + \cdots \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\,|(۴۲m+۳۶)-(۴۲m+۳۵)$$

$$\Rightarrow a|۱ \Rightarrow a = \pm ۱ \ (\text{چرا؟})$$

۲ اگر $a|b$ نشان دهید که $a^n|b^n$.

اثبات: $a\,|\,b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b^n = \cdots \overset{q^n=q'}{\Rightarrow} b^n = \cdots q' \Rightarrow a^n\,|\,b^n$

۳ اگر $a|b$ و $c|d$ نشان دهید که $ac|bd$.

$$\left.\begin{array}{l} a\,|\,b \Rightarrow b = aq_۱ \\ c\,|\,d \Rightarrow \cdots = \cdots \end{array}\right\} \Rightarrow b\times d = (a\times c)\underbrace{(q_۱\, q_۲)}_{q}$$

$$\Rightarrow \cdots = a\times c\times q \Rightarrow \cdots\,|bd$$

۴ اگر $a|b$ و $a|c$ نشان دهید که $a|mb \pm nc$.

(از ویژگی ۱ و ویژگی ۳ استفاده کنید).

شما در سال‌های قبل با تعریف و مفهوم اعداد اول آشنا شده‌اید و می‌دانید که هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارندهٔ مثبتی به‌جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود. مجموعهٔ اعداد اول، که ثابت شده است مجموعه‌ای نامتناهی است، به‌صورت $P = \{۲,۳,۵,۷,۱۱,\ldots\}$ نمایش داده می‌شود.

تذکر : با توجه به تعریف عدد اول، اگر p عددی اول باشد و a عددی طبیعی و $a|p$ در این‌صورت $a=۱$ یا $a=p$.

مثال : اگر عدد طبیعی a دو عدد $(۹k+۷)$ و $(۷k+۶)$ را عاد کند، ثابت کنید $a=۱$ یا $a=۵$.

$a\,|۹k+۷ \Rightarrow a\,|۷\times(۹k+۷)$

$\Rightarrow a|۶۳k+\cdots$

$a\,|۷k+۶$

$\Rightarrow a\,|۹\times(۷k+۶) \Rightarrow a|\cdots+۵۴$

$\Rightarrow a\,|\,(\cdots+۵۴)-(۶۳k+\cdots)$

$\Rightarrow a|۵ \Rightarrow a=\cdots$ یا $a=\cdots$

خواندنی

می‌دانیم که هر عدد طبیعی و کوچک‌تر یا مساوی ۱۰ عدد !۱۰ را عاد می‌کند (چرا؟) و به‌طور کلّی می‌توان نوشت : $\forall k\le n$ ، $k|n!$؛ بنابراین عدد ۲+!۱۰۰ و همین‌طور عدد ۳+!۱۰۰ و ... و بالاخره عدد ۱۰۰+!۱۰۰ همه اعدادی غیراول هستند. بنابراین با توجه به اینکه اعداد (۲+!۱۰۰) و (۳+!۱۰۰) و ... (۱۰۰+!۱۰۰)، تعداد ۹۹ عدد طبیعی و متوالی‌اند ما توانسته‌ایم ۹۹ عدد طبیعی متوالی بیابیم که هیچ‌کدام اول نباشند.

(برای اینکه نشان دهیم عدد ۷+!۱۰۰ بر ۷ بخش‌پذیر است، کافی است از عدد ۷ در دو عدد !۱۰۰ و ۷، فاکتور بگیریم یا با استفاده از خواص عاد کردن بنویسیم : ۷|!۱۰۰ و ۷|۷ $\Rightarrow$ ۷|۷+!۱۰۰)

بزرگ‌ترین مقسومٌ‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد

می‌خواهیم با توجه به تعریف رابطهٔ عاد کردن، مفاهیم ب م م (بزرگ‌ترین مقسومٌ‌علیه مشترک) و ک م م (کوچک‌ترین مضرب مشترک) دو عدد را معرفی کنیم.

توجه دارید که مقسوم‌علیه همان شمارنده است. به عبارت دیگر، اگر بنویسیم $a|b$، یعنی a شمارندهٔ b است یا b بر a بخش‌پذیر است و این یعنی a مقسوم‌علیه b است؛ و نیز توجه دارید که b مضرب a است، یعنی $b=aq$ یا $a|b$.

تعریف : عدد طبیعی d را ب م م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a,b)=d$، هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشد.

الف) $d|a, d|b$

ب) $\forall m>\circ ; m|a, m|b \Rightarrow m \le d$

شرط (الف) مقسومٌ‌علیه مشترک بودن را برای d تأمین می‌کند و شرط (ب) نشان می‌دهد که d از هر مقسوم‌علیه مشترک دلخواهی چون m بزرگ‌تر است.

اگر داشته باشیم $(a,b)=۱$ در این صورت می‌گوییم، a و b نسبت به هم اول‌اند.

مثال : $(۱,۱۲)=۱ \quad , \quad (۷,۱۱)=۱ \quad , \quad (۴,۹)=۱ \quad , \quad (۳,۴)=۱$

$(۴,-۶)=۲ \quad , \quad (\circ,۶)=۶ \quad , \quad (۸,۱۶)=۸ \quad , \quad (۶,۹)=۳$

تعریف : عدد طبیعی c را ک م م دو عدد صحیح و ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a,b]=c$، هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشد.

الف) $a|c \ , \ b|c$

ب) $\forall m>\circ \ , \ a|m \ , b|m \Rightarrow c \le m$

توضیح دهید که هریک از شرط‌های (الف) و (ب) کدام ویژگی را تأمین می‌کنند؟

مثال : $[-۴,۱۶]=۱۶ \quad , \quad [۱,۸]=۸ \quad , \quad [۶,۴]=۱۲ \quad , \quad [۳,۴]=۱۲$

کار در کلاس

۱ با توجه به تعاریف ب م م و ک م م ثابت کنید :

الف) $a|b \Rightarrow (a,b)=|a|$

ب) $a|b \Rightarrow [a,b]=|b|$

راهنمایی : برای اثبات (الف) باید دو شرط موجود در تعریف ب م م را برای $|a|$ بررسی کنیم، یعنی نشان دهیم که $|a|\,|a|$ و . . . و نیز برای هر $m>\circ$ که $m|a$ و $m|b$ نشان دهیم . . . $\le m$ و همین‌طور برای اثبات (ب) . . .

۲ اگر p عددی اول باشد و $a\in\mathbb{Z}$ و $p\nmid a$ ، ثابت کنید، $(p,a)=۱$

فرض کنیم $(p,a)=d$
$d\,|\,p \xRightarrow{p\ \text{اول}} d=۱$ یا ...
$d\,|\,a$ ①

اگر $d=p \xRightarrow{①} p\,|\cdots$ (و این با فرض $p\nmid a$ تناقض دارد)

پس فقط $d=\cdots$ یا $(p,a)=\cdots$.

