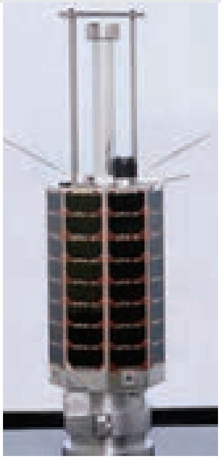
فصل ۴ مشتق



ماهواره رصد

ماهواره طلوع

ماهواره امید

ماهواره‌بر سیمرغ ـ پایگاه فضایی امام‌خمینی(ره)

مفهوم مشتق به مسئله تاریخی خط مماس در یک نقطه از منحنی و مسئله یافتن سرعت لحظه‌ای یک جسم مربوط می‌شود. امروزه مشتق در علوم مختلف کاربردهای وسیع و گسترده‌ای دارد. به‌طور مثال در صنایع فضایی، مسائلی نظیر کمینه‌سازی سوخت مصرفی، بیشینه‌سازی سرعت و کمینه‌سازی زمان سفر با مفهوم مشتق ارتباط دارند.

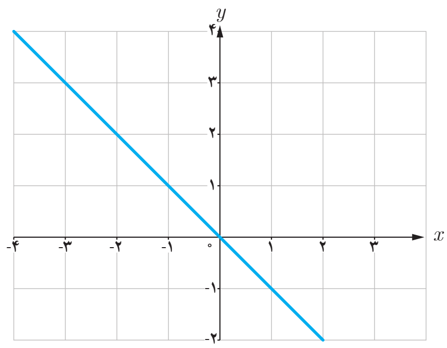
درس اول

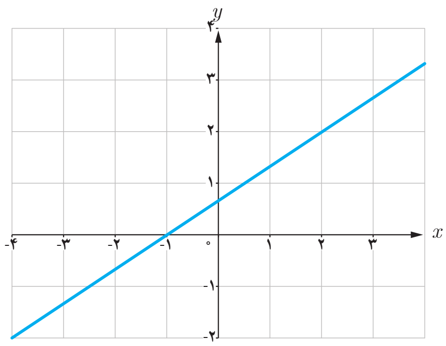
آشنایی با مفهوم مشتق

مشتق یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که دارای کاربردهای وسیع در ریاضیات و علوم دیگر است. ایده اولیه در مورد مفهوم مشتق، به شیب یک خط مربوط می‌شود. به کمک این ایده به تدریج به‌صورت دقیق‌تری با مفهوم مشتق آشنا می‌شویم.

فعالیت

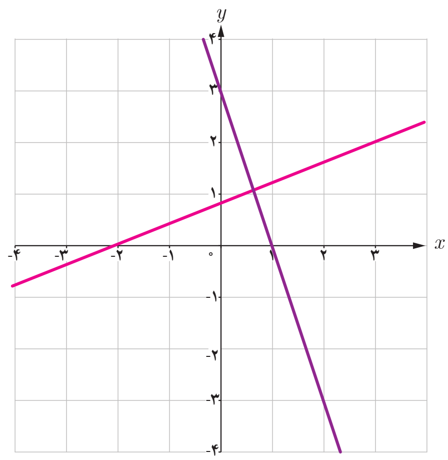
۱ شیب هر یک از خط‌های داده شده را به‌دست آورید و مشخص کنید که کدام یک مثبت و کدام یک منفی است؟

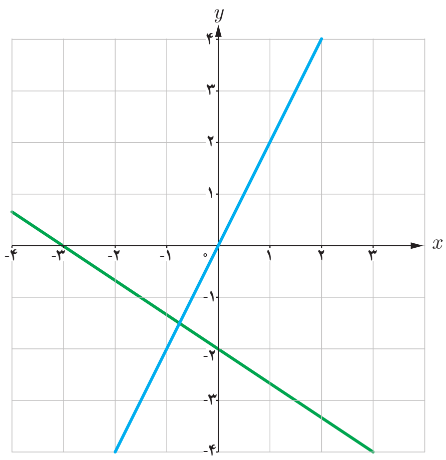




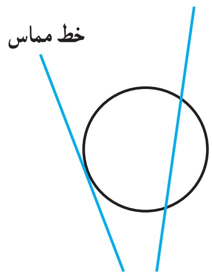
۲ با توجه به جدول روبه‌رو، نمودار مربوط خط‌های d_1 , d_2 , d_3 و d_4 را روی شکل مشخص کنید.

