

اصل شمول و عدم شمول

واضح است که برای محاسبه تعداد اعضای $(A \cup B)$ یعنی $|A \cup B|$ چون اعضای $(A \cap B)$ هم در A و هم در B هستند، اگر اعضای A و B را روی هم حساب کنیم اعضای $(A \cap B)$ دو بار محاسبه شده‌اند و می‌بایست یک‌بار از این مجموع کم شود و لذا خواهیم داشت:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

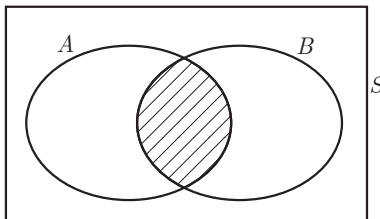
این تساوی به اصل شمول و عدم شمول برای دو مجموعه معروف است. (برای اختصار آن را اصل شمول می‌نامیم).

با توجه به تعریف متمم اگر S مجموعه مرجع A و B باشد، داریم:

$$|(A \cup B)'| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B|$$

این تساوی نتیجه اصل شمول است.

نتیجه مهم: اگر S مجموعه‌ای متناهی و A و B زیرمجموعه‌های S باشند، در این صورت تعداد اعضای S که در هیچ یک از مجموعه‌های A و B قرار ندارند برابر است با:



شکل ۱

$$|S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

مثال: در یک کلاس ۲۵ نفری ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می‌کنند و نه والیبال، به شرط آنکه بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند.

حل: ابتدا با استفاده از اصل شمول تعداد افرادی را که حداقل در یکی از دو رشته ورزشی بازی می‌کنند مشخص می‌کنیم و سپس با استفاده از نتیجه اصل شمول تعداد افرادی را که در هیچ رشته ورزشی شرکت ندارند به دست می‌آوریم.

اگر مجموعه افرادی را که فوتبال و والیبال بازی می کنند به ترتیب F و V بنامیم در این صورت خواهیم داشت :

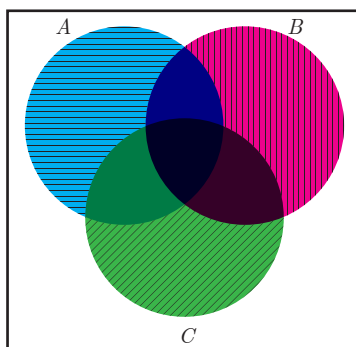
$$|F \cup V| = |F| + |V| - |F \cap V| \Rightarrow |F \cup V| = \dots$$

$$\Rightarrow \text{تعداد افرادی که نه در } F \text{ و نه در } V \text{ هستند} = |\overline{F \cup V}| = |S| - |F \cup V| = 25 - \dots = \dots$$

اصل شمول را می توان برای بیش از دو مجموعه هم تعمیم داده و بیان کرد که ما در این کتاب برای حداکثر سه مجموعه آن را بیان و مسائلی را با استفاده از این اصل طرح و حل خواهیم کرد.

اصل شمول برای سه مجموعه : اگر A ، B و C زیرمجموعه هایی از مجموعه مرجع S باشند، در این صورت همواره تساوی زیر (اصل شمول) برقرار است :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



(توضیح دهید چرا اشتراک های دوتایی کم و اشتراک سه تایی اضافه شده است؟)

با استفاده از تعریف متمم، نتیجه اصل شمول نیز به صورت زیر بیان می شود :

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C| \quad \text{تعداد اعضای } S \text{ که در هیچ یک از مجموعه های } A \text{ و } B \text{ و } C \text{ قرار ندارند}$$

شکل ۲

فعالیت

چند عدد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 400$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳، ۴ و ۵ بخش پذیر نباشند؟ (بر ۳ بخش پذیر نباشند، بر ۴ بخش پذیر نبوده و بر ۵ نیز بخش پذیر نباشند).

۱ در بین اعداد ۱۲، ۲۵، ۱۰ و ۱۳ کدام یک مورد نظر می باشند؟

۲ آیا عدد ۶۰ جزء اعداد مورد نظر است؟

۳ اگر مجموعه اعدادی را که بر ۳ بخش پذیرند A و اعداد بخش پذیر بر ۴ را B و اعداد بخش پذیر بر ۵ را C بنامیم،

\bar{A} ، \bar{B} و \bar{C} را تعریف کنید. آیا مجموعه $(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$ همه اعداد مورد نظر را شامل می شود؟

۴ آیا تساوی $(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = (\overline{A \cup B \cup C})$ برقرار است؟

۵ با توجه به تساوی اخیر و اصل شمول و نتیجه اصل شمول جاهای خالی را پر کرده و تعداد اعداد خواسته شده را محاسبه کنید. (منظور از [] جزء صحیح است).

