فصل

۵ کاربرد مشتق

مشتق تابع، کاربردهای چشمگیری در حوزه‌های مختلف دارد. مسائل بهینه‌سازی یکی از این عرصه‌هاست که مشتق تابع به‌طور گسترده‌ای در آنها مورد استفاده قرار می‌گیرد. دامنهٔ این نوع مسائل از طراحی قطعات مختلف و شکل ظاهری انواع وسایل نقلیه تا مینیمم نمودن فاصله، زمان و هزینه و همچنین ماکزیمم کردن حجم، مساحت و سود گسترده است.

درس اوّل — اکسترمم‌های تابع

درس دوم — بهینه‌سازی

درس اول

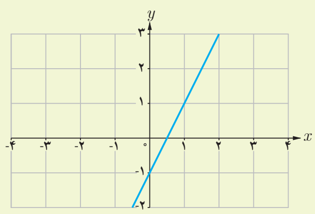
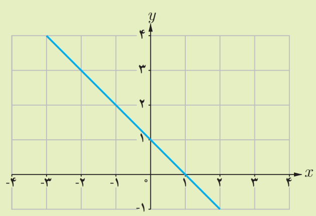
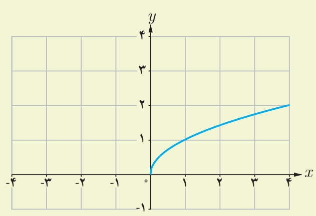
اکسترمم‌های تابع

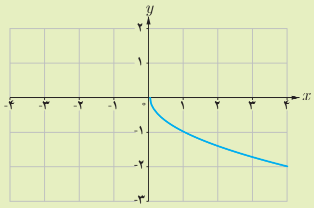
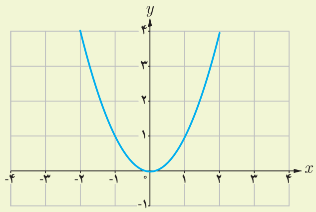
یکنوایی تابع و ارتباط آن با مشتق

در فصل اول، تعریف تابع صعودی و تابع نزولی را دیدیم. در اینجا می‌خواهیم ارتباط علامت مشتق یک تابع را با صعودی یا نزولی بودن آن تابع بررسی کنیم.

فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید. در این جدول ضابطه و نمودار چند تابع ارائه شده است که از قبل با آنها آشنا هستیم. همچنین یکنوایی این تابع‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. به علاوه، مشتق هر کدام از این تابع‌ها، تعیین علامت شده است. جدول را کامل کنید.

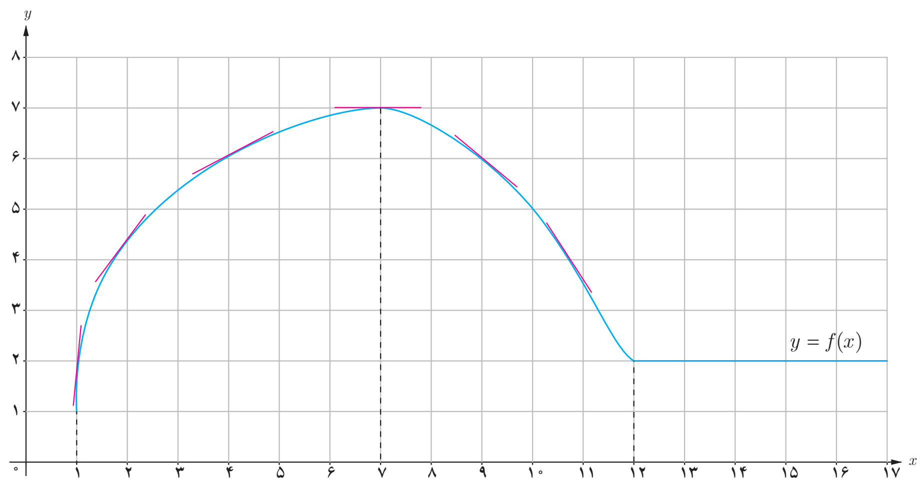
علامت مشتق	تابع مشتق	یکنوایی تابع	نمودار تابع	ضابطهٔ تابع
f' همواره مثبت است	$f'(x)=2$	تابع f در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است		$f(x)=2x-1$
g' همواره ... است	$g'(x)=-1$	تابع g در $\mathbb{R}$ اکیداً ... است		$g(x)=-x+1$
h' در $(0,+\infty)$ ... است	$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	تابع h در $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است		$h(x)=\sqrt{x}$