خط	d_1	d_2	d_3	d_4
شیب	$\frac{۲}{۵}$	-۳	۲	$-\frac{۲}{۳}$



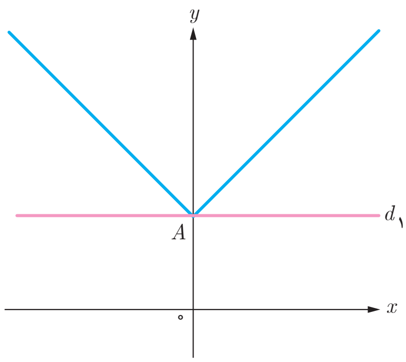


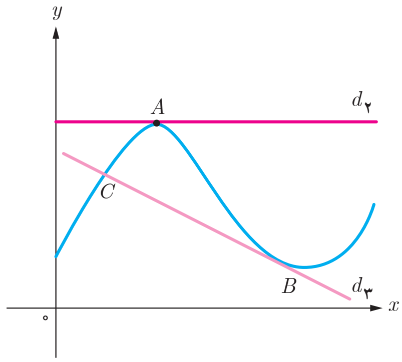
خط مماس بر یک منحنی

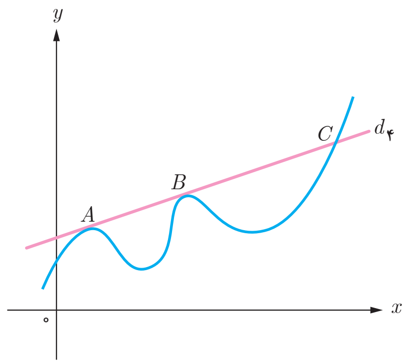


یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی مسئله‌ای تاریخی است که زمانی طولانی برای حل آن صرف شده است. مفهوم خط مماس بر یک دایره از زمان‌های گذشته مشخص بوده است. خط مماس بر دایره، خطی است که با دایره یک و فقط یک نقطه مشترک داشته باشد. این تعریف در حالت کلی برای همه منحنی‌ها صادق نیست.

خط‌های d_1 تا d_4 را در نظر بگیرید. خط d_2 در نقطه A، خط d_3 در نقطه B و خط d_4 در نقاط A و B بر منحنی مماس هستند. خط d_1 در نقطه A بر منحنی مماس نیست. همچنین خطوط d_3 و d_4 در نقطه c بر منحنی مماس نیستند. در ادامه این درس با دلایل این امر به صورت دقیق‌تری آشنا خواهید شد.