تذکر : توجه دارید که در مورد اعدادی که اول نباشند، مطلبِ کار در کلاس ۲ ممکن است برقرار نباشد :

مثال: $۴\nmid ۶$ ولی $(۴,۶)=۲\neq ۱$

قضیه تقسیم و کاربردها

ممکن است در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده صفر نباشد، یعنی a بر b بخش‌پذیر نباشد $(b\nmid a)$. در این‌صورت قضیهٔ تقسیم که به بیان آن خواهیم پرداخت (این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم) کمک می‌کند تا بحث بخش‌پذیری در $\mathbb{Z}$ را کامل کنیم.

قضیه تقسیم : اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این‌صورت، اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به قسمی که $a=bq+r$ و $۰\le r<b$.

مثال : اگر ۲۵ را بر ۷ تقسیم کنیم داریم : $q=۳$ و $r=۴$، و به عبارت دیگر $۲۵=(۷\times۳)+۴$. حال اگر -۲۵ را بر ۷ تقسیم کنیم و $q=-۳$ در نظر بگیریم، در این صورت تساوی $-۲۵=۷\times(-۳)-۴$ حاصل می‌شود که نمی‌توان (-۴) را به عنوان باقی‌مانده معرفی کرد، زیرا طبق قضیه تقسیم باقی‌مانده باید نامنفی و کوچک‌تر از مقسوم‌علیه باشد در این صورت با اضافه و کم کردن مضارب مثبتی از مقسومٌ‌علیه، شرایط قضیه تقسیم را برقرار می‌کنیم :

$$-۲۵=۷\times(-۳)-۴=۷\times(-۳)-۴-۷+۷$$
$$=۷\times(-۳)-۷+۳=۷\underbrace{[(-۳)-۱]}_{q}+۳=۷q+۳\Rightarrow r=۳$$

تذکر : همان‌طور که از دورهٔ ابتدایی به‌خاطر دارید در تقسیم عدد a بر b، a را مقسوم، b را مقسومٌ‌علیه، q را خارج قسمت و r را باقی‌مانده می‌نامیم.

مثال : اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به‌ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این‌صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(۲m-۵n)$ بر ۱۷ را به‌دست آورید.

حل :

طبق فرض: $m=۱۷q_۱+۵$
طبق فرض: $n=۱۷q_۲+۳$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲m=۲\times۱۷q_۱+۱۰\\-۵n=(-۵)\times۱۷q_۲-۱۵\end{cases}$$

$$\Rightarrow(۲m-۵n)=۱۷(۲q_۱-۵q_۲)-۵$$

$$= ۱۷ (۲ q_۱ - ۵ q_۲) - ۵ - ۱۷ + ۱۷$$

$$= ۱۷(\underbrace{۲q_۱ - ۵q_۲ - ۱}_{q_۳}) + ۱۷ - ۵$$

$$\Rightarrow (۲m - ۵n) = ۱۷(\underbrace{q_۳ - ۱}_{q}) + ۱۲$$

$$= ۱۷q + ۱۲ \Rightarrow r = ۱۲$$

افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم

با توجه به قضیهٔ تقسیم، می‌دانیم که اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، با تقسیم آن بر عدد طبیعی b، و با توجه به اینکه باقی‌ماندهٔ تقسیم یعنی r در رابطهٔ $۰ \leq r < b$ صدق می‌کند، برای a برحسب r دقیقاً b حالت وجود دارد، مثلاً اگر عدد صحیح a را بر ۵ تقسیم کنیم در این صورت یا a بر ۵ بخش‌پذیر است، یعنی $r = ۰$، یا باقی‌مانده تقسیم a بر ۵ عدد ۱ است یا . . . یا باقی‌ماندهٔ تقسیم ۴ است؛ به عبارت دیگر، $a = ۵k$ یا $a = ۵k + ۱$ یا $a = \cdots$ یا $a = ۵k + ۳$ یا $a = \cdots$ پس می‌توان گفت هر عدد صحیح مانند a را می‌توان به یکی از پنج صورت فوق نوشت.

مسئله ۱ : اگر $m \in \mathbb{Z}$ نشان دهید که m را به یکی از دو صورت $۲k$ یا $۲k + ۱$ (زوج یا فرد) می‌توان نوشت.

حل : کافی است m را بر ۲ تقسیم کنیم؛ در این صورت طبق قضیهٔ تقسیم خواهیم داشت :

$$m = ۲k + r \ , \ ۰ \leq r < ۲ \Rightarrow m = \cdots \text{ یا } m = \cdots$$

مسئله ۲ : ثابت کنید اگر $p > ۳$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = ۶k + ۱$ یا $p = ۶k + ۵$ نوشته می‌شود.

حل : کافی است p را بر ۶ تقسیم کنیم، در این صورت طبق قضیهٔ تقسیم خواهیم داشت :

$p = ۶k$ (۱)

$p = ۶k + ۱$ (۲)

$p = ۶k + ۲$ (۳)

$p = ۶k + ۳$ (۴)

$p = ۶k + ۴$ (۵)

$p = ۶k + ۵$ (۶)

p در حالت (۱)، (۳) و (۵) زوج است و لذا با اول بودنِ آن تناقض دارد. در حالت (۴) و با فاکتورگیری از ۳ داریم :

$p = ۳(۲k + ۱)$

یا $p = ۳k'$ یا $۳|p$ که با اول بودن p در تناقض است و لذا فقط حالت‌های (۲) و (۶) باقی می‌ماند و حکم اثبات می‌شود.

(توجه دارید که عکس مطلب فوق در حالت کلّی برقرار نیست؛ مثلاً $(۶ \times ۴ + ۱ = ۲۵)$ ولی ۲۵ اول نیست.)

مسئله۳ : ابتدا ثابت کنید که هر عدد صحیح و فرد مانند a به یکی از دو صورت $۴k + ۱$ یا $۴k + ۳$ نوشته می‌شود، سپس نشان دهید که مربع هر عدد فرد به شکل $(۸t + ۱)$ نوشته می‌شود (باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، مساوی با ۱ است.)

حل : فرض کنیم $a\in\mathbb{Z}$ و a فرد باشد، اگر a را بر ۴ تقسیم کنیم خواهیم داشت :

$a=۴k$ (۱)

$a=۴k+۱$ (۲)

$a=۴k+۲$ (۳)

$a=۴k+۳$ (۴)

(چهار مجموعهٔ $A_۱=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,a=۴k\}$ و $A_۲=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,a=۴k+۱\}$ و $A_۳=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,a=۴k+۲\}$ و $A_۴=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,a=۴k+۳\}$ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را افراز می‌کنند.)