u' در $(\circ\,,+\infty)$، همواره ...	$u'(x) = \dots$	تابع u در $[\circ\,,+\infty)$ اکیداً ... است		$u(x) = -\sqrt{x}$
k' در $(-\infty,\circ)$ منفی و در $(\circ,+\infty)$ ...... است.	$k'(x) = ۲x$	تابع k در $(-\infty\,,\circ)$ اکیداً نزولی و در $(\circ\,,+\infty)$ اکیداً صعودی است.		$k(x) = x^۲$
				$l(x) = \dots$

با بررسی جدول بالا، توضیح دهید که چه رابطه‌ای بین علامت مشتق تابع در یک بازه و یکنوایی تابع در آن بازه وجود دارد.

کار در کلاس

از فصل قبل می‌دانیم که مشتق هر تابع در یک نقطه، با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه برابر است. تابع زیر را درنظر بگیرید :



ملاحظه می‌شود که :

الف) در بازهٔ $(۱\,,۷)$ که f اکیداً صعودی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f، مثبت است؛ بنابراین در این بازه علامت f' .... است.

ب) در بازهٔ $(۷\,,۱۲)$ که تابع اکیداً نزولی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f، ..... است؛ بنابراین در این بازه علامت f' .... است.

پ) در بازه $(۱۲\,,+\infty)$ که تابع، مقدار ثابت دارد، مقدار f' برابر ..... است.

مطلب فوق برای توابع مشتق‌پذیر همواره درست است که آن‌را به شکل زیر بیان می‌کنیم :

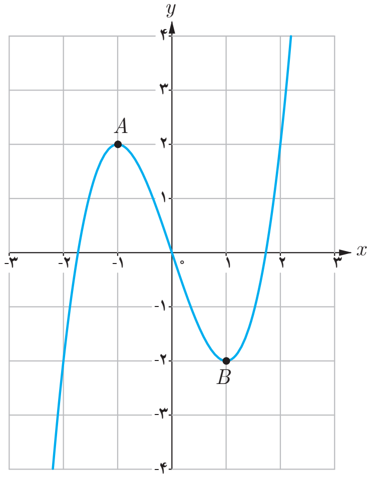
آزمون یکنوایی تابع

الف) در یک بازه از دامنهٔ f اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.

ب) در یک بازه از دامنهٔ f اگر مقدار f' موجود و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.

پ) در یک بازه از دامنهٔ f اگر مقدار f' موجود و برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.

بنابراین برای مشخص کردن بازه‌های مربوط به صعودی بودن یا نزولی بودن تابع f، کافی است مانند مثال زیر، f' را تعیین علامت کنیم.



مثال[1] : تابع $f(x) = x^۳ - ۳x$ در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه‌ها اکیداً نزولی است؟

حل : f' را به‌دست آورده و آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۳$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۱ \end{cases}$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
بازه		$(-\infty , -۱)$		$(-۱ , ۱)$		$(۱ , +\infty)$	
علامت f'		+	۰	−	۰	+	
یکنوایی f	$-\infty$	اکیداً صعودی ↗	۲	اکیداً نزولی ↘	-۲	اکیداً صعودی ↗	$+\infty$

نمودار تابع f مربوط به مثال قبل را رسم کرده‌ایم. آن را با جدول مقایسه کنید.

اکسترمم‌های نسبی تابع

در نمودار این تابع، نقاط به طول ۱− و ۱ را که صفرهای تابع f' هستند مورد توجه قرار دهید. اهمیت این نقاط در این مثال از این جهت است که در هر یک از آنها، رفتار تابع از نظر صعودی یا نزولی بودن عوض شده است (جدول ملاحظه شود). اگر این دو نقطه را به ترتیب A و B بنامیم، آنگاه A نقطهٔ ماکزیمم نسبی f و B نقطهٔ مینیمم نسبی آن است.

۱ــ رسم نمودار تابع‌های درجه سوم در حالت کلی در زمره اهداف کتاب حاضر نیست.