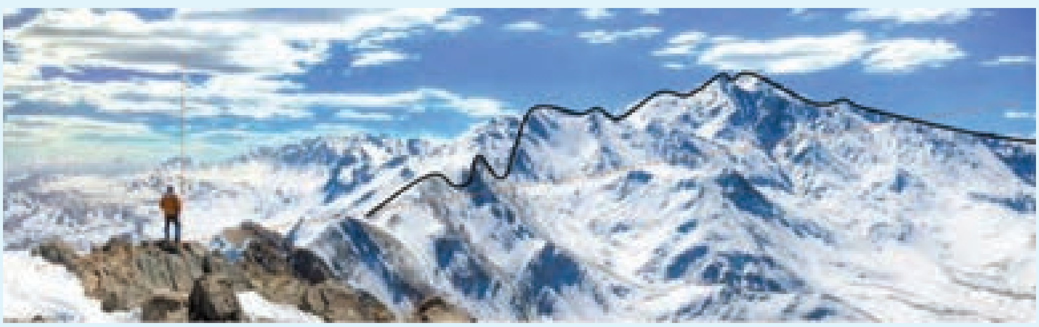






خواندنی

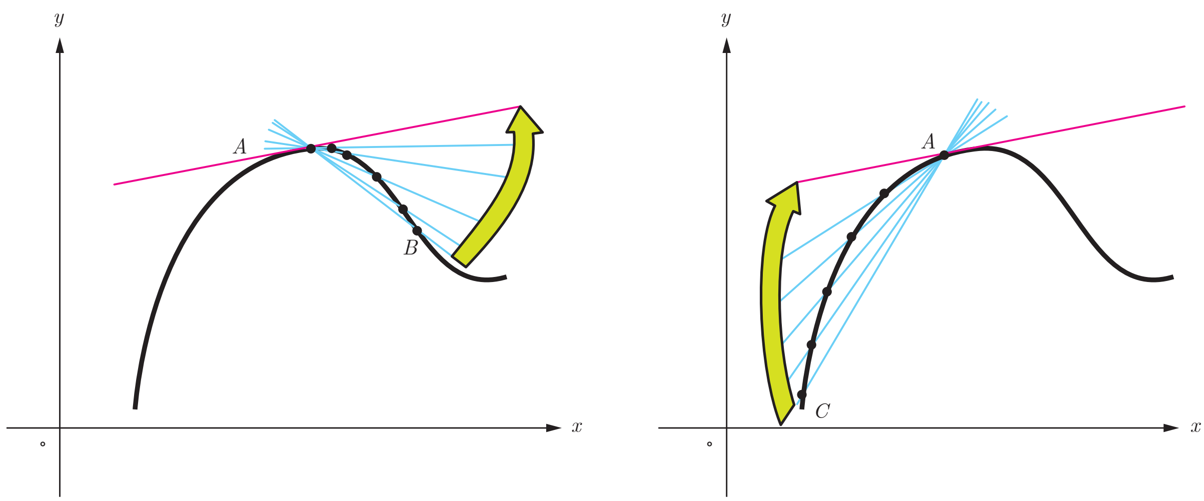
از نظر تاریخی مسئله یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی، برای اولین بار در اوایل قرن هفدهم میلادی زمانی مطرح شد که فرما ریاضی‌دان فرانسوی اقدام به تعیین ماکزیمم‌ها و مینیمم‌های چند تابع خاص کرد. فرما دریافت که خطوط مماس، در نقاطی که منحنی ماکزیمم یا مینیمم دارد باید افقی باشد. از این‌رو به نظرش رسید که مسئله تعیین نقاط ماکزیمم یا مینیمم به حل مسئله دیگر، یعنی یافتن مماس‌های افقی مربوط می‌شود. تلاش برای حل این مسئله کلی‌تر بود که فرما را به کشف برخی از ایده‌های مقدماتی مفهوم «مشتق» هدایت کرد. مفهوم مشتق به شکل امروزی آن توسط نیوتن و به فاصله چند سال بعد از او توسط لایپ نیتس، مستقل از یکدیگر پدید آمد. شیوه نیوتن مبتنی بر دیدگاه فیزیکی بود و از مشتق برای به دست آوردن سرعت لحظه‌ای استفاده کرد، اما لایپ نیتس با دیدگاهی هندسی از مشتق برای به دست آوردن شیب خط مماس در منحنی‌ها استفاده کرد.



اکنون سعی می‌کنیم که به کمک نمودار منحنی، خط مماس بر منحنی در یک نقطه را بررسی کنیم. نقطه ثابت A را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. خطی که از A و B می‌گذرد یک خط قاطع نامیده می‌شود. روی منحنی نقطه‌های دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم و خط‌های گذرنده از A و آن نقطه‌ها را رسم می‌کنیم. حدس بزنید که وقتی نقاط به قدر کافی به A نزدیک می‌شوند، برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به‌عبارت دیگر خط‌های قاطع به چه خطی نزدیک می‌شوند؟

اکنون نقطه C را سمت چپ نقطه A اختیار می‌کنیم و خط قاطع AC را رسم می‌کنیم. مانند قبل نقاط دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم. حدس می‌زنید برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به‌طور شهودی می‌توان گفت:

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A حد شیب خط‌های قاطع گذرنده از A است به شرطی که نقطه‌ها به قدر کافی به A نزدیک شوند.