$$A = \{1 \leq n \leq 400 \mid 3 \mid n\} \rightarrow |A| = \left[\frac{400}{3} \right] = \dots$$

(از هر سه عدد متوالی یکی بر ۳ بخش پذیر است، پس تعداد اعداد طبیعی از ۱ تا k که بر سه بخش پذیرند برابر است با $\left[\frac{k}{3} \right]$).

$$B = \{1 \leq n \leq 400 \mid \dots \mid n\} \rightarrow |B| = \left[\frac{\dots}{\dots} \right] = \dots$$

$$C = \{1 \leq n \leq 400 \mid \dots \mid n\} \rightarrow |C| = \left[\frac{\dots}{\dots} \right] = \dots$$

$(A \cap B)$ یعنی مجموعه اعدادی که هم بر ۳ و هم بر ۴ بخش پذیرند و با توجه به قضیه ای در نظریه اعداد، «مجموعه اعدادی که بر a و بر b بخش پذیر باشد با مجموعه اعدادی که بر «کم م» آن دو عدد یعنی بر $[a, b]$ بخش پذیرند، برابر می باشد». (این قضیه برای سه عدد یا بیشتر نیز برقرار است)

$$|A \cap B| = \left[\frac{400}{[3, 4]} \right] = \left[\frac{400}{12} \right] = \dots$$

$$|A \cap C| = \left[\frac{400}{\dots} \right] = \left[\frac{400}{15} \right] = \dots$$

$$|B \cap C| = \left[\frac{\dots}{\dots} \right] = \left[\frac{\dots}{20} \right] = \dots$$

$$|A \cap B \cap C| = \left[\frac{400}{60} \right] = \dots \quad ([3, 4, 5] = [[3, 4], 5] = [12, 5] = 60)$$

$$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = \overline{A \cup B \cup C} = |S| - |A \cup B \cup C|$$

$$= 400 - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|)$$

$$= 400 - (133 + \dots + \dots - 33 - \dots - 20 + 6) = \dots$$

کار در کلاس

چند عدد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 350$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴، ۵ و ۶ بخش پذیر نباشند؟
(توجه داشته باشید که $[5, 6] = 30$ ، $[4, 6] = 12$ ، $[5, 4, 6] = 60$)

مثال: اگر یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم که رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می شود و امتحان کردن هر رمز ۴ رقمی ۵ ثانیه طول بکشد حداکثر چه زمانی لازم است تا این قفل باز شود؟ (در رمز، قرار گرفتن رقم صفر در سمت چپ اشکالی ندارد) (این مسئله معادل است با شمارش تعداد ۴ رقمی هایی که در هر یک از آنها هر یک از ارقام ۷ و ۸ وجود داشته باشد.)

حل: یک رمز ۴ رقمی را به صورت \overline{abcd} نمایش می دهیم که در آن a, b, c, d ارقام صفر تا ۹ می باشند. محاسبه تعداد چنین ارقامی به صورت مستقیم کاری وقت گیر است و امکان دارد رمزهایی را چندبار محاسبه کنیم یا رمزهایی را از قلم بیندازیم، لذا از اصل شمول استفاده می کنیم.

ابتدا مجموعه های A و B را به صورت زیر و مخالف با آنچه مورد نظر مسئله است تعریف می کنیم!

$$A = \{\overline{abcd} \mid a, b, c, d \neq 7\} \rightarrow |A| = 9 \times 9 \times 9 \times 9$$

$$B = \{\overline{abcd} \mid a, b, c, d \neq \dots\} \rightarrow |B| = 9 \times 9 \times 9 \times 9$$

$$(A \cap B) = \{\overline{abcd} \mid a, b, c, d \neq 7, 8\} \rightarrow |A \cap B| = 8 \times 8 \times 8 \times 8$$

واضح است که منظور از \overline{A} مجموعه اعداد ۴ رقمی است که در هر یک از آنها رقم ۷ به کار رفته است و منظور از \overline{B}

اعداد ۴ رقمی است که در آنها عدد ۸ به کار رفته است. البته $(\overline{A} \cap \overline{B})$ یعنی مجموعه اعداد ۴ رقمی که در آنها هم رقم ۷ و هم رقم ۸ به کار رفته است و تعداد اعضای این مجموعه پاسخ سؤال مطرح شده است.