حالت‌های ... و ... زوج بوده و لذا $a=۴k+۱$ یا $a=۴k+۳$

اگر $a=۴k+۱ \Rightarrow a^۲=۱۶k^۲+۸k+۱=۸\,(\underbrace{۲k^۲+k}_{k'})+۱=۸k'+۱$

اگر $a=۴k+۳ \Rightarrow a^۲=۱۶k^۲+۲۴k+۹=۱۶k^۲+۲۴k+۸+۱$

$\Rightarrow a^۲=۸(\underbrace{۲k^۲+۳k+۱}_{t})+۱=۸t+۱$

تمرین

۱ فرض می‌کنیم $ab=cd$ (a , b , c و d اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت پنج رابطهٔ عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

۲ ثابت کنید : اگر $a|b$ آنگاه $a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$.

۳ اگر $a>۱$ و $a|۹k+۴$ و $a|۵k+۳$، ثابت کنید a عددی اول است.

۴ اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به‌طوری که $۵|۴k+۱$، ثابت کنید : $۲۵|۱۶k^۲+۲۸k+۶$

۵ آیا از اینکه $a|b$ و $c|d$، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a+c|b+d$؟

۶ ثابت کنید : الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند. ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند.

(**راهنمایی :** فرض کنید $d=(m\,,\,m+۱)$ و ثابت کنید $d|۱$ و نتیجه بگیرید $d=۱$).

۷ اگر $p\neq q$ و p و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p,q)=۱$.

۸ اگر $m,n\in\mathbb{N}$ و $a,b\in\mathbb{Z}$ ثابت کنید :

$m\leq n\,,\,a|b \Rightarrow a^m|b^n$

۹ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به‌ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

۱۰ اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+۲$ در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(a^۲+b^۲+۳)$ بر ۸ را بیابید.

۱۱ اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $۳|n^۳-n$

(**راهنمایی :** برای n سه حالت $n=۳k$ و $n=۳k+۱$ و ... در نظر بگیرید و در هر حالت ثابت کنید $۳|n^۳-n$).

۱۲ اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسومٌ‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

۱۳ اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+۲$ یا $a+۴$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۱۴ ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

۱۵ ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر !۳ بخش‌پذیر است.

۱۶ حاصل هر یک را به دست آورید : $(m\in\mathbb{Z})$

الف) $\left([m^{۲},m]\,,\,m^{۵}\right)$

ب) $(۲m\,,\,۶m^{۳})$

پ) $(۳m+۱\,,\,۳m+۲)$

ت) $\left[m^{۷},(m^{۲},m^{۳})\right]$

ث) $[(۷۲,۴۸),۱۲۰]$

درس ۳ هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها

فعالیت

در درس قبل دیدیم که باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲ و ۳. حال اگر هر کدام از این باقی‌مانده‌ها را نمایندهٔ یک مجموعه از اعداد درنظر بگیریم که باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عضو آن مجموعه بر عدد ۴، به‌ترتیب ۰، ۱، ۲ و ۳ باشد، داریم :

(مجموعهٔ اعدادی را که باقی‌ماندهٔ تقسیم آنها بر عدد m، مساوی با عدد r باشد با نماد $[r]_m$ نشان می‌دهیم)

$$A_۰=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=۴k\}=\{\cdots,-۸,-۴,۰,۴,۸,\cdots,۱۶,\cdots\}=[۰]_۴$$
$$A_۱=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=۴k+۱\}=\{\cdots,-۷,-۳,۱,۵,\cdots,۱۳,\cdots,۲۱,\cdots\}=[۱]_۴$$
$$A_۲=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=۴k+۲\}=\{\cdots,-۶,\cdots,۲,۶,۱۰,\cdots\}=[۲]_۴$$
$$A_۳=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=۴k+۳\}=\{\cdots,-۱۳,\cdots,-۵,-۱,۳,۷,۱۱,\cdots\}=[۳]_۴$$

۱ دو عضو دلخواه از مجموعهٔ $A_۰$ را درنظر بگیرید. آیا تفاضل این دو عدد مضرب ۴ است؟

۲ از مجموعهٔ $A_۱$ دو عضو دلخواه را درنظر بگیرید و تفاضل آنها را حساب کنید. آیا عدد حاصل مضرب ۴ است؟

۳ نتیجه‌ای را که از ۱ و ۲ گرفتید در حالت کلّی برای هر دو عضو دلخواه از $A_۱$ اثبات کنید.

فرض کنید $a,b\in A_۱ \Rightarrow \begin{cases} a=۴k_۱+۱ \\ b=\cdots \end{cases} \Rightarrow a-b=(\cdots\cdots\cdots)-(۴k_۲+۱)$

$$\Rightarrow a-b=۴\underbrace{(k_۱-k_۲)}_{k_۳}\Rightarrow ۴|\cdots-\cdots$$

۴ آیا درست است که بگوییم اعضای مجموعهٔ $A_۲$ همگی در تقسیم بر عدد ۴، باقی‌ماندهٔ یکسان دارند؟ در مورد مجموعهٔ $A_۳$ چه می‌توان گفت؟

می‌دانیم مجموعه‌های $A_۰$ ، $A_۱$ ، $A_۲$ و $A_۳$ یک افراز برای مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ هستند و بنابراین هر دو عدد صحیح، مانند a و b، یا هر دو به یکی از این چهار مجموعه تعلق دارند و یا هر کدام در یک مجموعه

واقع‌اند (A_0 ، A_1 ، A_2 و A_3 اشتراکی با هم ندارند. چرا؟) و لذا اگر a و b هر دو در یک مجموعه از این چهار مجموعه باشند (باقی‌ماندهٔ تقسیم a و b بر ۴ مساوی باشد یا اصطلاحاً a و b بر ۴ هم باقی‌مانده باشند) همواره $4 \mid a-b$ و اگر این‌طور نباشد $4 \nmid a-b$.

تعریف : برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b، اگر $m|a-b$، می‌گوییم «a هم‌نهشت با b است به‌سنج یا پیمانهٔ m»؛ و می‌نویسیم $a \overset{m}{\equiv} b$. تعریف رابطهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m، به زبان ریاضی عبارت است از :

$$\forall a,b \in \mathbb{Z} \, , \, a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m \mid a-b \; (m \in \mathbb{N})$$

مثال:
$$\begin{cases} ۱۲ \overset{۵}{\equiv} ۲ \, , \, -۱۱ \overset{۶}{\equiv} ۱ \\ -۲۹۵ \overset{۱۰}{\equiv} -۵ \, , \, ۲۳ \overset{۳}{\equiv} -۷ \end{cases}$$

قرارداد : مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح که باقی‌ماندهٔ تقسیم آنها بر عدد طبیعی m برابر با r می‌باشد، یعنی $A_r = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r\}$ را کلاس یا دستهٔ هم‌نهشتی r به پیمانهٔ m می‌نامیم و با نماد $[r]_m$ نمایش می‌دهیم.

برای استفاده از رابطهٔ هم‌نهشتی، ابتدا خواص و ویژگی‌های این رابطه را بررسی می‌کنیم که با توجه به تعریف این رابطه و خواص رابطهٔ عاد کردن، ویژگی‌های رابطهٔ هم‌نهشتی به‌راحتی اثبات می‌شوند. شما در کامل کردن اثبات‌ها شرکت کنید.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+c \overset{m}{\equiv} b+c \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-c \end{cases}$$

ویژگی ۱ : به دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی می‌توان عددی صحیح را اضافه یا از آن کم کرد.