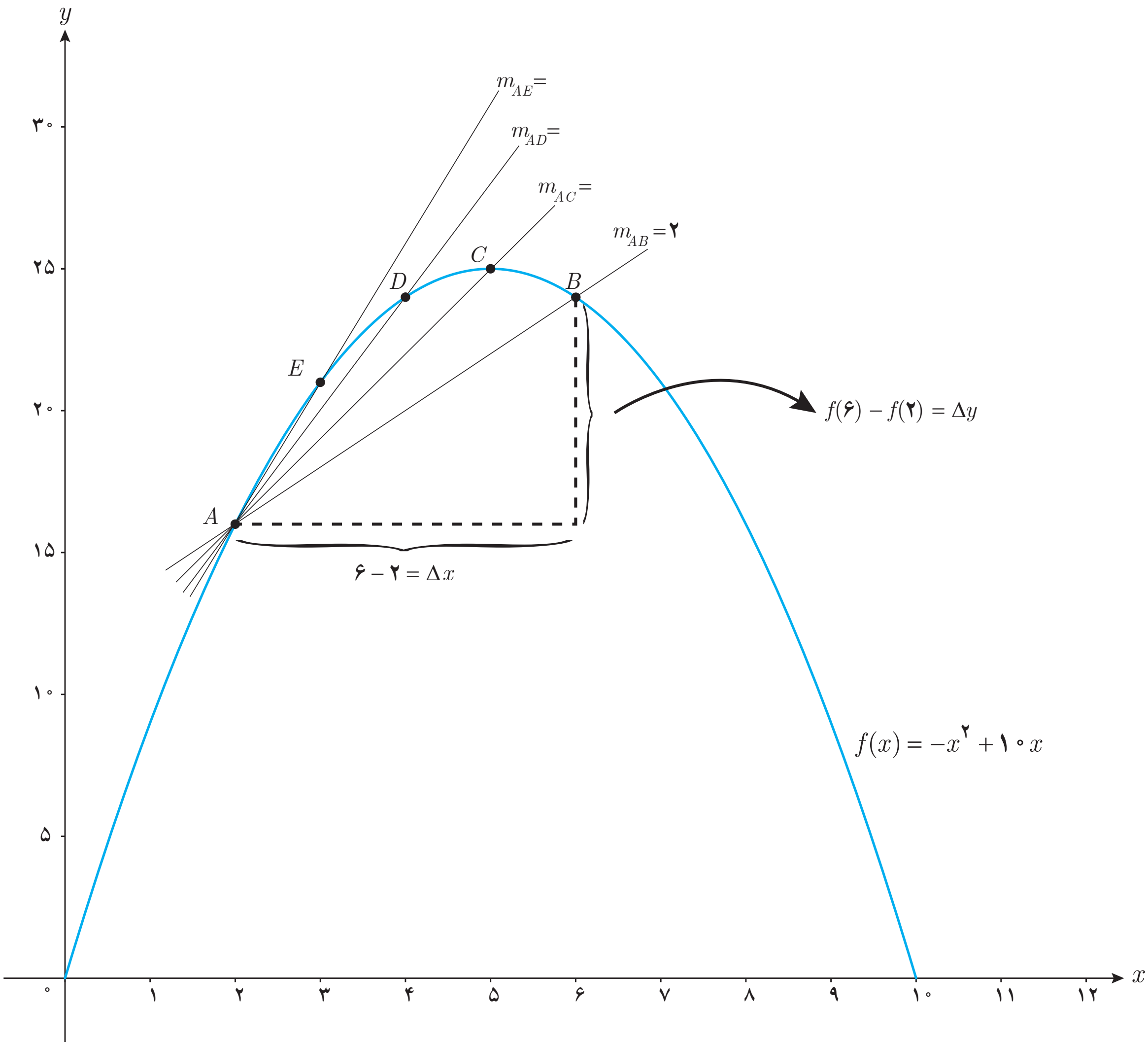
در ادامه این بحث را دقیق‌تر بررسی خواهیم کرد.

فعالیت

الف) تابع $f(x)=-x^{۲}+۱۰x$ داده شده است، اگر $۰\le x\le ۱۰$ نقاط $A(۲,f(۲))$، $B(۶,f(۶))$، $C(۵,f(۵))$، $D(۴,f(۴))$ و $E(۳,f(۳))$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد یعنی m_{AB} از دستور زیر به‌دست می‌آید:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{f(۶)-f(۲)}{۶-۲}=\frac{۲۴-۱۶}{۴}=\frac{۸}{۴}=۲$$

به همین روش m_{AC} و m_{AD} و m_{AE} را به‌دست آورید.



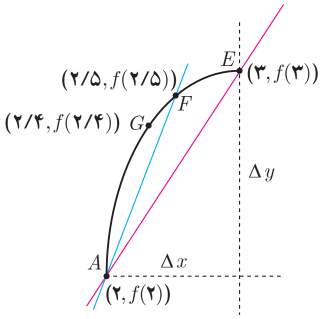
همان‌طور که می‌دانید برای محاسبه شیب خط AB نسبت تغییر عمودی را به تغییر افقی به‌دست می‌آوریم. اگر این تغییرات را به ترتیب با Δy و Δx نمایش دهیم، داریم :

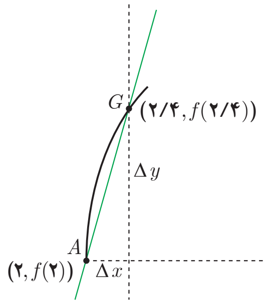
$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

در هنگام محاسبه شیب‌های بالا، توضیح دهید که Δxها چگونه تغییر می‌کنند؟

$[۲,۶]$	۲ ________________ ۶	$\Delta x=۶-۲=۴$	$\Delta y=۲۴-۱۶=۸$
$[۲,۵]$	۲ ____________ ۵	$\Delta x=۵-۲=۳$	$\Delta y=۲۵-۱۶=۹$
$[۲,۴]$	۲ ________ ۴	$\Delta x=۴-۲=۲$	$\Delta y=۲۴-۱۶=۸$
$[۲,۳]$	۲ ____ ۳	$\Delta x=۳-۲=۱$	$\Delta y=۲۱-۱۶=۵$

ب) حال فرض کنید که با ادامه روندی که در قسمت (الف) اختیار کردیم، نقاط بیشتری را نزدیک به A انتخاب کنیم. شیب خطوط به‌دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، منحنی $f(x)=-x^۲+۱۰x$ در فاصله [۲,۳] رسم شده است. در ادامه نمودار تابع در بازه [۲,۲/۴] رسم شده است.





$$m_{AF}=\frac{f(۲/۵)-f(۲)}{۲/۵-۲}=\frac{۱۸/۷۵-۱۶}{۰/۵}=\frac{۲/۷۵}{۰/۵}=۵/۵$$

$$m_{AG}=\frac{f(۲/۴)-f(۲)}{۲/۴-۲}=\text{……}=$$

اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری در نظر بگیریم، شیب خطوط به‌دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، با تکمیل جدول و مقایسه شیب خط‌های قاطع، شیب خط مماس را حدس بزنید.