تعریف : گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول c ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند $I \subseteq D_f$ باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$.
در این حالت $f(c)$ مقدار ماکزیمم نسبی تابع f نامیده می‌شود.

همچنان‌که گفته شد، تابع مثال قبل در نقطهٔ $A\ (-1, 2)$ ماکزیمم نسبی دارد و مقدار ماکزیمم نسبی تابع برابر ۲ می‌باشد. مینیمم نسبی به روش مشابه تعریف می‌شود.

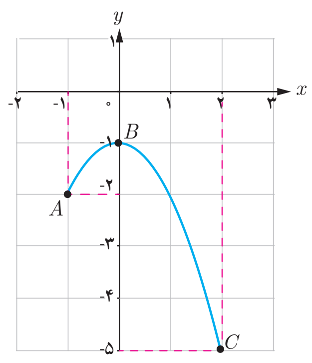
تعریف : گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول c مینیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند I باشد که برای هر $x \in I \subseteq D_f$ داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. در این حالت $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

در مثال قبل مقدار مینیمم نسبی تابع چقدر است؟

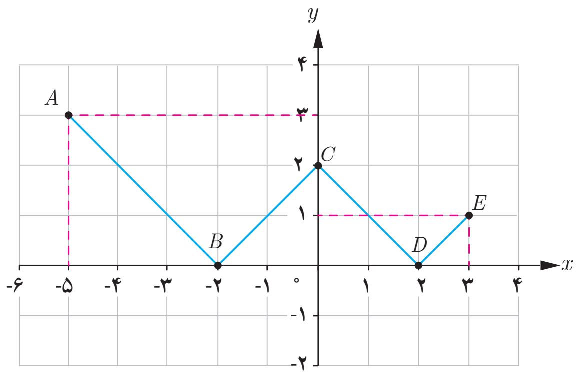
تذکر : نقاط ماکزیمم و مینیمم یک تابع را نقاط اکسترمم آن تابع هم می‌گوییم. در تابع مثال قبل، نقاط A و B اکسترمم‌های نسبی تابع هستند.

کار در کلاس

نوع اکسترمم‌های نسبی هر یک از توابع زیر را در نقاط مشخص شده تعیین کنید و جدول‌ها را کامل کنید.



ب) $g(x) = -x^2 - 1 \quad x \in [-1, 2]$



الف) $f(x) = ||x| - 2|\ ,\ x \in [-5, 3]$

نقطه	نوع اکسترمم نسبی	مقدار اکسترمم نسبی	مقدار مشتق
A	نقطهٔ اکسترمم نسبی نیست	–	–
B	max نسبی	...	$f'(0)$ برابر صفر است
C	...	–	–

نقطه	نوع اکسترمم نسبی	مقدار اکسترمم نسبی	مقدار مشتق
A	نه max نسبی و نه min نسبی	–	–
B	min نسبی	۰	$f'(-2)$ موجود نیست
C	...	۲	...
D	...	...	...
E	...	–	–

نقاط بحرانی تابع

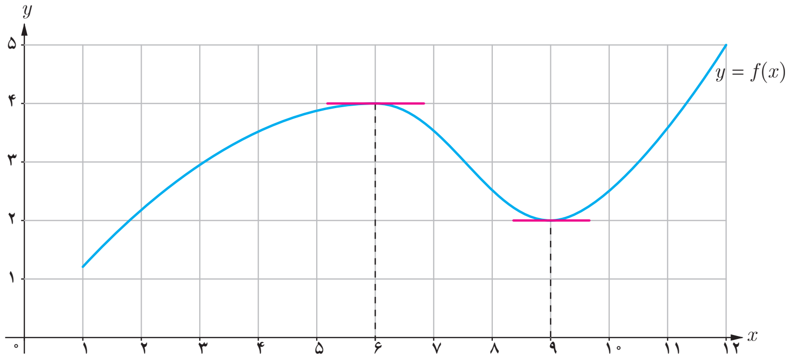
حال این سؤال پیش می‌آید که در چه نقاطی از دامنهٔ تابع f باید به دنبال اکسترمم‌های نسبی آن باشیم؟ همان‌گونه که در تابع‌های قبلی دیده می‌شود، جواب عبارت است از **نقاطی از دامنهٔ f که f' در آنها تعریف نشده باشد** و همچنین **نقاطی که مقدار f' در آنها برابر صفر است**. به لحاظ اهمیت این دو دسته از نقاط، شایسته است که نامی برای خود داشته باشند؛ آنها را نقاط بحرانی تابع می‌نامیم :