$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$ → ۴ رقمی‌ها
 رقم اول رقم دوم رقم سوم رقم چهارم

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B|$$

$$= 10000 - (9^4 + 9^4 - 8^4) = \dots$$

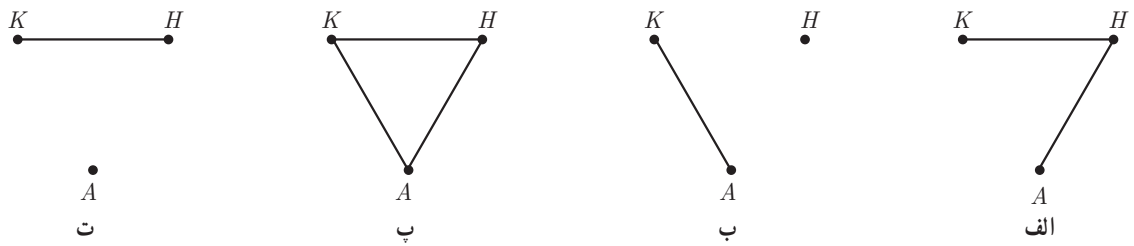
زمان لازم برحسب ثانیه $= \dots \times 5 = \dots$

کار در کلاس

در استان مرکزی، در نزدیکی شهر محلات، سه روستای خورده، آبگرم و حاجی آباد وجود دارد. اگر بخواهیم جاده‌هایی بین این سه روستا طراحی کنیم، به طوری که پس از تکمیل راه‌ها، هیچ روستایی تنها نماند (حداقل به یک روستای دیگر وصل باشد) به چند طریق می‌توان چنین راه‌هایی را طراحی کرد؟

اگر روستاها را K ، A و H بنامیم، در این صورت یافتن تعداد چنین راه‌هایی معادل است با پیدا کردن تعدادی گراف‌های ساده که با سه رأس K ، A و H می‌توان تعریف کرد به طوری که در آنها هیچ رأسی تنها نباشد.

۱ از چهار گراف ساده زیر کدام‌ها مورد نظرند و کدام‌ها را نباید شمرد؟



شکل ۳

۲ کل جاده‌های بین سه روستا یعنی کل گراف‌های ممکن که با سه رأس می‌توان تعریف کرد برابر است با:

$$|S| = 2^{\binom{3}{2}} = \dots$$

(بین هر دو روستا از این سه روستا می‌توان یک جاده در نظر گرفت که هر جاده می‌تواند در طراحی ما، باشد یا نباشد).

۳ اگر A_k را مجموعه راه‌های طراحی شده‌ای که در آنها روستای K تنها بماند تعریف کنیم، به همین صورت A_h و A_a را تعریف کنید و با استفاده از نتیجه اصل شمول جواب را بیابید و گراف‌های متناظر با آنها را رسم کنید.

۴ توضیح دهید که چرا تساوی‌های زیر برقرارند؟

- الف) $|A_k| = |A_a| = |A_h| = 2$
- ب) $|A_k \cap A_a| = |A_k \cap A_h| = |A_a \cap A_h| = 1$
- پ) $|A_k \cap A_a \cap A_h| = 1$

اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد و $|A|=m$ و $|B|=n$ ، در این صورت برای هر $a_i \in A$ که $1 \leq i \leq m$ می توان به n طریق $f(a_i)$ را تعریف کرد $f(a_i)=b_1$ یا $f(a_i)=b_2$ یا $f(a_i)=b_3$ یا $f(a_i)=b_4$ یا $f(a_i)=b_5$ و لذا طبق اصل ضرب تعداد کل توابع از A به B برابر است با: $|B|^{|A|}=n^m$. حال اگر $|A|=5$ و $|B|=3$ ، در این صورت می خواهیم تعداد توابعی چون f از A به B را تعیین کنیم به طوری که $R_f=B$. (روی تمام اعضای B ، پیکانی رسم شده باشد، به چنین تابع هایی، تابع پوشا گفته می شود.)

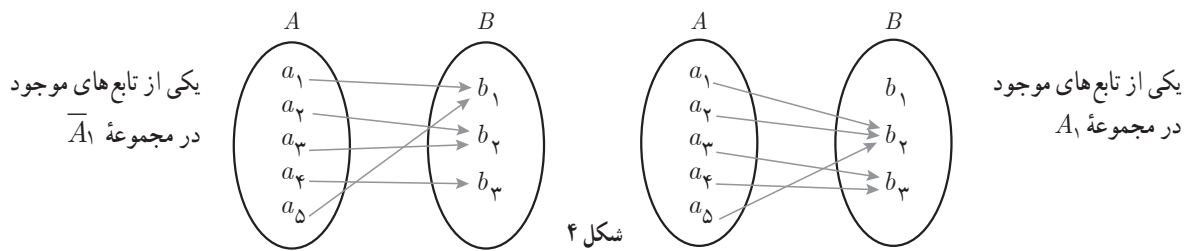
۱ اگر فرض کنیم $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ و $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ و تعریف کنیم،

$$A_1 = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_1; 1 \leq i \leq 5\}$$

$$A_2 = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq \dots; 1 \leq i \leq 5\}$$

$$A_3 = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq \dots; 1 \leq i \leq 5\}$$

در این صورت \bar{A}_1 مجموعه ای شامل همه تابع هایی از A به B است که حداقل یک پیکان از اعضای A روی b_1 می آورند.