اثبات :
$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid a+c-b-c$$
$$\Rightarrow m \mid (a+c)-(\cdots+\cdots) \Rightarrow (\cdots+\cdots) \overset{m}{\equiv} (b+c)$$

مثال : با توجه به فعالیت قبل فرض کنیم، $۷ \overset{۴}{\equiv} -۱$ ($[۷], [(-۱)] \in A_3$ یا $۴ \mid ۷-(-۱)$) در این صورت اگر ۵ واحد به دو طرف این هم‌نهشتی اضافه کنیم فاصلهٔ این دو عدد یا تفاضل آنها همچنان حفظ شده و همان ۸ که مضرب ۴ است باقی می‌ماند. به عبارت دیگر، اعدادحاصل یعنی ۱۲ = ۵ + ۷ و ۴ = ۵ + ۱− نیز در A_3 قرار خواهند گرفت.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

ویژگی ۲ : دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد.

اثبات :
$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid \cdots-\cdots \Rightarrow m \mid \cdots \times (a-b) \Rightarrow m \mid ac-\cdots$$
$$\Rightarrow \cdots \overset{m}{\equiv} bc$$

تذکر : عکس ویژگی ۲ برقرار نیست، یعنی اگر $ac\overset{m}{\equiv}bc$ ، لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که $a\overset{m}{\equiv}b$ (قانون حذف برای رابطهٔ هم‌نهشتی در حالت کلّی برقرار نیست) برای این مطلب یک مثال نقض بزنید.

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow a^n\overset{m}{\equiv}b^n$$

ویژگی ۳ : (دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند.) $(n\in\mathbb{N})$

مثال : $(5\overset{3}{\equiv}2\Rightarrow 5^3\overset{3}{\equiv}2^3)$

اثبات : (از اتحاد $(a^n-b^n)=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1})$ استفاده می‌کنیم)

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow m\,|\,a-b\ \Rightarrow\ m\,|\,(a-b)\underbrace{(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1})}_{c}(\ \equiv\ \Rightarrow\ \equiv\ )$$

$$\Rightarrow m\,|\,a^n-b^n\Rightarrow \dots\overset{m}{\equiv}\dots$$

تذکر : می‌دانیم $3^2\overset{4}{\equiv}5^2$ ولی $3\overset{4}{\not\equiv}5$ بنابراین نتیجه می‌گیریم که . . .

$$a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ c\overset{m}{\equiv}d\Rightarrow\begin{cases}ac\overset{m}{\equiv}bd & (1)\\ a+c\overset{m}{\equiv}b+d & (2)\\ a-c\overset{m}{\equiv}b-d & (3)\end{cases}$$

ویژگی ۴ : دو طرف دو رابطهٔ هم‌نهشتی را که پیمانه‌های یکسان داشته باشند می‌توان با هم جمع یا از هم منها و یا در هم ضرب کرد.

$$(15\overset{5}{\equiv}10\ ,\ 7\overset{5}{\equiv}2\Rightarrow 15\times7\overset{5}{\equiv}10\times2\ \text{و}\ 15\times2\overset{5}{\equiv}10\times7)$$

$$\text{و}\ 15+7\overset{5}{\equiv}10+2\Rightarrow 22\overset{5}{\equiv}12$$

اثبات (۱):

$$\left.\begin{aligned}a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow m\,|\dots-\dots\overset{\times c}{\Rightarrow}m\,|\,ac-bc\\ c\overset{m}{\equiv}d\Rightarrow m\,|\dots-\dots\overset{\times b}{\Rightarrow}m\,|\,bc-\dots\end{aligned}\right\}\overset{+}{\Rightarrow}m\,|\,(ac-bc)+(\dots-bd)$$

$$\Rightarrow m\,|\,ac-\dots\Rightarrow\dots\overset{m}{\equiv}bd$$

اثبات (۲) به عهدهٔ شما

ویژگی ۵ : $a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ b\overset{m}{\equiv}c\Rightarrow a\overset{m}{\equiv}c$

اثبات :

$$\left.\begin{aligned}a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow m\,|\,a-b\\ b\overset{m}{\equiv}c\Rightarrow m\,|\,b-c\end{aligned}\right\}\Rightarrow m\,|\,(a-b)+(b-c)$$

$$\Rightarrow m\,|\,a-c\Rightarrow a\overset{m}{\equiv}c$$

تذکر مهم : اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر m مساوی با r باشد در این صورت $a \overset{m}{\equiv} r$

$$a = mq + r \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} r$$

$$(۱۷۹ = ۱۱ \times ۱۶ + ۳ \Rightarrow ۱۷۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۳)$$

اثبات :

$$a = mq + r \Rightarrow a - r = mq \Rightarrow m \mid a - r \Rightarrow \cdots \overset{m}{\equiv} \cdots$$

نتیجه ۱ : هرگاه بخواهیم کوچک‌ترین عدد نامنفی و هم‌نهشت با عدد a به پیمانهٔ m را مشخص کنیم، کافی است عدد a را بر m تقسیم کرده و باقی‌مانده را به‌دست آوریم.

مثال: $۲۹۶ \overset{۱۱}{\equiv} ? \rightarrow \cdots$

نتیجه ۲ : اگر دو عدد a و b تقسیم بر عدد طبیعی m، هم باقی‌مانده باشند در این صورت $a \overset{m}{\equiv} b$.

مثال : باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=(۲۷)^{۷}+۱۹$ را بر ۱۳ بیابید.

$$۲۷ = ۱۳ \times ۲ + ۱ \Rightarrow ۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow \underbrace{(۲۷)^{۷} \overset{۱۳}{\equiv} ۱^{۷} = ۱}_{۱} \quad \text{و} \quad ۱۹ = ۱۳ \times ۱ + ۶$$

$$\Rightarrow \underbrace{۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۶}_{۲} \xrightarrow{\text{با توجه به ۱ و ۲}} (۲۷)^{۷} + ۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ + ۶ \xrightarrow{\text{با توجه به ۱}} A \overset{۱۳}{\equiv} ۷ \Rightarrow r = ۷$$

پس باقی‌ماندهٔ A بر ۱۳، برابر با ۷ می‌باشد.