> **تعریف :** نقطهٔ به طول c از دامنهٔ تابع f را یک نقطهٔ بحرانی برای این تابع می‌نامیم هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

مثال : در کار در کلاس قبل دیدیم که تابع $f(x)=||x|-۲|$ در نقاط C ، B و D مشتق‌ناپذیر است. به عبارت دیگر، نقاط به طول ۲-، صفر و ۲ که جزو نقاط دامنهٔ f هستند، در دامنهٔ f' نیستند. پس، این سه نقطه، نقاط بحرانی تابع f می‌باشند. همچنین در همین کار در کلاس، مشتق تابع $g(x)=-x^۲-۱$ به ازای صفر برابر صفر است؛ یعنی $g'(۰)=۰$. بنابراین نقطهٔ $B(۰\ ,\ -۱)$، نقطهٔ بحرانی تابع g است.

نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع زیر را درنظر بگیرید. دیده می‌شود که خط مماس بر نمودار f در این نقاط به صورت افقی، یعنی با شیب صفر است. از آنجا که مشتق تابع در یک نقطه، برابر شیب خط مماس بر منحنی تابع در آن نقطه است، لذا در این تابع داریم :

$$f'(۶)=۰\quad ,\quad f'(۹)=۰$$



این مطلب در مورد نقاط اکسترمم نسبی هر تابع مشتق‌پذیر، درست است. قضیه زیر را در این مورد بیان می‌کنیم.

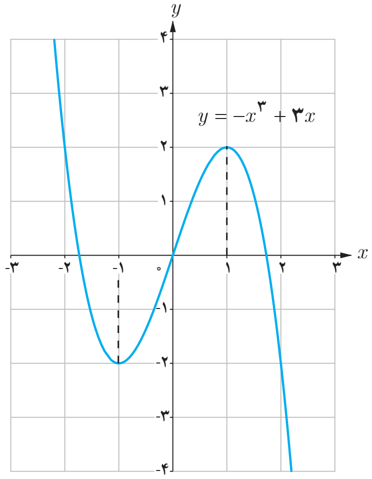
> **قضیه :** اگر تابع f در نقطهٔ به طول c ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c)=۰$. به عبارت دیگر، هر نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع، یک نقطهٔ بحرانی آن است.

کار در کلاس

۱ الف) با رسم نمودار تابع $f(x) = |x-۲|$، نشان دهید که f در $x = ۲$ مینیمم نسبی دارد.

ب) آیا $f'(۲)$ موجود است؟ چرا؟

پ) آیا $x = ۲$ طول نقطهٔ بحرانی تابع است؟ چرا؟

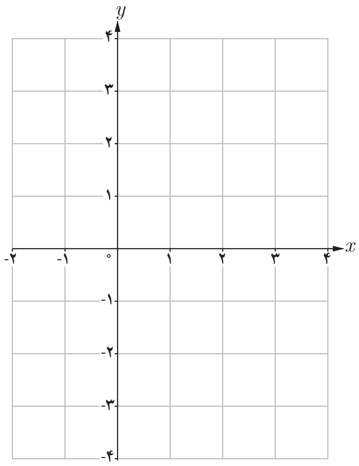


۲ نمودار تابع $f(x) = -x^۳ + ۳x$ را رسم کرده‌ایم.

الف) طول‌های نقاط اکسترمم نسبی f را تعیین کنید.

ب) می‌دانیم این تابع در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. ریشه‌های معادلهٔ $f'(x) = ۰$ ، یعنی طول‌های نقاط بحرانی تابع را به‌دست آورید.

پ) با توجه به الف و ب، درستی قضیه قبل را در مورد این تابع بررسی کنید.