۲ مجموعه $(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = \overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)}$ را تعریف کنید و با استفاده از نتیجه اصل شمول، پاسخ را بیابید.

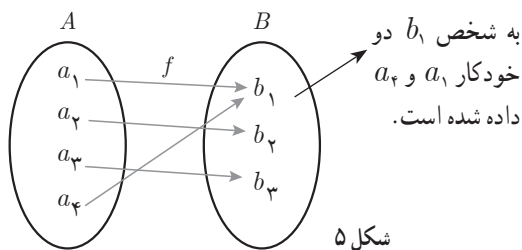
$$|S| = 3^5 = \dots, |A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^5 = \dots$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = \dots, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$\overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$= 243 - (\dots + \dots + \dots - \dots - \dots + \dots) = \dots$$

مثال: به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟



حل: تعداد حالت های ممکن برای انجام این عمل معادل است

با پیدا کردن تعداد تابع های از یک مجموعه ۴ عضوی مانند A به

یک مجموعه ۳ عضوی مانند B ، به طوری که بُرد این توابع همه

اعضای B باشد. (به هر عضو B حداقل ۱ عضو از A نسبت

داده شود.)

$$A_j = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 3\}$$

$$|S| = |B|^{|A|} = 3^4 = 81$$

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^4 = 16$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1^4 = 1, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$= 81 - (3 \times 16 - 3 \times 1 + 0) = 36$$

تذکر: تعداد تابع‌هایی چون $f: A \rightarrow B$ با فرض $|A|=m \geq 3$ و $|B|=3$ به طوری که $R_f = B$ ، از رابطه $3^m - (3 \times 2^m - 3)$ به دست می‌آید.

مثال: ۸ نفر را که برای یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده‌اند، انتخاب کرده‌ایم و می‌خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله ۱ جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه‌کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (یک نفر می‌تواند ۴ جایزه را برنده شود.)

حل: حل این مثال معادل است با یافتن تعداد تابع‌های ممکن از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۸ عضوی که برابر است با $8^4 = 4096$.

فعالیت

می‌خواهیم تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۶ عضوی را شمارش کنیم،
۱ اگر فرض کنیم $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ و $B = \{b_1, b_2, \dots, b_6\}$ برای تعریف f روی هر عضو A مثلاً $f(a_1)$ ، چند راه انتخاب داریم؟

۲ با توجه به اینکه f باید یک‌به‌یک باشد و تعریف یک‌به‌یکی در توابع، پس از تعریف $f(a_1)$ ، برای تعریف f روی a_2 چند راه انتخاب داریم؟

۳ با توجه به اصل ضرب، در کل، چند تابع یک‌به‌یک از A به B می‌توان تعریف کرد؟ پاسخ خود را توسط تبدیل r شیء از n شیء بنویسید.

به ۶ طریق می‌توان $f(a_1)$ را تعریف کرد $\rightarrow b_1$ یا b_2 یا \dots یا b_6 یا $f(a_1) = b_1$

به ۵ طریق می‌توان $f(a_2)$ را تعریف کرد $\rightarrow f(a_2) \neq f(a_1) \Rightarrow f$ یک‌به‌یک است

$\dots \Rightarrow f(a_3) \neq f(a_1), f(a_3) \neq f(a_2) \Rightarrow f$ یک‌به‌یک است

$$6 \times 5 \times \dots \times \dots = \frac{6!}{\dots} = (6)_6 \Rightarrow \text{طبق اصل ضرب}$$

در حالت کلی اگر $|A|=m$ و $|B|=k$ در این صورت با شرط $m \leq k$ تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعه A به مجموعه B برابر

$$(k)_m = \frac{k!}{(k-m)!} \text{ یا } k \text{ شیء از بین } k \text{ شیء}$$

مثال: به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ‌کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم)



شکل ۶

حل: تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن

تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعه‌ای ۴ عضوی به مجموعه‌ای ... عضوی یعنی، $\dots = \dots = \dots = \dots = \dots$ (۸).

اصل لانه کبوتری^۱

اگر از شما سؤال شود که حداقل چند نفر باید در یک کلاس حضور داشته باشند تا مطمئن شوید لااقل دو نفر از آنها ماه تولدشان یکسان است، چه پاسخی می‌دهید؟ بدترین حالت ممکن این است که افراد داخل کلاس از نفر اول هر کدام در یک ماه متفاوت با نفر قبلی به دنیا آمده باشند، تا کجا می‌توان مقاومت کرد؟ واضح است که حداکثر تا ۱۲ نفر با فرض اینکه هر نفر در یک ماه متفاوت از بقیه متولد شده باشد، می‌توان به این روند ادامه داد و هنوز اطمینانی برای اینکه حداقل دو نفر ماه تولدشان مثل هم باشد وجود ندارد، ولی اگر ۱۳ نفر در کلاس حضور داشته باشند این اطمینان حاصل می‌شود! (نفر سیزدهم در هر ماهی متولد شده باشد، ۱ نفر از آن ۱۲ نفر در آن ماه متولد شده است.)