مثال : باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=(۱۰۰۰)^{۱۳} \times ۱۲ + ۱۰$ را بر ۷ بیابید.

$$۱۰۰۰ = ۷ \times ۱۴۲ + ۶ \Rightarrow ۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} ۶ \text{ و } ۶ \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} -۱$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳} \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۱۳} = -۱ \qquad ۱۳$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳} \times ۱۲ \overset{۷}{\equiv} (-۱) \times ۱۲ = -۱۲$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳} \times ۱۲ + ۱۰ \overset{۷}{\equiv} (-۱۲) + ۱۰ = -۲ \text{ و } -۲ \overset{۷}{\equiv} ۵$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳} \times ۱۲ + ۱۰ \overset{۷}{\equiv} ۵ \Rightarrow r = ۵$$

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a + mt \overset{m}{\equiv} b + mk \\ a - mt \overset{m}{\equiv} b - mk \end{cases}$$

ویژگی ۶ : می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

طبق فرض: $a \overset{m}{\equiv} b$

می‌دانیم: $mt \overset{m}{\equiv} mk$

$$\overset{\pm}{\Rightarrow} a \pm mt \overset{m}{\equiv} b \pm mk$$

مثال : می‌دانیم $۲ \overset{۵}{\equiv} ۷$ اگر به سمت چپ رابطه $۱۵=۵\times۳$ و به سمت راست آن $۲۵=۵\times۵$ واحد اضافه کنیم خواهیم داشت $۲ + ۲۵ \overset{۵}{\equiv} ۷ + ۱۵$ یا $۲۷ \overset{۵}{\equiv} ۲۲$ که این رابطه برقرار است.

$$ac \overset{m}{\equiv} bc\ ,\ (c,m)=d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

ویژگی ۷ : اگر بخواهیم دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانهٔ آن هم‌نهشتی را بر ب م م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم. (این ویژگی را بدون اثبات می‌پذیریم)

نتیجه مهم : اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و ۱ = (c,m) در این‌صورت $a \overset{m}{\equiv} b$ در واقع قاعدهٔ حذف در هم‌نهشتی‌ها، برای هر عدد که نسبت به پیمانه اول باشد، برقرار است.

مثال : واضح است که $۳\times۴ \overset{۳}{\equiv} ۶\times۴$ و چون ۱ = (۴,۳) پس $۳ \overset{۳}{\equiv} ۶$.

فعالیت

همان‌طور که در دورهٔ ابتدایی آموختید عددنویسی در مبنای ۱۰ انجام می‌شود که در آن ارزش مکانی ارقام، ده تا ده تا درنظر گرفته می‌شود (ده تا یکی می‌شود ده تا و ده تا ده تایی می‌شود صد تا و ده تا صد تایی می‌شود هزار تا و ...) بنابراین به راحتی می‌توانیم هر عدد را در مبنای ده بسط بدهیم. به‌عنوان مثال عدد ۱۳۹۷ را می‌توان به‌صورت زیر بسط داد :

$$۱۳۹۷ = ۱\times۱۰۰۰+۳\times۱۰۰+۹\times۱۰+۷$$
$$\Rightarrow ۱۳۹۷ = ۱\times۱۰^{۳}+۳\times۱۰^{۲}+۹\times۱۰+۷$$

۱ هر یک از دو عدد زیر را در مبنای ده بسط بدهید :

$$۱۳۸۸۱۰۹ = ۱\times۱۰^{۶}+\cdots$$
$$۱۳۵۷۱۱۲۲ =$$

۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد A=۱۳۵۸۱۱۲ را بر عدد ۹ بیابید.

می‌دانیم $۱۰ \overset{۹}{\equiv} ۱$ و بنابر ویژگی‌های رابطهٔ هم‌نهشتی $۱۰^{n} \overset{۹}{\equiv} ۱$ و داریم :

$$A=۱\times۱۰^{۶}+۳\times۱۰^{۵}+\cdots+\cdots+\cdots+۱\times۱۰+۲$$

$$۱۰^{۶} \overset{۹}{\equiv} ۱ \overset{\times۱}{\Rightarrow} ۱\times۱۰^{۶} \overset{۹}{\equiv} ۱$$

$$۱۰^{۵} \overset{۹}{\equiv} ۱ \overset{\times۳}{\Rightarrow} ۳\times۱۰^{۵} \overset{۹}{\equiv} ۳$$

$$۱۰^{۴} \overset{۹}{\equiv} ۱ \overset{\times۵}{\Rightarrow} \cdots \overset{۹}{\equiv} \cdots$$

$$۱۰^{۳} \overset{۹}{\equiv} ۱ \Rightarrow \cdots\times۱۰^{۳} \overset{۹}{\equiv} \cdots$$

$$۱۰^{۲} \overset{۹}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۱\times۱۰^{۲} \overset{۹}{\equiv} \cdots$$

$$۱۰ \overset{۹}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۱\times۱۰ \overset{۹}{\equiv} \cdots$$

$$۲ \overset{۹}{\equiv} ۲$$

با جمع طرفین هم‌نهشتی‌ها داریم :

$$A \overset{۹}{\equiv} ۱+۳+۵+۸+۱+۱+۲$$

اگر دقت کنید سمت راست هم‌نهشتیِ اخیر مجموعِ ارقام A است. بنابراین می‌توان گفت «باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹»

عدد n رقمی $A=\overline{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}\ldots a_2a_1a_0}$ را بسط دهید و در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۹ به‌جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار دهید، سپس همین نتیجه‌گیری را در حالت کلّی بررسی کنید.

$$A=10^{n-1}\times a_{n-1}+\cdots+\cdots+\cdots+10^2a_2+10\ a_1+10^0a_0$$
$$\Rightarrow A\overset{9}{\equiv}1\times a_{n-1}+\cdots+1\times a_1+a_0$$
$$\Rightarrow A\overset{9}{\equiv}\cdots$$

کار در کلاس

۱ با توجه به اینکه $10\overset{3}{\equiv}1$، نتیجه می‌گیریم، $\forall k\in\mathbb{N}\ ,\ 10^k\overset{3}{\equiv}1$ ، بنابراین، مشابه فعالیت قبل، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=598348$ را بر ۳ بیابید و سپس یک قاعده کلّی برای یافتن باقی‌مانده تقسیم و بخش‌پذیری اعداد n رقمی بر ۳ بیان کنید.

۲ می‌دانیم که $10\overset{11}{\equiv}-1$؛ بنابراین برای هر n زوج، $10^n\overset{11}{\equiv}1$ و برای هر n فرد، $10^n\overset{11}{\equiv}-1$. حال اگر در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۱۱ و در بسط عدد $A=4985327$ به‌جای توان‌های زوجِ عدد ۱۰، عدد یک و به‌جای توان‌های فردِ عدد ۱۰، عدد (-1) قرار دهیم باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد A را بر ۱۱ بیابید.

$$A=4\times10^6+9\times10^5+8\times10^4+\cdots+2\times10+7$$
$$\Rightarrow A\overset{11}{\equiv}4\times\cdots+\cdots\times(-1)+\cdots\times1+\cdots+2\times(-1)+7$$
$$\Rightarrow A\overset{11}{\equiv}7-2+3-5+8-9+4=6\Rightarrow r=\cdots$$

۳ می‌دانیم $10\overset{2}{\equiv}0$ و $10\overset{5}{\equiv}0$ و $10\overset{10}{\equiv}\cdots$ در این‌صورت:

$$\forall k\in\mathbb{N}\ ;\ 10^k\overset{2}{\equiv}\cdots \text{ و } 10^k\overset{5}{\equiv}\cdots \text{ و } 10^k\overset{10}{\equiv}0$$