بازه $[a,b]$	شیب خطی که از نقاط $(a , f(a))$ و $(b , f(b))$ می‌گذرد. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
[۲,۲/۴]	$\frac{f(۲/۴)-f(۲)}{۲/۴-۲}=\text{……}=\text{……}=۵/۶$
[۲,۲/۳]	$\text{……}=\text{……}=\text{……}=$
[۲,۲/۲]	$\frac{f(۲/۲)-f(۲)}{۲/۲-۲}=\frac{۱۷/۱۶-۱۶}{۰/۲}=\frac{۱/۱۶}{۰/۲}=۵/۸$
[۲,۲/۱]	$\frac{f(۲/۱)-f(۲)}{۲/۱-۲}=\frac{۱۶/۵۹-۱۶}{۰/۱}=\frac{۰/۵۹}{۰/۱}=۵/۹$
[۲,۲/۰۱]	$\frac{f(۲/۰۱)-f(۲)}{۲/۰۱-۲}=\frac{۱۶/۰۵۹۹-۱۶}{۰/۰۱}=\frac{۰/۰۵۹۹}{۰/۰۱}=۵/۹۹$
[۲,۲/۰۰۱] ⋮	$\frac{f(۲/۰۰۱)-f(۲)}{۲/۰۰۱-۲}=\frac{۱۶/۰۰۵۹۹۹-۱۶}{۰/۰۰۱}=۵/۹۹۹$ ⋮ ⋮
[۲,۲+h] (h یک عدد خیلی کوچک و مثبت است.)	$\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}\longrightarrow$?

اگر بخواهیم دقیق‌تر صحبت کنیم، باید در مورد مقادیر عبارت $\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$ وقتی h به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) است، بررسی کنیم. روند بالا این حدس را تقویت می‌کند که هر چقدر که بخواهیم می‌توانیم این مقادیر را به عدد ۶ نزدیک کنیم مشروط بر آنکه h را به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) اختیار کنیم. به عبارت دیگر حدس می‌زنیم که : $\lim\limits_{h\to ۰^+}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=۶$
کافی است با محاسبه مقدار حد، صحت حدس خود را بررسی کنیم :

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{-(۲+h)^۲+۱۰(۲+h)-۱۶}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{-(h^۲+۴h+۴)+۲۰+۱۰h-۱۶}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰^+}\frac{-h^۲-۴h-\cancel{۴}+\cancel{۴}+۱۰h}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{-h^۲+۶h}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{h(-h+۶)}{h}=\lim_{h\to ۰}(-h+۶)=۶$$

به طریق مشابه می‌توان دید که اگر نقاط روی منحنی را در سمت چپ A اختیار کنیم، به عبارت دیگر اگر بازه‌هایی مانند، [۱/۵,۲]، [۱/۶,۲]، [۱/۷,۲]، [۱/۸,۲] و... را در نظر بگیریم شیب خط‌های قاطع برابر با ۶/۵، ۶/۴ ، ۶/۳، ۶/۲، ... خواهد شد. به عبارت دیگر در این حالت هم شیب خط‌های قاطع به هر اندازه که بخواهیم به عدد ۶ نزدیک می‌شوند، مشروط بر آنکه h به قدر کافی از سمت چپ به صفر نزدیک شود، یعنی داریم : $\lim\limits_{h\to ۰^-}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=۶$

بنابراین به طور کلی می‌توان نوشت : $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=۶$

شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه $A(a\,,f(a))$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } A = \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

به شرط آنکه این حد موجود و متناهی باشد.

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند، یعنی :

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

حد مذکور را شیب منحنی در a نیز می‌نامند.