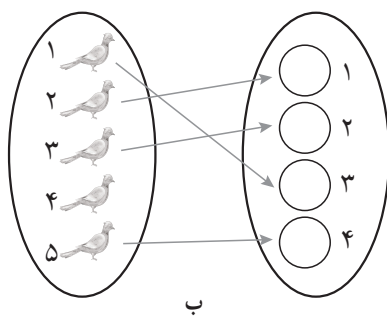


شکل ۷

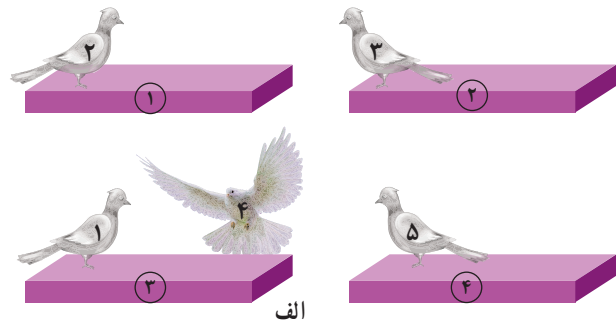
حال با توجه به مطالب فوق به نظر شما حداقل چند دانش‌آموز در یک مدرسه باید حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم، حداقل ۲ نفر از آنها روز تولدشان یکی است؟

در این قسمت به بیان اصل لانه کبوتری پرداخته و سپس مسائلی را مطرح می‌کنیم و با استفاده از این اصل و تعمیم آن، مسائل را حل خواهیم کرد.

اصل لانه کبوتری: اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m > n$ و همه کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.



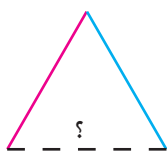
ب



الف

شکل ۸

۱- اصل لانه کبوتری اصطلاحاً «اصل» نامیده می‌شود و در واقع قضیه‌ای است که با برهان خلف اثبات می‌شود، این اصل را اصل حجره‌ها نیز نامیده‌اند.



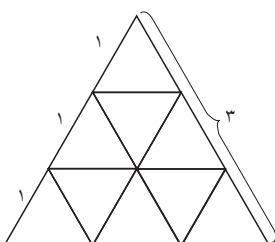
مثال: نشان دهید اگر بخواهیم ضلع‌های یک مثلث را با دو رنگ آبی یا قرمز رنگ کنیم، حداقل دو ضلع این مثلث هم‌رنگ خواهند شد.

حل: اگر ضلع‌های مثلث را کبوترها و دو رنگ آبی و قرمز را لانه‌ها فرض کنیم، طبق اصل کبوتری در یکی از لانه‌ها حداقل ۲ کبوتر قرار خواهد گرفت (دو کبوتر در یک لانه معادل است با دو ضلع با یک رنگ).

مثال: ثابت کنید در بین هر ۵ عدد طبیعی دلخواه حداقل دو عدد یافت می‌شود به طوری که به پیمانه ۴ هم‌نهیست می‌باشند. حل: می‌دانیم باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۴ یکی از اعضای مجموعه $R = \{0, 1, 2, 3\}$ است، حال اگر ۵ عدد طبیعی را کبوترها و باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ را لانه‌ها فرض کنیم، طبق اصل کبوتری حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار خواهند گرفت، یعنی حداقل دو عدد از این ۵ عدد باقی‌مانده‌های تقسیمشان بر ۴ با هم برابر است. حال اگر آن دو عدد را a و b فرض کنیم، a و b بر ۴ هم باقی‌مانده بوده و بنابر تعریف هم‌نهیستی باید $a \equiv b$ و حکم به دست می‌آید.

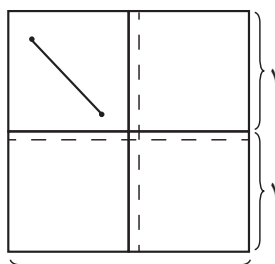
تمرین: در حالت کلی ثابت کنید در بین هر $(n+1)$ عدد طبیعی دلخواه و بیشتر، همواره حداقل ۲ عدد مانند a و b یافت می‌شوند به قسمی که تفاضل آنها بر n بخش‌پذیر است. (به پیمانه n هم‌نهیست‌اند).

کار در کلاس



شکل ۹

۱ یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۳ واحد را تقسیم‌بندی کرده‌ایم. نشان دهید اگر 10° نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد.



شکل ۱۰

۲ با توجه به ۱ برای شکل مقابل یک مسئله طرح کنید و با استفاده از اصل کبوتری به آن پاسخ دهید.