بنابراین اگر در بسط هر عدد n رقمی مانند $A=\overline{a_{n-1}\ a_{n-2}\cdots a_2\ a_1\ a_0}$ به‌جای توان‌های عدد ۱۰ (در هم‌نهشتی‌های به پیمانهٔ ۲ و ۵ و ۱۰) صفر قرار دهیم خواهیم داشت:

$$A=10^{n-1}a_{n-1}+10^{n-2}a_{n-2}+\ldots+10^2a_2+10\ a_1+a_0$$
$$\Rightarrow A\overset{2}{\equiv}0\times a_{n-1}+\cdots+\cdots+\cdots\times a_2+\cdots+a_0$$
$$\Rightarrow A\overset{2}{\equiv}\cdots \text{ و } A\overset{5}{\equiv}\cdots \text{ و } A\overset{10}{\equiv}a_0$$

نتیجهٔ حاصل را برای یافتن باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد n رقمی بر ۲ و ۵ و ۱۰ و شرط بخش‌پذیری بر این اعداد را بیان کنید.

یکی از کاربردهای هم‌نهشتی در تقویم‌نگاری و محاسبهٔ روزهای هفته برحسب تاریخ داده شده است. به‌عنوان مثال : اگر اول مهر ماه در یک سال یکشنبه باشد، ۲۲ بهمن در همان سال چه روزی از هفته خواهد بود؟ برای پاسخ دادن به سؤالاتی شبیه این سؤال فعالیت زیر را انجام دهید.

فعالیت

می‌دانیم هر روز از روزهای هفته، مثلاً شنبه، پس از گذشت ۷ روز دوباره تکرار می‌شود. به‌عنوان مثال اگر ۱۲ فروردین در یک سال یکشنبه باشد در این‌صورت ۷+۱۲=۱۹ فروردین و ۷+۱۹=۲۶ فروردین نیز یکشنبه می‌باشد. در بحث تقویم و روزهای هفته دقت دارید که شش ماه اولِ سال همگی ۳۱ روزه و شش ماه دومِ سال غیر از اسفند (که، به‌جز سال کبیسه، ۲۹ روز است) همگی ۳۰ روزه می‌باشند.

حال فرض کنید در یک سال ۹ دی ماه[1] یکشنبه باشد، در همان سال ۲۸ دی‌ماه چند شنبه است؟

با توجه به مطالب مذکور ۱۶ دی و ۲۳ دی یکشنبه بوده و کافی است از ۲۳ دی تا ۲۸ دی ۵ روز بعد را حساب کنیم که به روز ... می‌رسیم.

حال اگر فاصلهٔ ۹ دی تا ۲۸ دی را حساب کنیم (۱۹=۹−۲۸) مشاهده می‌شود که ۱۹ روز فاصله داریم و چون $۱۹ \overset{۷}{\equiv} ۵$ لذا کافی است یکشنبه را مطابق جدول مقابل مبدأ فرض کرده و مشخص کنیم که ۵ روز بعد چه روزی از هفته است یا عدد ۵ متناظر با کدام روز است.

ی	د	س	چ	پ	ج	ش
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۱ اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد در این‌صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

۲۹ روز در مهر ماه و سه ماه آبان، آذر و دی و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن، فاصلهٔ ۱ مهر است تا ۱۲ بهمن؛ یعنی $d=۲۹+۳\times۳۰+۱۲=۱۳۱$

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

از طرفی $۱۳۱ \overset{۷}{\equiv} \cdots$ و با توجه به جدول فوق روز متناظر با عدد ... پنجشنبه است، یعنی ۱۲ بهمن در آن سال پنجشنبه است.

۲ از روی تقویم سال جاری روز هفته را برای هفتم تیر مشخص کنید و با توجه به آن و به روش فوق مشخص کنید که ۲۲ بهمن در سال جاری چه روزی از هفته خواهد بود. درستی پاسخ خود را از روی تقویم نیز بررسی کنید.

معادلهٔ هم‌نهشتی

تعریف : یک رابطه هم‌نهشتی همراه با مجهولی چون x به فرم $ax \overset{m}{\equiv} b$ را یک معادلهٔ هم‌نهشتی می‌نامیم؛ و منظور از حل معادلهٔ هم‌نهشتی پیدا کردن همهٔ جواب‌هایی چون $x_\circ \in \mathbb{Z}$ است که در این معادله صدق کنند، یعنی $ax_\circ \overset{m}{\equiv} b$. $(a,b \in \mathbb{Z})$

۱ــ ۹ دی ماه روز بصیرت نام‌گذاری شده است.

به‌عنوان مثال، معادلۀ $x \overset{۳}{\equiv} ۲$ را درنظر بگیرید. در این معادله x می‌تواند ۲ یا ۵ باشد. عدد بعدی که می‌تواند به جای x قرار بگیرد و در معادله صدق کند عدد ۸ است و اگر بخواهیم تمام جواب‌های این معادله یا جواب‌های عمومی آن را داشته باشیم کافی است از تعریف هم‌نهشتی استفاده کنیم،

$$x \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۳ \mid x-۲ \Rightarrow (x-۲) = ۳k \Rightarrow x = ۳k+۲$$

که اگر k را به‌ترتیب صفر و ۱ و ۲ قرار بدهیم همان جواب‌های $x_{\circ}=۲$ و $x_{\circ}=۵$ و $x_{\circ}=۸$ را به‌دست می‌آوریم و برای هر $k \in \mathbb{Z}$، جوابی برای معادله به‌دست می‌آید. در معادلۀ فوق ضریب x عدد یک است و اگر ضریب x عددی غیر از یک باشد برای دست‌یابی به جواب‌های عمومی معادله باید ضریب x را حذف کنیم که ویژگی‌های ۵ و ۶ و نتیجه ویژگی ۶ به ما کمک می‌کنند.

مثال : جواب‌های عمومی معادلۀ $۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۷$ را به‌دست آورید.

$$۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۷ \ ,\ ۱۷ \overset{۵}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۴x \overset{۵}{\equiv} ۲$$
$$\overset{\text{ویژگی ۵}}{\Rightarrow} ۴x \overset{۵}{\equiv} ۲ + (۲\times ۵)$$
$$\Rightarrow ۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۲ \overset{(۴,۵)=۱}{\Rightarrow} \cancel{۴}x \overset{۵}{\equiv} \cancel{۴} \times ۳$$
$$\Rightarrow x \overset{۵}{\equiv} ۳ \Rightarrow x = ۵k+۳$$
$$(۵|x-۳ \Rightarrow x-۳=۵k \Rightarrow x=۵k+۳)$$

مثال : همۀ اعداد صحیحی را بیابید که سه برابر آنها منهای ۱۳ بر ۷ بخش‌پذیر باشند.