بنابراین در مثال قبل داریم $f'(۲)=۶$. در ادامه $f'(۳)$ برای $f(x)=-x^۲+۱۰x$ محاسبه شده است :

$$f'(۳)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-(۳+h)^۲+۱۰(۳+h)-۲۱}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-۹-۶h-h^۲+۳۰+۱۰h-۲۱}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{-h^۲+۴h}{h}=\lim_{h\to ۰}(-h+۴)=۴$$

مثال : معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=-x^۲+۱۰x$ را در نقطه $A(۲,f(۲))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

حل : با توجه به آنچه که در فعالیت قبل مشاهده شد :

A شیب خط مماس در نقطه $=f'(۲)=۶$

$A\,(۲,f(۲))=(۲,۱۶)$

$y-۱۶=۶(x-۲)\Rightarrow y=۶x+۴$

کار در کلاس

معادله خط مماس بر منحنی تابع $y=x^۲+۳$ را در نقطه‌ای به طول ۲- بنویسید.

تذکر : با نمادهای معرفی شده در فعالیت در مورد شیب خط‌های قاطع می‌توان دستورهای معادل دیگری برای محاسبه مشتق در یک نقطه به‌دست آورد، به‌طور مثال شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد برابر است با :

$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

و از آنجا :

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

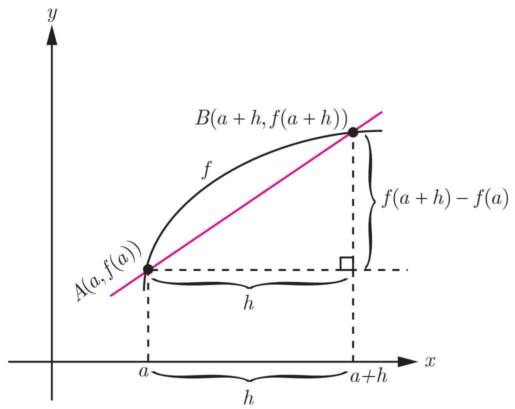
مثال : اگر $f(x)=-x^۲+۱۰x$، $f'(۲)$ را از دستور بالا به‌دست آورید :

$$f'(۲)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(۲+\Delta x)-f(۲)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{-(۲+\Delta x)^۲+۱۰(۲+\Delta x)-۱۶}{\Delta x}$$

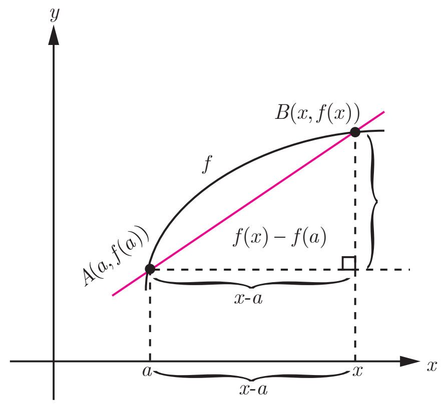
$$=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{-\cancel{۴}-\Delta x^۲-۴\Delta x+\cancel{۲۰}+۱۰\Delta x-\cancel{۱۶}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{-\Delta x^۲+۶\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\Delta x(-\Delta x+۶)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}(-\Delta x+۶)=۶$$

محاسبه $f'(a)$ به روش دیگر

مشتق تابع f در نقطه $x=a$ به‌صورت : $f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ تعریف شد. اکنون دستور دیگری برای مشتق تابع f در نقطه $x=a$ می‌یابیم که در برخی محاسبات کار را ساده‌تر می‌کند.



(الف)



(ب)

با استفاده از نموداری مشابه نمودار (الف) برای محاسبه مشتق f در a داریم :

$$AB \text{ شیب خط } = m_{AB} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$A \text{ شیب خط مماس بر منحنی در } = \lim_{h\to ۰} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

با استفاده از نمودار (ب) راه دیگر محاسبه شیب خط مماس این است که نقطه دلخواه B را به مختصات $(x,f(x))$ در نظر بگیریم در این صورت داریم :

$$AB \text{ شیب خط } = m_{AB} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

برای محاسبه شیب خط مماس کافی است که x را مرتباً به a نزدیک کنیم. در این صورت شیب خط مماس برابر با $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ است مشروط بر اینکه این حد موجود باشد (واضح است که مانند قبل x باید از راست و چپ به قدر کافی به a نزدیک شود). به عبارت دیگر : $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

مثال : اگر $f(x)=x^۲$ ، $f'(۳)$ را به دو روش به‌دست آورید.

حل :

روش اول :

$$f'(۳) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(۳+h)-f(۳)}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{(h+۳)^۲-۹}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{h^۲+۶h+۹-۹}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{h^۲+۶h}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰} \frac{h(h+۶)}{h} = \lim_{h\to ۰}(h+۶) = ۶$$

روش دوم :

$$f'(۳) = \lim_{x\to ۳} \frac{f(x)-f(۳)}{x-۳} = \lim_{x\to ۳} \frac{x^۲-۹}{x-۳} = \lim_{x\to ۳} \frac{(x-۳)(x+۳)}{x-۳} = \lim_{x\to ۳}(x+۳) = ۶$$

در موقعیت‌های مختلف، ممکن است یکی از این دو روش بر دیگری به دلیل ساده‌تر بودن محاسبات برتری داشته باشد.