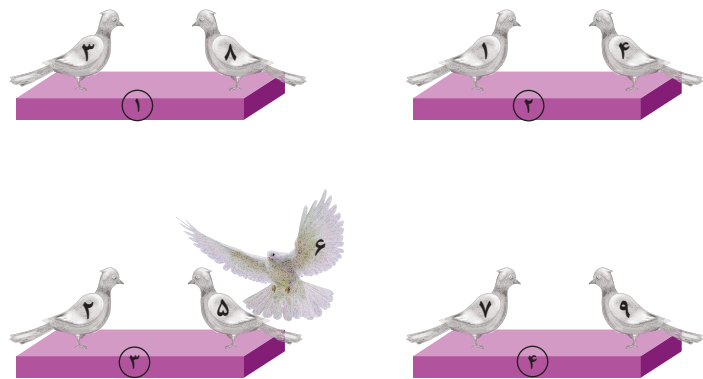
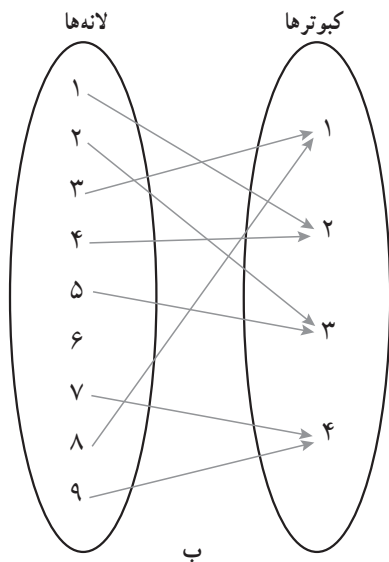
۳ نشان دهید در یک خانواده حداقل ۵ نفری، دست کم دو نفر فصل تولدشان یکی است.

۴ نشان دهید در هر گراف ساده از مرتبه $P \geq 2$ حداقل دو رأس هم‌درجه وجود دارد. (راهنمایی: مسئله را در دو حالت بررسی کنید. (۱) حالتی که رأس ایزوله یا تنها نداشته باشیم که در این صورت درجات رؤس از ۱ تا $n-1$ تغییر می‌کند. (۲) حالتی که یک رأس تنها داشته باشیم که در این صورت درجات بقیه رؤس از ۱ تا $n-2$ تغییر می‌کند) آیا نیازی هست حالتی را در نظر بگیریم که دو رأس یا بیشتر تنها باشند؟

جدول زیر را (با توجه به قرارداد n کیبوتر در n لانه در هر مرحله) کامل کنید و نتیجه گیری خود را با نتیجه داخل کادر (تعمیم اصل لانه کیبوتری) مقایسه کنید.

تعداد لانه‌ها (n)	تعداد کیبوترها ($kn+1$)	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ($k+1$) کیبوتر
n	$1 \times n + 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۲ کیبوتر
n	$2 \times n + 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ... کیبوتر
n	$\dots + 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۴ کیبوتر
\vdots	\vdots	\vdots
n	$\dots + 1$	اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل کیبوتر

همان طور که مشاهده می‌کنید در سطر دوم به ازای $n=4$ و $k=2$ تعداد کیبوترها $2 \times 4 + 1 = 9$ می‌باشد که طبق جدول می‌بایست لانه‌ای با حداقل ۳ کیبوتر یافت شود و شکل زیر گویای این روش است که اگر در هر لانه یک کیبوتر قرار بگیرد و از هر ۵ کیبوتر باقی مانده مجدد در هر لانه ۱ کیبوتر قرار بگیرد در نهایت نهمین کیبوتر در هر لانه‌ای قرار بگیرد همان لانه دارای ۳ کیبوتر است. توجه دارید که در حالت‌های زیادی از نشستن کیبوترها در لانه‌ها حداقل ۱ لانه با حداقل ۳ کیبوتر می‌تواند وجود داشته باشد (همه کیبوترها در ۱ لانه قرار بگیرند یا ۵ کیبوتر در ۱ لانه و ۴ کیبوتر در لانه‌های دیگر یا ...).



شکل ۱۱

تعمیم اصل لانه کیبوتری: هرگاه $(kn+1)$ کیبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k+1)$ کیبوتر در آن قرار گرفته است.

مثال: در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟

حل: در این مسئله $k+1=7$ یعنی $k=6$ است و n یا تعداد لانه‌ها همان تعداد ماه‌های سال یعنی $n=12$ است، پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش‌آموزان حداقل می‌بایست $kn+1=6 \times 12 + 1 = 73$ باشد.