حل : اگر آن عدد را x فرض کنیم باید $۷|۳x-۱۳$ یا $۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳$

$$۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳ \Rightarrow ۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳-۷=۶$$
$$\overset{(۳,۷)=۱}{\Rightarrow} \cancel{۳}x \overset{۷}{\equiv} \cancel{۳} \times ۲ \Rightarrow x = ۷k+۲$$

قضیه : معادلۀ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a,m)|b$. این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم.

نتیجه : اگر $(a,m)=۱$ چون برای هر b، همواره $۱|b$ پس معادلۀ $ax \overset{m}{\equiv} b$ همواره دارای جواب است.

مثال : معادلۀ $۶x \overset{۹}{\equiv} ۱۱$ دارای جواب نیست زیرا، $(۶,۹)=۳$ و $۳ \nmid ۱۱$ و معادلۀ $۴x \overset{۶}{\equiv} ۱۸$ دارای جواب است. چرا؟

این معادله را حل کنید :

$$۴x \overset{۶}{\equiv} ۱۸ \Rightarrow ۲\times ۲x \overset{۶}{\equiv} ۲\times ۹ \ ,\ (۲,۶)=۲$$
$$\overset{\text{ویژگی ۶}}{\Rightarrow} ۲x \overset{\frac{۶}{۲}}{\equiv} ۹$$
$$\Rightarrow ۲x \overset{۳}{\equiv} ۹$$
$$\Rightarrow ۲x \overset{۳}{\equiv} ۹+۳=۱۲$$
$$\Rightarrow \cancel{۲}x \overset{۳}{\equiv} \cancel{۲}\times ۶ \Rightarrow x = ۳k+۶$$

حل معادلات سیّاله و کاربردهای آن

فعالیت

۱ آیا می‌توانید یک کیسهٔ ۱۹ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۴ کیلویی وزن کنید؟ (می‌توانید از یکی از دو وزنه یا هر دو باهم استفاده کنید و از هر وزنه به تعداد کافی در اختیار داریم)

یک جواب مسئله استفاده از ۴ وزنهٔ ۴ کیلویی و یک وزنهٔ ۳ کیلویی است.

$$۴\times\cdots+۱\times۳=\cdots$$

آیا برای این مسئله می‌توانید یک جواب دیگر بیابید؟

$$۱\times\cdots+\cdots\times ۵=۱۹$$

در واقع شما به دنبال جواب‌های حسابی (صحیح و نامنفی) برای معادلهٔ $۴\times x+۳\times y=۱۹$ هستید.

(x تعداد وزنه‌های ۴ کیلویی به‌کار رفته و y تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی به‌کار رفته است)

۲ اگر در قسمت قبل بخواهیم فقط از وزنه‌های ۲ و ۴ کیلویی استفاده کنیم آیا عمل توزین امکان‌پذیر است؟

باید جواب‌هایی چون $y\in W$ و x بیابیم که $\cdots\times x+\cdots\times y=\cdots$ چون مجموع دو عدد زوج همواره ... است پس چنین x و y ای در W وجود ندارد.

تعریف : هرگاه بخواهیم جواب‌های معادلهٔ $ax+by=c$ یعنی x و y را در اعداد صحیح بیابیم و $c\in\mathbb{Z}$ و b و a در این صورت معادلهٔ مذکور $(ax+by=c)$ را یک معادلهٔ سیّاله درجهٔ اول یا خطی می‌نامیم.

تبدیل یک معادلهٔ سیّاله به معادلهٔ هم‌نهشتی

معادلهٔ سیّالهٔ $ax+by=c$ دارای دو مجهول است و به دوصورت می‌تواند به یک معادلهٔ هم‌نهشتی (با مجهول x یا y) تبدیل شود :

$$ax+by=c\Rightarrow ax-c=(-b)y\Rightarrow -b|ax-c\Rightarrow b|ax-c$$

$$\Rightarrow ax\overset{b}{\equiv}c\ (b>۰)\ \text{و}\ ax\overset{-b}{\equiv}c\ (b<۰)\ \text{یا}\ ax\overset{|b|}{\equiv}c$$

و به‌طریق مشابه می‌توان نوشت :

$$by\overset{-a}{\equiv}c\ \text{و}\ by\overset{a}{\equiv}c$$

تذکر : با توجه به قضیهٔ قبل نتیجه می‌گیریم که «شرط لازم و کافی برای آنکه معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ دارای جواب باشد آن است که، $(a,b)\mid c$

کار در کلاس

۱ با تبدیل معادلهٔ سیالهٔ $۴x+۵y=۹$ به معادلهٔ هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادلهٔ سیاله را بیابید.

$$۴x+۵y=۹ \Rightarrow ۴x \overset{\cdots}{\equiv} \cdots$$

$$\Rightarrow ۴x \overset{۵}{\equiv} ۹-\cdots \Rightarrow ۴x \overset{۵}{\equiv} ۴$$

$$\Rightarrow x \overset{۵}{\equiv} \cdots \Rightarrow \underline{x=۵k+\cdots}$$

$$\Rightarrow ۴(۵k+۱)+۵y=۹$$

$$\Rightarrow ۲۰k+۴+۵y=۹$$

$$\Rightarrow ۲۰k+۵y=۵$$

$$\Rightarrow ۴k+y=۱ \Rightarrow \underline{y=\cdots k+۱}$$

۲ در قسمت ۱ فعالیت قبل مشخص کنید به چند طریق می‌توان عمل وزن کردن را انجام داد.

کافی است جواب‌های عمومی معادلهٔ $۴x+۳y=۱۹$ را (برحسب k) بیابیم و به‌ازای هر $k\in\mathbb{Z}$ که x و y منفی نباشند تعداد حالت‌ها را شمارش کنیم:

$$۴x+۳y=۱۹ \Rightarrow ۴x \overset{\cdots}{\equiv} \cdots$$

$$\Rightarrow ۴x \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۴x \overset{۳}{\equiv} ۱+\cdots$$

$$\Rightarrow \cancel{۴}x \overset{۳}{\equiv} \cancel{۴}\times ۱ \Rightarrow \underline{x=۳k+۱}$$

$$\Rightarrow ۴(۳k+۱)+۳y=۱۹$$

$$\Rightarrow ۱۲k+۴+۳y=۱۹$$

$$\Rightarrow ۱۲k+۳y=\cdots \Rightarrow \cdots+y=۵$$

$$\Rightarrow \underline{y=-۴k+۵}$$

$$k=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ y=۵ \end{cases} \text{ و } k=\cdots \Rightarrow \begin{cases} x=۴ \\ y=۱ \end{cases}$$

به‌ازای $k=۲$ و بیشتر از آن $y<۰$ و به‌ازای $k=-۱$ و کمتر از آن $x<۰$ که قابل قبول نمی‌باشند و لذا به دوصورت فوق می‌توان این کیسهٔ ۱۹ کیلویی را وزن کرد.