کار در کلاس

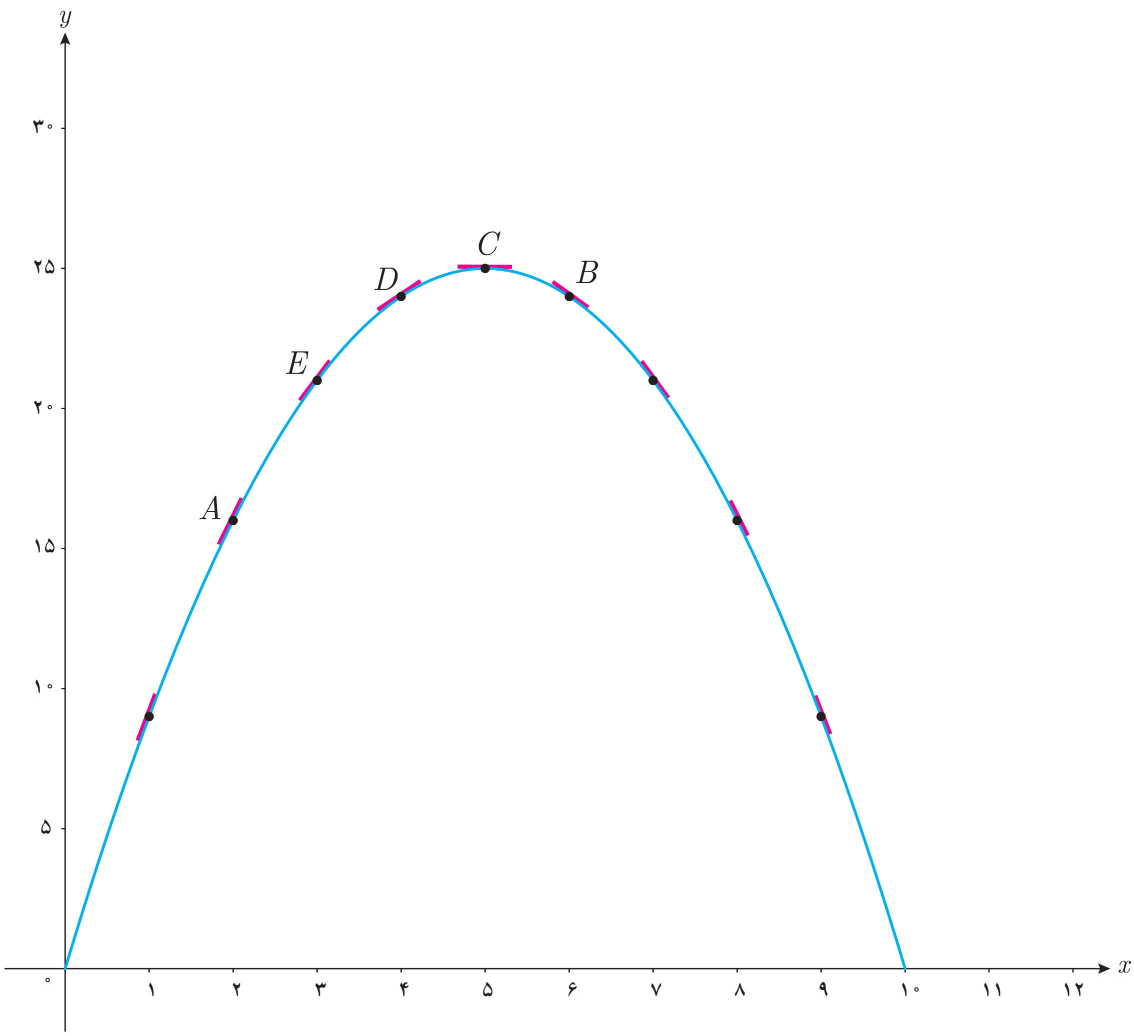
الف) برای تابع $f(x)=-x^2+10x$ ، $f'(8)$ و $f'(5)$ را حساب کنید.

ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشتق تابع در آنها قرینه یکدیگر باشد.

پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی مشتق منفی است.

ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار، شیب خط‌های مماس بر منحنی در نقاط ۳ و ۴ را با هم مقایسه کنید.

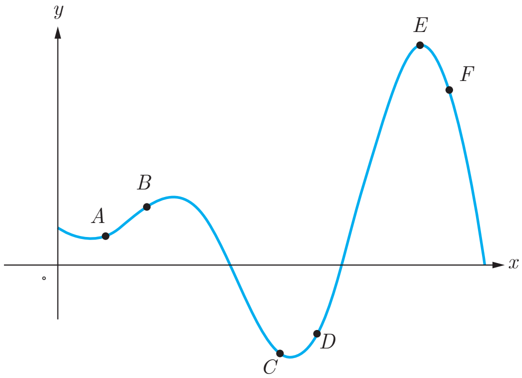
ث) با محاسبه $f'(3)$ و $f'(4)$ صحت حدس خود را بررسی نمایید.



تمرین

۱ اگر $f(x) = ۳x^{۲} - ۲x + ۱$، $f'(۲)$ را به‌دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

۲ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.



نقطه	شیب
	-۳
	-۱
	۰
	$\frac{۱}{۲}$
	۱
	۲

۳ برای نمودار $y = f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.

الف) شیب نمودار در نقطه A

ب) شیب نمودار در نقطه B

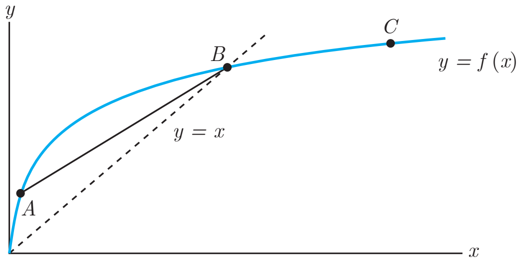
پ) شیب نمودار در نقطه C

ت) شیب خط AB

ث) شیب خط $y=۲$

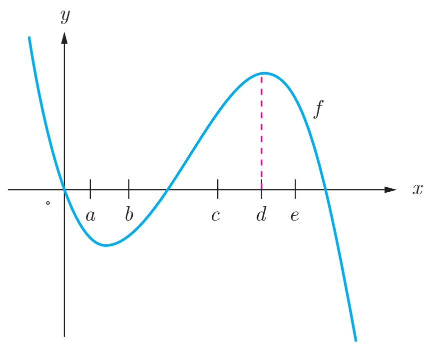
ج) شیب خط $y=x$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب $m_۱$ ، $m_۲$ ، ... و $m_۶$ در نظر بگیرید.



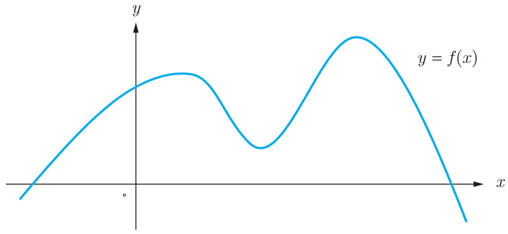
۴ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a, b, c, d و e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

$f'(x)$	x
۰	
۰/۵	
۲	
$-۰/۵$	
-۲	



۵ نقاطی مانند A، B، C، D، E، F و G را روی نمودار $y=f(x)$ مشخص کنید به طوری که :

الف) A، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.



ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

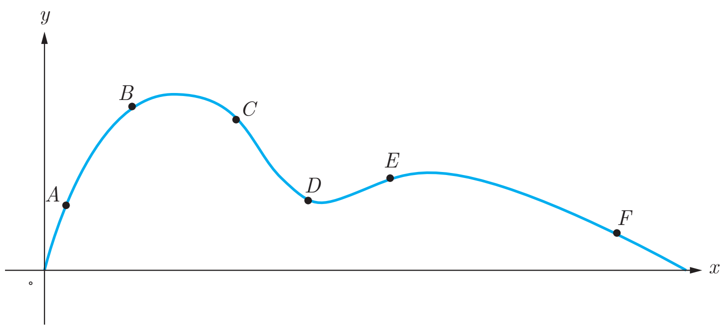
ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

۶ اگر $f(x)=x^3-2$ ، $f'(-1)$ را به‌دست آورید.

۷ نقاط A، B، C، D، E و F را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام‌یک نادرست است؟



الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است.

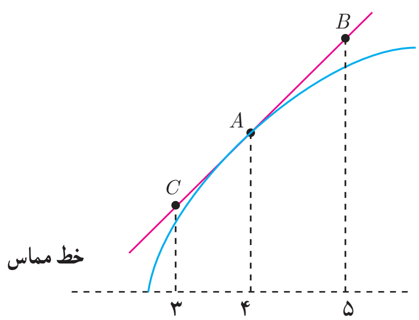
ب) $m_A<m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را با m_A نمایش داده‌ایم)

پ) $m_E<m_B<m_A$

ت) شیب منحنی در نقاط F، D و C منفی است.

ث) $m_F<m_D<m_C$

ج) $m_C<m_D<m_F<m_E<m_B<m_A$



۸ برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم : $f'(4)=1/5$ و $f(4)=25$ باتوجه به شکل مختصات نقاط A , B و C را بیابید.