کار در کلاس

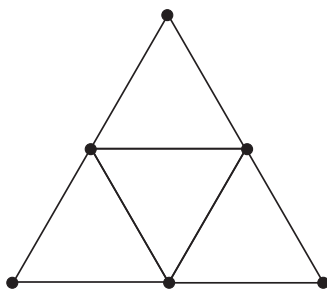
۱ در یک دبیرستان حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر از آنها ماه و روز هفته تولدشان یکی است؟

۲ ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

$$k+1=0 \dots \Rightarrow k=0 \dots$$

$$kn+1=54 \Rightarrow 4n = \dots \Rightarrow n = \left[\frac{53}{4} \right] = \dots$$

۳ حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۳ نفر از آنها دو حرف اول و دوم فامیلشان غیر تکراری و مثل هم است؟
(فامیلی‌هایی مثل اشتری و اشراقی مورد نظر است).



شکل ۱۲

مثال: حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله‌شان کمتر از ۱ است.

حل: کافی است مطابق شکل، مثلث مفروض را به ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۱ تقسیم بندی کنید که در این صورت اگر ۵ نقطه از داخل این مثلث انتخاب کنید طبق اصل لانه کبوتری اطمینان دارید حداقل یکی از مثلث‌ها شامل دست کم ۲ نقطه از این ۵ نقطه خواهد بود و فاصله این دو نقطه از طول ضلع مثلث‌های کوچک‌تر کمتر می‌باشد.

مثال: نشان دهید در هر کلاس با n دانش‌آموز ($n \geq 2$) حداقل ۲ دانش‌آموز یافت می‌شوند که تعداد دوستان آنها در آن کلاس با هم برابر است.

حل: قبلاً ثابت کردیم که در هر گراف ساده حداقل ۲ رأس هم‌درجه وجود دارد، لذا کافی است گرافی تعریف کنید که رأس‌های آن دانش‌آموزان و رابطه دوستی بین هر دو دانش‌آموز را با یالی بین رأس‌های متناظرشان تعریف کنید.

- ۱ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۹۰ ($1 \leq n \leq 90$) چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشند؟
- ۲ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($1 \leq n \leq 200$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر باشند ولی بر ۷ بخش پذیر نباشند؟
- ۳ در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال بازی می کنند، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می کنند. اگر بدانیم ۱۰ نفر عضو هیچ یک از این سه تیم نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می کنند مشخص کنید:
- الف) چند نفر هر سه رشته ورزشی را بازی می کنند؟
 ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می کنند؟
 پ) چند نفر والیبال بازی می کنند ولی بسکتبال بازی نمی کنند؟
 ت) چند نفر فقط در یک رشته بازی می کنند؟
- ۴ اگر بخواهیم یک قفل دارای رمز ۵ رقمی و فاقد صفر را که سه رقم آن ۷ و ۲ و ۳ هستند باز کنیم و تمام اعداد ۵ رقمی را که شامل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند در اختیار داریم و بستن و امتحان کردن هر یک از این اعداد ۵ رقمی، ۶ ثانیه طول بکشد، برای باز کردن این قفل حداکثر چقدر زمان نیاز داریم؟
- ۵ چه تعداد تابع چون $f: A \rightarrow B$ می توان تعریف کرد اگر بدانیم $|A|=5$ و $|B|=4$ است؟ چه تعداد از این توابع یک به یک هستند؟
- ۶ به چند طریق می توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم؟
- ۷ به چند طریق می توان ۶ فیلم سینمایی را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به طوری که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟
- ۸ ثابت کنید، در بین هر ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده اند.
- ۹ ثابت کنید، اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول تحصیل باشند لاقلاً ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.
- ۱۰ حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لاقلاً ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟
- ۱۱ ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد وجود دارد که مجموعشان عددی زوج باشد.
- ۱۲ مجموعه اعداد $A = \{1, 2, \dots, 84\}$ را در نظر می گیریم. نشان دهید هر زیرمجموعه ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر با ۸۵ باشد.

۱۳ مجموعه اعداد $A = \{1, 5, 9, 13, \dots, 77, 81, 85\}$ را که به صورت یک تصاعد عددی مرتب شده‌اند، در نظر می‌گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم، نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با 90 باشد.

۱۴ ۱۳ نقطه درون یک مستطیل 6×8 قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصله آنها از هم، کمتر از $\sqrt{8}$ باشد.

۱۵ ۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می‌گیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد، طوری که مختصات نقطه وسط این دو نقطه نیز صحیح می‌باشد.

۱ امیری، حمیدرضا. (۱۳۸۶). ورودی به نظریه اعداد. انتشارات مدرسه.
۲ بهزاد، مهدی؛ رجالی، علی؛ عمیدی، علی و محمودیان، عبادالله. (۱۳۹۶). کتاب درسی ریاضیات گسسته. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی وزارت آموزش و پرورش.

- ۳ D.B. West (2001). Introduction to graph theory.
۴ H.M. Edgar. (2004). A first course in number theory.
۵ J. A. Bondy, U.S.R. Murty. (2008). Graph theory.
۶ J.H. Van Lint, R.M. Wilson. (2003). A course in Combinatorics.
۷ K.H. Rosen. (2016). Handbook of Discrete and combinatorial Mathematics. CRC Press.
۸ S.S. Epp (2011). Discrete Mathematics an Introduction to Mathematics Reasoning, Cengage Learning.
۹ S.S. Epp (2011). Discrete Mathematics with Applications.
۱۰ T. Koshy. (2007). Elementary Number Theory with Applications. ELSEVIER.
۱۱ T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater. (1998). Fundamentals of domination in graph.
۱۲ T. Sundstrom (2016). Mathematical Reasoning: Writing and proof, Grand valley state university.



سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایفای نقش خطیر خود در اجرای سند تحول بنیادین در آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، مشارکت معلمان را به‌عنوان یک سیاست اجرایی مهم دنبال می‌کند. برای تحقق این امر در اقدامی نوآورانه سامانه تعاملی بر خط اعتبارسنجی کتاب‌های درسی راه‌اندازی شد تا با دریافت نظرات معلمان درباره کتاب‌های درسی نونگاشت، کتاب‌های درسی را در اولین سال چاپ، با کمترین اشکال به دانش‌آموزان و معلمان ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب این فرایند، همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پرورشی استان‌ها، گروه‌های آموزشی و دبیرخانه راهبری دروس و مدیریت محترم پروژه آقای محسن باهو نقش سازنده‌ای را بر عهده داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش تمامی این همکاران، اسامی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائه نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌شود.

اسامی دبیران و هنرآموزان شرکت کننده در اعتبارسنجی کتاب ریاضیات گسسته با کد ۱۱۲۲۱۵

ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت	ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت
۱	امین مجیدی	گیلان	۲۸	فرود نجفی	فارس
۲	خلیل تیموری	ایلام	۲۹	نرجس زنگارکی	مرکزی
۳	نرگس اصلانی گرمی	آذربایجان شرقی	۳۰	عباسعلی ایزدی قصبه	گیلان
۴	آسیه رضائی گرجی	البرز	۳۱	علی اصغر بسطامی	ایلام
۵	آزاده قنادیان	همدان	۳۲	رسول حاجی زاده	شهرتهران
۶	طاهره جعفری	شهرتهران	۳۳	زهره محمدی	چهارمحال و بختیاری
۷	پرویز رضایی	فارس	۳۴	علیرضا محمدی	بوشهر
۸	عادل محمدی	خوزستان	۳۵	فرزانه کد خدایی	لرستان
۹	فرزانه منصوری	خراسان شمالی	۳۶	شفیع ملایی	کردستان
۱۰	سهیلا چناری	کرمانشاه	۳۷	مریم فرهادپور	خراسان جنوبی
۱۱	محمد درویش زاده	اصفهان	۳۸	زهرا درویش توانگر	شهرستانهای تهران
۱۲	کامران کبیری	چهارمحال و بختیاری	۳۹	مرتضی جعفری	سیستان و بلوچستان
۱۳	مهران قاسمی	آذربایجان غربی	۴۰	نجمه یزدان بخش	هرمزگان
۱۴	جواد بهرامی	البرز	۴۱	هوشنگ افشین	خوزستان
۱۵	مهناز رحیمی	اصفهان	۴۲	رضا صیادی	کرمانشاه
۱۶	سید عیسی حسینی	قزوین	۴۳	فیروزه شاهین شالکوهی	گیلان
۱۷	لقمان حسینی	کردستان	۴۴	سکینه حبیبی	لرستان
۱۸	حمیده عبدالهی	مازندران	۴۵	مهدی قسوره	خراسان جنوبی
۱۹	رضا زید آبادی	خراسان رضوی	۴۶	علی عبدالمحمد	قم
۲۰	ام البنین ربیعی	سمنان	۴۷	سیدحسین باقرنژاد	خراسان شمالی
۲۱	علی جعفری	همدان	۴۸	آذر کریمیان	قم
۲۲	سمیه پورجواران	کرمان	۴۹	مریم امیدیان	سمنان
۲۳	فاطمه سقائیان	خوزستان	۵۰	وحید سجادپور	کهگیلویه و بویراحمد
۲۴	جمال نوین	یزد	۵۱	مسعودرضا عرب یارمحمدی	گلستان
۲۵	محبوبه رضانی	شهرستانهای تهران	۵۲	جلال سرحدی	مازندران
۲۶	سید رضا پرپینچی	قزوین	۵۳	فرزاد جوادی	آذربایجان غربی
۲۷	محمد کارآمد	کرمان	۵۴	سیما حقیقی اذر	گلستان