مثال: به چند طریق می‌توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

حل: اگر x و y را به‌ترتیب تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی فرض کنیم حل این مثال معادل است با تعداد جواب‌های نامنفی $۲۰۰۰x+۵۰۰۰y=۱۸۰۰۰$

$$2000x+5000y=18000$$

$$\Rightarrow 2x+5y=\cdots$$

$$\Rightarrow 2x\overset{5}{\equiv}18 \text{ و } 18\overset{5}{\equiv}\cdots$$

$$\Rightarrow \cancel{2}x\overset{5}{\equiv}\cancel{2}\times 4$$

$$\Rightarrow x\overset{5}{\equiv}\cdots\Rightarrow \underline{x=5k+4}$$

$$\Rightarrow 2(5k+4)+5y=18$$

$$\Rightarrow 10k+8+5y=18$$

$$\Rightarrow 10k+5y=10\Rightarrow \underline{y=-2k+2}$$

$$k=0\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases} \text{ و } k=1\Rightarrow\begin{cases}x=9\\y=0\end{cases}$$

(فقط به‌ازای ۱ و ۰ =k برای x و y جواب‌ها نامنفی هستند)

پس به دو طریق امکان تبدیل کردن ۱۸۰۰۰ تومان به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی، وجود دارد.

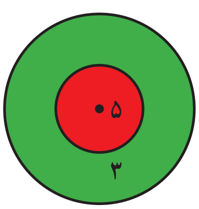
مثال : در یک رستوران فقط دو نوع خورش قورمه‌سبزی و قیمه وجود دارد. اگر ۵ نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند؟ (هر نفر فقط یک پرس غذا میل می‌کند)

حل : اگر تعداد چلو خورش قورمه‌سبزی و چلو خورش قیمهٔ سفارش داده شده را به‌ترتیب با x و y نشان دهیم خواهیم داشت :

$$x+y=5\Rightarrow x\overset{1}{\equiv}5\Rightarrow \underline{x=k+\cdots}$$

$$\Rightarrow k+\cancel{5}+y=\cancel{5}\Rightarrow \underline{y=\cdots}$$

چون y و x اعدادی نامنفی هستند پس باید $k\in\{0,-1,-2,-3,-4,-5\}$ و لذا به ۶ طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند.



مثال : تیراندازی به سمت یک هدف، شامل دو دایرهٔ هم مرکز، تیراندازی می‌کند. اگر او تیر را به دایرهٔ با شعاع کوچک‌تر بزند ۵ امتیاز و اگر به دایرهٔ بزرگ‌تر و خارج دایرهٔ کوچک‌تر بزند ۳ امتیاز می‌گیرد. اگر او کمتر از ۱۵ تیر انداخته و همهٔ تیرها به داخل دایرهٔ بزرگ‌تر اصابت کرده باشد و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشد چند حالت برای او در این تیراندازی می‌تواند ثبت شود؟

حل : اگر x و y را به‌ترتیب تعداد اصابت‌ها به دایره کوچک‌تر و بزرگ‌تر فرض کنیم، داریم :

$$5x+3y=42\Rightarrow 5x\overset{3}{\equiv}42$$

$$\Rightarrow 5x\overset{3}{\equiv}42+3\Rightarrow \cancel{5}x\overset{3}{\equiv}\cancel{5}\times 9$$

$$\Rightarrow \underline{x=3k+9}$$

$$5(3k+9)+3y=42$$

$$\Rightarrow 15k+45+3y=42$$

$$\Rightarrow ۱۵k + ۳y = -۳ \Rightarrow \underline{y = -۵k - ۱}$$

$$x, y \in W \Rightarrow k \in \{-۱, -۲, -۳\} \Rightarrow \begin{cases} x = ۶ \\ y = ۴ \end{cases}, \begin{cases} x = ۳ \\ y = ۹ \end{cases}, \begin{cases} x = ۰ \\ y = ۱۴ \end{cases}$$

($x = ۶$ و $y = ۴$ یعنی تیرانداز ۶ تیر را به دایرهٔ کوچک‌تر و ۴ تیر را به دایرهٔ بزرگ‌تر زده است).

تمرین

۱ عدد ۱۳۹۸ به کدام دستهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۹ تعلق دارد؟

۲ اگر $k \in \mathbb{Z}$، ثابت کنید فقط یکی از سه حالت زیر امکان‌پذیر است

$k \overset{۳}{\equiv} ۰$ یا $k \overset{۳}{\equiv} ۱$ یا $k \overset{۳}{\equiv} ۲$

(به عبارت دیگر، $k \in [۰]_۳$ یا $k \in [۱]_۳$ یا $k \in [۲]_۳$)

۳ اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n | m$ ثابت کنید $a \overset{n}{\equiv} b$.

۴ فرض کنیم، $a \overset{m}{\equiv} b$ و $b \overset{n}{\equiv} c$ و $(m, n) = d$ در این صورت ثابت کنید $a \overset{d}{\equiv} c$.

۵ ثابت کنید : اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن‌گاه $a \overset{m}{\equiv} b$.

۶ عکس تمرین ۵ را بیان و اثبات کنید.

۷ با استفاده از بسط دو جمله‌ای خیّام یعنی،

$$(a+b)^n = \binom{n}{۰} \times a^n + \binom{n}{۱} \times a^{n-۱}b + \binom{n}{۲} \times a^{n-۲}b^۲ + \binom{n}{۳} \times a^{n-۳}b^۳ + \cdots + \binom{n}{n} \times b^n$$

ثابت کنید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ همواره $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$.

۸ با توجه به تمرین ۷ ثابت کنید عدد $۱۲^{۵۱} - ۱۱^{۵۱} - ۲۳^{۵۱}$ بر عدد ۱۳۲ بخش‌پذیر است.

۹ باقی‌مانده تقسیم عدد $A = (۲^{۱۱} + ۷) \times ۹$ را بر ۲۳ بیابید.

۱۰ اگر دو عدد $(۳a - ۵)$ و $(۴a - ۷)$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکانِ عدد $(۹a + ۶)$ را به‌دست آورید.

۱۱ باقی‌مانده تقسیم عدد $A = ۱! + ۲! + ۳! + \ldots + ۵۰۰!$ را بر ۱۰ به‌دست آورید (رقم یکان A را بیابید)

۱۲ جواب‌های عمومی معادلهٔ سیالهٔ خطی $۷x + ۵y = ۱۱$ را به‌دست آورید.

۱۳ به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

۱۴ معادله‌های هم‌نهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب‌های عمومی آنها را به‌دست آورید.

الف) $۴۲۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۷۹$

ب) $۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰$

ج) $۵۱x \overset{۶}{\equiv} ۱۱$

۱۵ اگر اوّل مهر ماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۶ اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۷ همهٔ اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آنها به‌علاوهٔ ۹ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

۱۸ به چند طریق می‌توان یک کیسهٔ ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

۱۹ به چند طریق می‌توان از بین دو نوع گل یک دسته گل شاملِ ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟

۲۰ شخصی در یک مسابقهٔ علمی شرکت کرده است. او به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را به‌دست آورد؟ (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد)