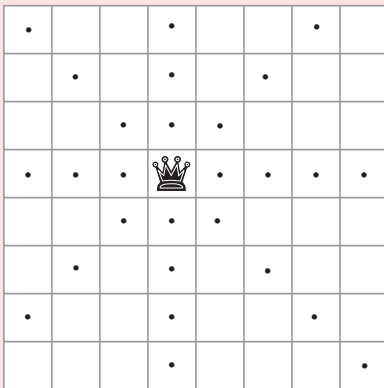


درس ۲ مدل سازی با گراف

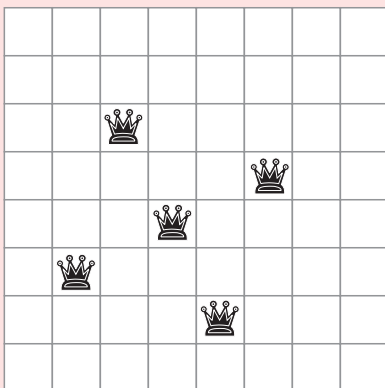
برخی از مسائل روزمره زندگی را می توان به کمک مدل سازی نخست به یک مسئله ریاضی تبدیل نمود و سپس با حل مسئله ریاضی، مسئله اصلی را نیز حل کرد. به طور کلی، بعضی مفاهیم ریاضی در مدل سازی مسائل زندگی واقعی بسیار پرکاربرد هستند. «احاطه گری» یکی از این مفاهیم پرکاربرد است که در ادامه با تاریخچه، مفهوم و کاربردهایی از آن آشنا خواهیم شد.

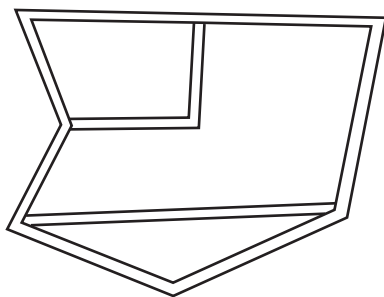
تاریخچه

در قرن نوزدهم میلادی مسائلی مانند «یافتن حداقل تعداد مهره وزیر که می تواند با چینش مناسب تمام صفحه شطرنج را بپوشاند» (یعنی هر خانه صفحه شطرنج که در آن وزیر قرار نگرفته است توسط حداقل یک وزیر تهدید شده باشند) ذهن برخی از مردم اروپا را به خود مشغول کرده بود.

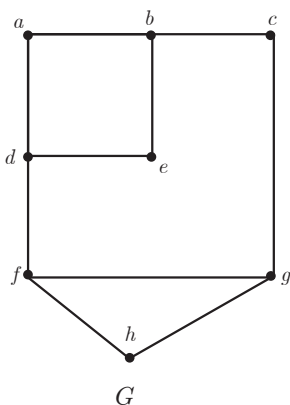


تفکر درباره پرسش هایی از این دست باعث به وجود آمدن مفهومی در شاخه گراف در ریاضیات با نام احاطه گری شد. برای آشنایی با این مفهوم به مسئله بعد دقت کنید.





شکل ۱



شکل ۲

شکل مقابل نقشه منطقه‌ای از یک شهر است. قرار است در برخی تقاطع‌های این شهر دستگاه‌های خودپرداز به گونه‌ای نصب شود که دو شرط زیر را داشته باشد:

۱ برای راحتی شهروندان دستگاه‌ها به گونه‌ای نصب شده باشند که هر فرد در هر تقاطعی که قرار گرفته باشد، یا در همان تقاطع به دستگاه خودپرداز دسترسی داشته باشد و یا حداکثر با رفتن به یک تقاطع مجاور به دستگاه خودپرداز دسترسی پیدا کند.

۲ به جهت صرفه‌جویی در هزینه‌ها با کمترین تعداد دستگاه خودپرداز ممکن این کار صورت بگیرد.

حال فرض کنید منطقه مورد نظر را با گراف شکل ۲ مدل‌سازی کرده باشیم. الف) در این مدل‌سازی تقاطع‌ها و خیابان‌های بین آنها هر کدام به چه صورت نمایش داده شده‌اند؟

ب) رأس‌هایی از گراف را مشخص کنید که، با توجه به مدل‌سازی انجام شده، اگر خودپردازها در آن تقاطع‌ها قرار گیرند، شرط ۱ برآورده گردد. چنین مجموعه‌ای از رئوس را یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف می‌نامیم. به‌طور مثال مجموعه شامل همه رئوس گراف G ، یک مجموعه احاطه‌گر است. آیا می‌توانید یک مجموعه احاطه‌گر ۴ عضوی مثال بزنید؟

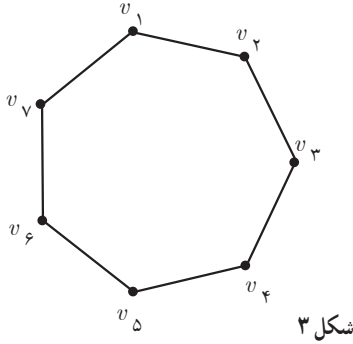
تعریف: زیر مجموعه D از مجموعه رئوس گراف G را مجموعه احاطه‌گر می‌نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد.^۱

معمولاً به سادگی می‌توان مجموعه‌های مختلفی از رئوس گراف G را مشخص کرد که در شرط ۱ صدق کنند؛ به عبارتی یک گراف می‌تواند مجموعه‌های احاطه‌گر گوناگونی داشته باشد. از طرفی واضح است که هر مجموعه که شامل یک مجموعه احاطه‌گر باشد، احاطه‌گر است. در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر یک گراف، مجموعه‌ای را که کمترین تعداد عضو را داشته باشد مجموعه احاطه‌گر مینیمم آن گراف می‌نامیم. اگر چنین مجموعه‌ای را برای گراف G بیابیم، این مجموعه در هر دو شرط ۱ و ۲ مطرح شده در مسئله بالا صدق خواهد کرد.

تعریف: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند مجموعه احاطه‌گر مینیمم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

گاهی اوقات برای راحتی به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم از گراف G ، یک γ -مجموعه می‌گوییم.

۱- از آنجا که عدد احاطه‌گری یک گراف ناهمبند، به سادگی و با استفاده از یک عمل جمع به دست می‌آید، لذا در این کتاب عدد احاطه‌گری گراف‌های همبند مد نظر است مگر اینکه مستقیماً به ناهمبندی گراف اشاره شود.



مثال: برای گراف شکل ۳ که دور C_7 است، مجموعه $\{v_1, v_2, v_5, v_7\}$ یک مجموعه احاطه گر و مجموعه های $\{v_1, v_2, v_5\}$ و $\{v_1, v_2, v_7\}$ دو مجموعه احاطه گر مینیمم یا اصطلاحاً دو γ -مجموعه اند؛ و داریم $\gamma(G) = 3$.

شکل ۳

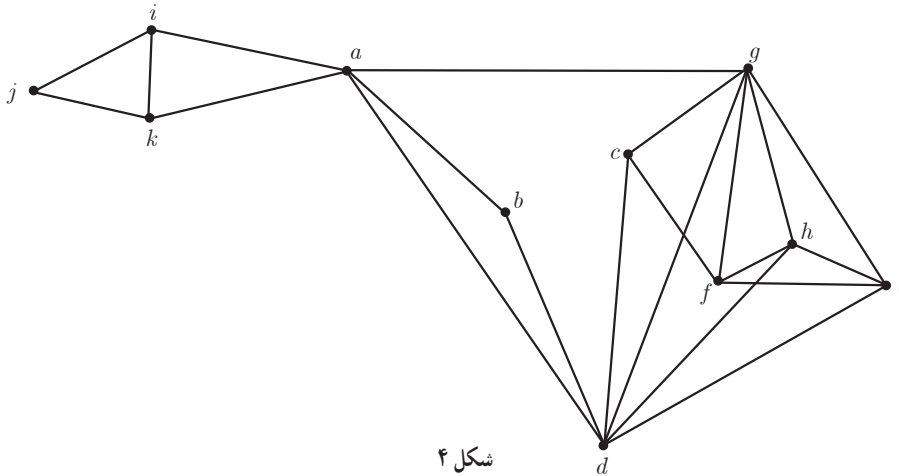
مثال: فرض کنید $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$ شهرهای یک استان باشند و فاصله های مستقیم این شهرها از یکدیگر، دو به دو، مطابق جدول زیر باشد.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
a	۰	۵۰	۸۰	۴۰	۶۰	۹۰	۵۰	۷۰	۵۰	۶۰	۵۰
b	۵۰	۰	۵۵	۳۰	۶۰	۷۰	۶۰	۶۰	۹۰	۸۵	۸۰
c	۸۰	۵۵	۰	۴۰	۶۰	۲۰	۵۰	۵۵	۱۰۰	۹۵	۹۰
d	۴۰	۳۰	۴۰	۰	۳۰	۵۵	۳۰	۳۰	۸۰	۷۵	۷۰
e	۶۰	۶۰	۶۰	۳۰	۰	۵۰	۱۰	۵	۶۰	۵۵	۵۵
f	۹۰	۷۰	۲۰	۵۵	۵۰	۰	۴۰	۴۵	۱۰۰	۹۰	۸۰
g	۵۰	۶۰	۵۰	۳۰	۱۰	۴۰	۰	۵	۷۰	۶۵	۶۰
h	۷۰	۶۰	۵۵	۳۰	۵	۴۵	۵	۰	۶۵	۶۰	۵۵
i	۵۰	۹۰	۱۰۰	۸۰	۶۰	۱۰۰	۷۰	۶۵	۰	۵	۱۰
j	۶۰	۸۵	۹۵	۷۵	۵۵	۹۰	۶۵	۶۰	۵	۰	۵
k	۵۰	۸۰	۹۰	۷۰	۵۵	۸۰	۶۰	۵۵	۱۰	۵	۰

می خواهیم تعدادی ایستگاه رادیویی در برخی از شهرهای این استان تأسیس کنیم به طوری که همه شهرهای استان از پوشش امواج رادیویی برخوردار گردند. و از طرفی برای کاهش هزینه ها می خواهیم کمترین تعداد ممکن ایستگاه رادیویی را احداث کنیم. اگر هر ایستگاه رادیویی تا 50 کیلومتر اطراف خود را پوشش دهد، حداقل چند ایستگاه رادیویی احتیاج داریم و در چه شهرهایی باید آنها را احداث کنیم؟

حل: برای مدل سازی این مسئله کافی است گراف مربوط به آن را به این طریق رسم کنیم که به جای هر شهر یک رأس قرار دهیم و سپس دو رأس را به هم وصل کنیم اگر و تنها اگر فاصله مستقیم آن دو شهر از 50 کیلومتر بیشتر نباشد. در این صورت مجموعه احاطه گر مینیمم برای گراف مذکور، جواب مسئله را مشخص می کند. (چرا؟)

با توجه به آنچه گفته شد گراف زیر، گراف حاصل از مدل سازی برای این مسئله است.



شکل ۴

حال کافی است یک مجموعه احاطه گر مینیمم در این گراف بیابیم و ایستگاه های رادیویی را در شهرهای متناظر با رئوس این مجموعه احاطه گر مینیمم مستقر کنیم. یافتن یک مجموعه احاطه گر مینیمم برای گراف فوق در تمرینات پایان درس به شما واگذار شده است.

کار در کلاس

۱ مشخص کنید کدام یک از مجموعه های زیر برای گراف شکل ۵ احاطه گر

هست و کدام نیست؟

الف) $A = \{a, b, c, d, e\}$

ب) $B = \{f, g, h, i, j\}$

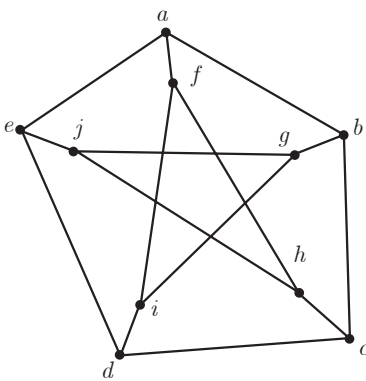
پ) $C = \{a, b, j, h, g\}$

ت) $D = \{a, i, h\}$

ث) $E = \{f, g, h, e, d\}$

ج) $F = \{f, g, h, e\}$

چ) $H = \{g, h, e\}$



شکل ۵

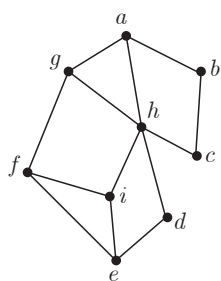
۲ از مجموعه های مطرح شده در سؤال ۱ که احاطه گر بودند در کدام یک از آنها رأس یا رأس هایی وجود دارد که با حذف آنها مجموعه باقی مانده هنوز احاطه گر باشد؟

تعریف: یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از رأس هایش دیگر احاطه گر نباشد احاطه گر **مینیمال** می نامیم.

۳ مجموعه ای احاطه گر با کمترین تعداد رأس که می توانید، بنویسید و پاسخ خود را با پاسخ هم کلاسی های خود مقایسه کنید.

۴ یک مجموعه احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.

۵ آیا می توان هر مجموعهٔ احاطه گر دلخواه غیر مینیمال را با حذف برخی رئوسش به یک مجموعهٔ احاطه گر مینیمال تبدیل کرد؟ (استدلال کنید)



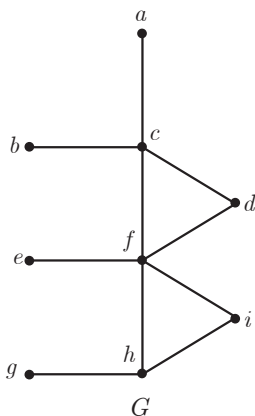
شکل ۶

مثال: در گراف شکل ۶ یک مجموعهٔ احاطه گر غیر مینیمال انتخاب کنید و با حذف برخی رأس‌ها، آن را به یک مجموعهٔ احاطه گر مینیمال تبدیل نمایید.

حل: مجموعه $\{a, b, c, d, e, f\}$ یک مجموعهٔ احاطه گر است. از آنجا که با حذف برخی رأس‌های آن (مثلاً رأس a) این مجموعه باز هم احاطه گر خواهد بود، لذا احاطه گر مینیمال نیست. حال با حذف سه رأس a, c, e از آن، مجموعه $\{b, d, f\}$ حاصل می‌شود که باز هم احاطه گر است اما چون این مجموعه با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه گر نخواهد بود لذا احاطه گر مینیمال است.

کار در کلاس

در گراف شکل ۷:



شکل ۷

- ۱ مجموعه‌ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه گر باشد.
- ۲ مجموعه‌ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه گر مینیمال باشد.
- ۳ یک مجموعهٔ احاطه گر ۳ عضوی مشخص نمایید.
- ۴ آیا رأسی در گراف G وجود دارد که دو رأس از a, b, e, g را احاطه کند؟
- ۵ حداقل تعداد رأس‌هایی که تمام رئوس گراف را احاطه می‌کنند چند است؟ $\gamma(G)$ چند است؟

معرفی یک نماد

با مفهوم جزء صحیح^۱ یک عدد آشنا هستید و می‌دانید که اگر x یک عدد صحیح باشد، $[x]$ برابر با خود x است، و اگر عدد صحیح نباشد، عدد صحیح قبل از x است.

$$[x] = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

حال فرض کنید تعدادی از کارمندان یک شرکت قرار است با چند تاکسی به محلی بروند و هر ۴ نفر یک تاکسی نیاز دارند.

الف) اگر تعداد کارمندان ۱۲ نفر باشد، چند تاکسی نیاز است؟

۱- گاهی اوقات به جزء صحیح یک عدد، کف آن عدد هم گفته می‌شود. در برخی کتاب‌ها $[a]$ را با $\lfloor a \rfloor$ نمایش می‌دهند و به آن کف a می‌گویند.

ب) اگر تعداد کارمندان ۱۴ نفر باشد چند تاکسی نیاز است؟

پ) اگر تعداد کارمندان ۱۶ نفر باشد چند تاکسی نیاز است؟

ت) آیا با تقسیم تعداد کارمندان به عدد ۴، تعداد تاکسی‌های مورد نیاز به دست می‌آید؟ اگر عدد حاصل عدد صحیح نباشد چه تعداد تاکسی نیاز است؟

ث) مفهوم سقف یک عدد که در ادامه مطرح شده است را می‌توان در مواردی مشابه آنچه در اینجا مطرح شد به کار برد.

در صورتی که x عددی غیر صحیح باشد برای نمایش عدد صحیح بعد از x از $\lceil x \rceil$ استفاده می‌کنیم و آن را سقف x می‌خوانیم. در حالت کلی

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\lceil 3 \rceil = 3$$

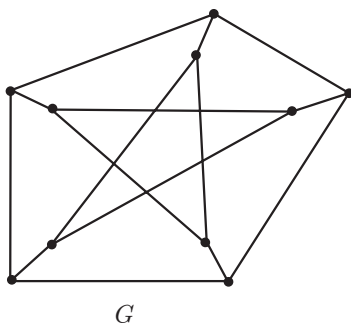
$$\lceil 3/5 \rceil = 3$$

$$\lceil 3 \rceil = 3$$

$$\lceil 3/5 \rceil = 4$$

■ سؤال: برای کدام اعداد کف و سقف آنها با هم برابر است؟

فعالیت



شکل ۸

می‌دانیم در هر گراف، هر رأس خودش و تمام رئوس مجاورش را احاطه می‌کند.

۱ در گراف مقابل Δ چند است؟

۲ هر رأس حداکثر چند رأس را احاطه می‌کند و این تعداد چه ارتباطی با Δ دارد؟

۳ آیا ۲ رأس می‌توانند همه رئوس گراف G را احاطه کنند؟

۴ حداقل $\lceil \frac{1}{4} \rceil$ رأس برای احاطه همه رئوس لازم است. چرا؟

۵ $\gamma(G)$ چند است؟

۶ در یک گراف دلخواه با ماکزیم درجه Δ ، یک رأس دلخواه حداکثر چند رأس را احاطه می‌کند؟

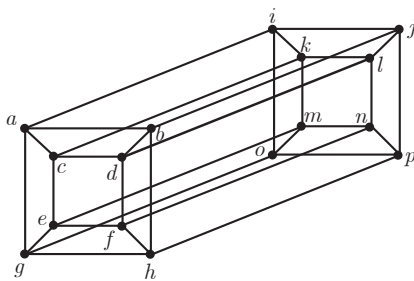
۷ تعداد کمتر از $\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil$ رأس نمی‌تواند تمام n رأس یک گراف را احاطه کنند. چرا؟

بنابراین :

اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجه Δ باشد و D یک مجموعه احاطه‌گر در آن باشد، آنگاه $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor \leq |D|$ و از آنجا که $\gamma(G)$ نیز اندازه یک مجموعه احاطه‌گر است همواره داریم $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor \leq \gamma(G)$ (اصطلاحاً گفته می‌شود در گراف G عدد $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$ یک کران پایین است برای $\gamma(G)$ ؛ یعنی $\gamma(G)$ نمی‌تواند از آن کمتر شود).

کار در کلاس

۱ یک شبکه رایانه‌ای متشکل از ۱۶ کامپیوتر را در نظر بگیرید که در آن هر کامپیوتر، مطابق شکل ۹ به چند کامپیوتر دیگر



شکل ۹

متصل است. گراف شکل ۹ یک مدل‌سازی از شبکه مورد نظر است که در آن هر رأس نمایشگر یک کامپیوتر است و یال بین دو رأس نمایانگر آن است که کامپیوترهای نظیر به آن دو رأس مستقیماً با هم در ارتباط‌اند. می‌خواهیم مجموعه‌ای با کمترین تعداد ممکن از کامپیوترها (رأس‌ها) انتخاب کنیم. به طوری که توسط این مجموعه از کامپیوترها به تمام کامپیوترهای این شبکه وصل باشیم. مجموعه انتخاب شده از رئوس برای گراف مورد نظر چه نوع مجموعه‌ای است؟

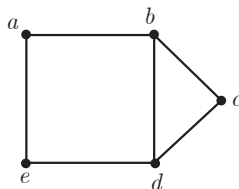
۲ با توجه به رابطه $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor \leq \gamma(G)$ ، حداقل چند رأس برای احاطه کردن تمام رئوس این گراف لازم است؟ آیا می‌توانید

مجموعه‌ای احاطه‌گر با این تعداد رأس مشخص نمایید؟

۳ گراف‌های C_4 ، C_6 ، P_4 ، P_6 را رسم کنید و عدد احاطه‌گری هر یک را مشخص نمایید.

۴ گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$ باشد.

۵ گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$ نباشد.



G

شکل ۱۰

مثال : عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۰ را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.

حل : به سادگی می‌توان دید که مجموعه دو عضوی $\{a, c\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است.

بنابراین عدد احاطه‌گری این گراف کوچک‌تر یا مساوی ۲ است؛ یعنی $\gamma(G) \leq 2$.

اما اگر $\gamma(G) = 1$ ، یعنی یک رأس در گراف G وجود دارد که به تنهایی تمام رئوس دیگر را

احاطه کرده است (به تمام رئوس دیگر وصل است) یعنی رأسی با درجه ۴ در گراف وجود دارد که

با توجه به گراف G می‌بینیم که چنین رأسی وجود ندارد و لذا $\gamma(G) > 1$. بنابراین $1 < \gamma(G) \leq 2$ و

لذا $\gamma(G) = 2$.

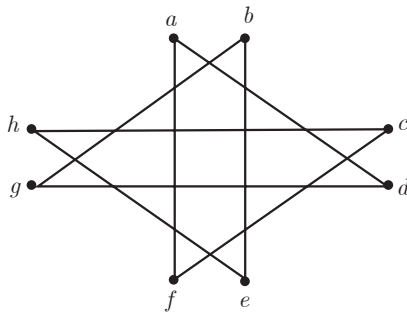
روش دیگر برای حل: نوع دیگری از استدلال به این صورت است که با توجه به کران پایین مطرح شده برای $\gamma(G)$ و اینکه $\Delta(G)=3$ داریم:

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lceil \frac{5}{4} \right\rceil \leq \gamma(G)$$

بنابراین $\gamma(G) \leq 2$ و با توجه به مجموعه احاطه گر دو عضوی ارائه شده در بالا داریم $\gamma(G) = 2$ و لذا $\gamma(G) = 2$.

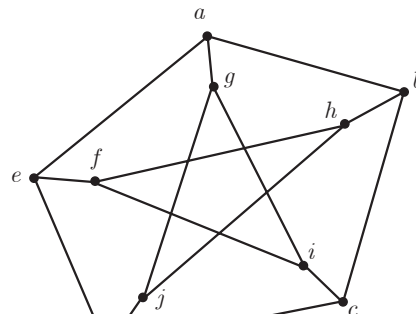
کاور کلاس

- ۱ تمام γ -مجموعه‌های (مجموعه‌های احاطه گر مینیمم) گراف G در مثال قبل را بنویسید.
- ۲ عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص کنید.



H

(ب)



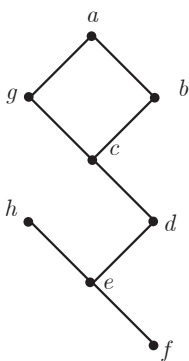
G

(الف)

شکل ۱۱

فعالیت

- ۱ می‌خواهیم عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۲ را مشخص کنیم.



G

شکل ۱۲

الف) ابتدا می‌بینیم که با توجه به کران پایین $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = 2$ حداقل $\gamma(G) \geq 2$ برای رأس a احاطه کردن رئوس لازم است اما در مراحل بعدی می‌بینیم که ۲ رأس برای احاطه تمام رئوس این گراف کافی نیست.

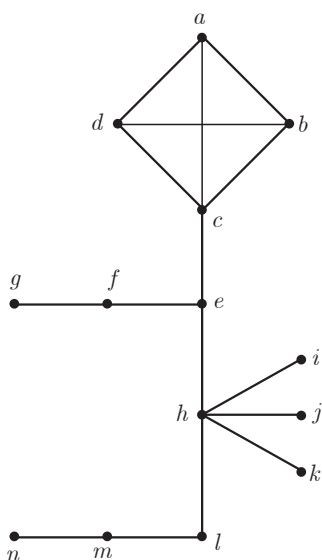
ب) برای احاطه کردن رأس h حداقل یکی از رئوس e یا h باید در مجموعه احاطه گر باشند و با بودن هر کدام از آنها در مجموعه احاطه گر، رئوس a, b, c, g کماکان احاطه نشده باقی می‌مانند.

پ) برای احاطه کردن رئوس a, b, c, g حداقل دو رأس دیگر نیاز هست، زیرا هیچ رأسی به تنهایی نمی‌تواند هر چهارتای آنها را احاطه کند.

ت) بنابراین حداقل ۳ رأس باید در هر مجموعه احاطه گر از گراف G باشد یعنی $\gamma(G) \geq 3$.

ث) از طرفی چون $\{a, c, e\}$ یک مجموعه احاطه گر است، $\gamma(G) \leq 3$. پس $\gamma(G) = 3$.

۲ می‌خواهیم عدد احاطه‌گر گراف شکل ۱۳ را مشخص نماییم.



شکل ۱۳

الف) ابتدا کران پایین $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$ را بررسی می‌کنیم که عدد $\left\lfloor \frac{14}{6} \right\rfloor = 3$ را

می‌دهد. پس $\gamma(G) \geq 3$.

ب) اما حداقل یکی از رئوس a, b, c, d باید انتخاب شود. چرا؟

پ) حداقل یکی از رئوس f و g باید انتخاب شود. چرا؟

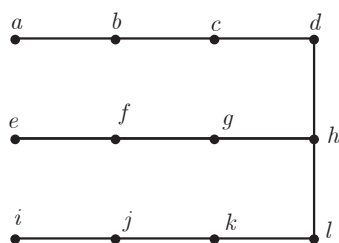
ت) حداقل یکی از رئوس i و h باید انتخاب شود. چرا؟

ث) حداقل یکی از رئوس m و n باید انتخاب شود. چرا؟

ج) بنابراین حداقل ۴ رأس در هر مجموعه احاطه‌گر باید باشد. لذا $\gamma(G) \geq 4$ و

با توجه به اینکه $\{c, f, h, m\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است لذا $\gamma(G) \leq 4$ بنابراین

$\gamma(G) = 4$.



شکل ۱۴

مثال: عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۴ را به دست آورید و یک مجموعه احاطه‌گر

مینیم برای آن ارائه کنید.

حل: برای احاطه کردن رأس a لازم است یکی از دو رأس a و b در مجموعه

احاطه‌گر باشند. به همین صورت یکی از رئوس e و f و نیز یکی از رئوس i و j

نیز باید در هر مجموعه احاطه‌گر باشند. اما این سه رأس انتخاب شده در هر حالت

نمی‌توانند رئوس l, h, d را احاطه کنند. لذا حداقل یک رأس دیگر یعنی حداقل ۴

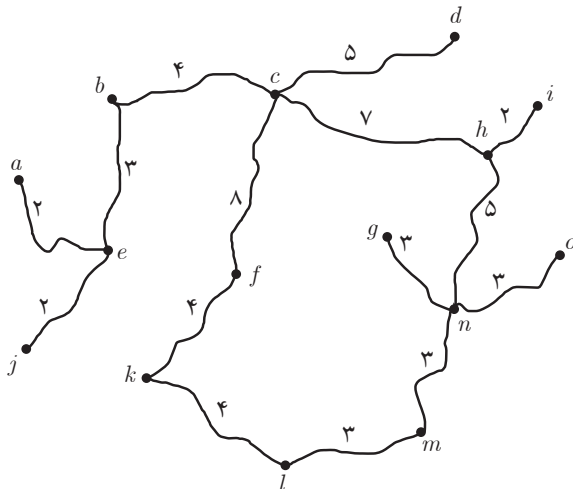
رأس برای احاطه رئوس این گراف لازم است: یعنی $\gamma(G) \geq 4$ از طرفی $\{b, f, j, h\}$

یک مجموعه احاطه‌گر است و لذا $\gamma(G) \leq 4$. بنابراین داریم $\gamma(G) = 4$.

۱ در مثال ایستگاه‌های رادیویی (دومین مثال این درس)

الف) تعداد و محل نصب ایستگاه‌ها را مشخص نمایید.

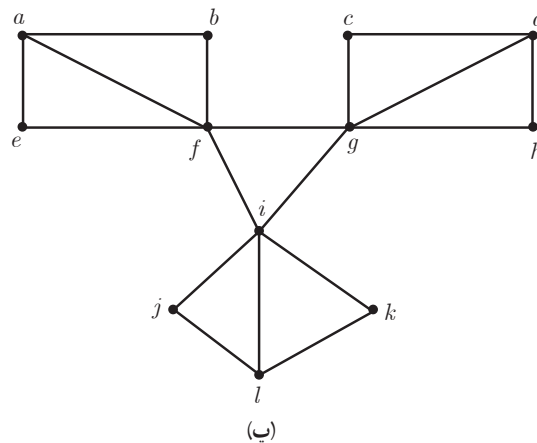
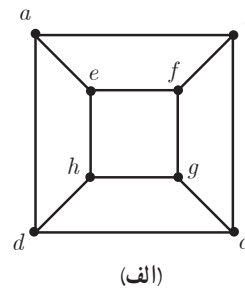
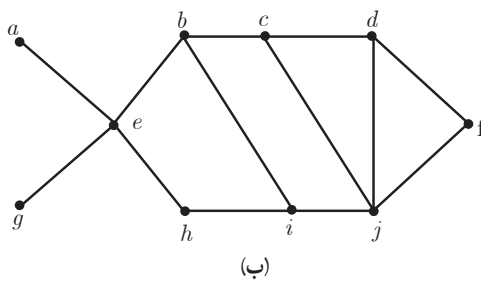
ب) اگر مجبور باشیم یکی از ایستگاه‌ها را در شهر b احداث کنیم حداقل چند ایستگاه دیگر و در چه شهرهایی باید احداث کنیم؟

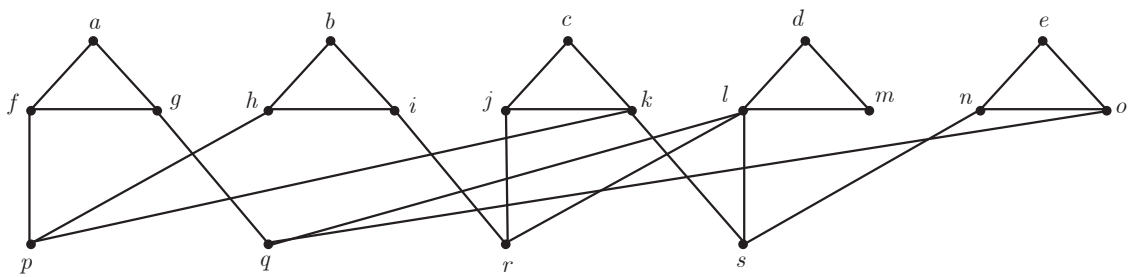


شکل ۱۵

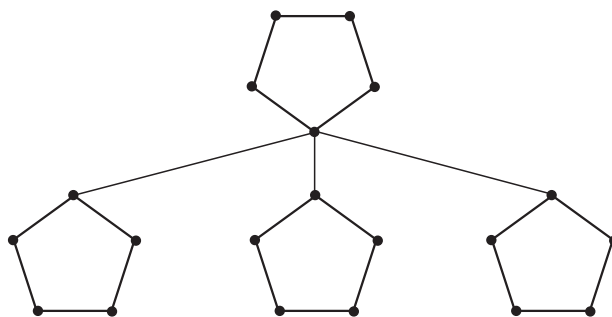
۲ نقشه مقابل نقشه یک منطقه شامل چند روستا و جاده‌های بین آن روستاهاست و مسافت جاده‌های بین روستاها در آن مشخص شده است. قصد داریم چند بیمارستان مجهز در برخی روستاها احداث کنیم به گونه‌ای که فاصله هر روستا تا نزدیک‌ترین بیمارستان به آن روستا از ۱۰ کیلومتر بیشتر نباشد و از طرفی کمترین تعداد ممکن بیمارستان را احداث کنیم. ابتدا با توجه به نقشه فوق، مسئله مورد نظر را با یک گراف مناسب مدل‌سازی کنید و سپس تعداد و محل احداث بیمارستان‌ها را مشخص کنید.

۳ عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص نمایید.





(ت)



(ث)

۴ اگر برای گراف G داشته باشیم $\gamma(G) = 1$ ، در این صورت به چه ویژگی‌هایی از گراف G می‌توان پی برد؟ $\Delta(G)$ و حداقل و حداکثر تعداد یال‌هایی را که گراف G می‌تواند داشته باشد مشخص کنید.

۵ $\gamma(P_n)$ و $\gamma(C_n)$ را به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ مشخص کنید.

۶ اگر G یک گراف k -منتظم n رأسی باشد نشان دهید $\left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor \leq \gamma(G)$

۷ یک گراف ۲-منتظم ۱۲ رأسی بکشید که عدد احاطه‌گری آن کمترین مقدار ممکن باشد.

۸ الف) یک گراف ۶ رأسی که γ -مجموعه آن با اندازه یک باشد رسم کنید.

ب) یک گراف ۶ رأسی که γ -مجموعه آن با اندازه دو باشد رسم کنید.

پ) فرض کنید n و k دو عدد طبیعی باشند و $k \leq \frac{n}{4}$. روشی برای رسم یک گراف n رأسی که عدد احاطه‌گری آن k باشد، ارائه دهید.

۹ الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

۱۰ برای هر $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 4$) دلخواه توضیح دهید که

الف) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

ب) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

۱۱ گراف P_{12} را رسم کنید.

الف) یک γ - مجموعه از آن را مشخص نمایید.

ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی از آن را مشخص نمایید.