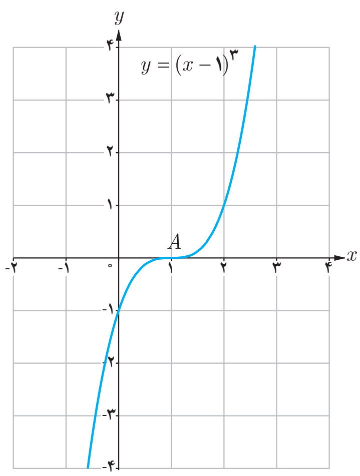
۳ تابع با ضابطهٔ $f(x) = -x^۲ + ۲x + ۲$ را در نظر بگیرید. f همواره مشتق‌پذیر است.

الف) $f'(x)$ را به‌دست آورید.

ب) ریشهٔ معادلهٔ $f'(x) = ۰$ را محاسبه کنید تا طول نقاط بحرانی تابع به دست آید.

پ) با رسم نمودار سهمی، تحقیق کنید که آیا نقطهٔ اکسترمم f منطبق بر نقطهٔ بحرانی آن است؟

از مثال‌های قبل، این سؤال مطرح می‌شود که آیا صفرهای تابعِ مشتق، همواره طول نقاط اکسترمم نسبی تابع را به‌دست می‌دهند؟ با وجود آنکه جواب این سؤال در مورد برخی از تابع‌های مورد بحث ما مثبت است، مثال زیر نشان می‌دهد که این مطلب همیشه هم درست نیست. به عبارت دیگر، عکس قضیه قبل در حالت کلی درست نیست.



مثال : به نمودار تابع $f(x) = (x-۱)^۳$ دقت کنید. تابعِ مشتقِ این تابع به‌صورت $f'(x) = ۳(x-۱)^۲$ است. با وجود آنکه مقدار $f'(x)$ در $x = ۱$ برابر صفر است، امّا با توجه به نمودار f، دیده می‌شود که نقطه به طول ۱ برای این تابع نه ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی. دلیل این مطلب، آن است که f'، قبل و بعد از $x=۱$ همواره مثبت است؛ به عبارت دیگر، f در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است و لذا نمی‌تواند اکسترمم نسبی داشته باشد.

تذکر : مثال بالا نشان می‌دهد که عکس قضیهٔ قبل در حالت کلی درست نیست. در واقع نقطهٔ A به طول $x = ۱$ برای تابع $f(x) = (x-۱)^۳$ یک نقطهٔ بحرانی است، اما اکسترمم نسبی آن نیست. شما یک مثال نقض دیگر برای عکس این قضیه ارائه کنید که نشان دهد یک نقطهٔ بحرانی لزوماً اکسترمم نسبی نیست.

کار در کلاس

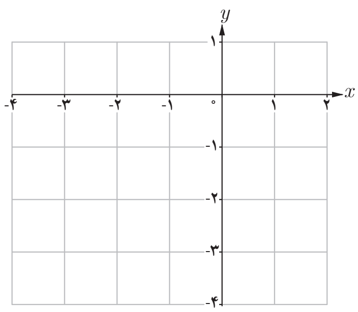
۱ جدول تغییرات تابع $f(x) = -x^{۲} - ۲x$ در زیر آمده‌است که در آن با تعیین علامت f'، بازه‌هایی که تابع f در آنها صعودی است و همچنین بازه‌هایی که نزولی می‌باشد، تعیین شده‌است. همچنین، اکسترمم نسبی تابع در جدول مشخص شده‌است :

$f'(x) = -۲x - ۲$

$f'(x) = ۰ \rightarrow x = -۱$ طول نقطهٔ بحرانی

x	$-\infty$	-۱	$+\infty$
بازه	$(-\infty , -۱)$		$(-۱ , +\infty)$
علامت f'	$+$	۰	$-$
یکنوایی f	$-\infty$ ↗ صعودی اکید	۱ max نسبی	نزولی اکید ↘ $-\infty$

با توجه به جدول، مشخص است که نقطه به طول (-۱)، ماکزیمم نسبی تابع است؛ چرا که رفتار تابع در این نقطه از صعودی اکید به نزولی اکید تغییر کرده است. با توجه به جدول و در صورت لزوم با یافتن نقاط دیگری از تابع، نمودار آن را رسم کنید.



۲ جدولی مشابه جدول بالا برای تابع $g(x) = x^{۳} - ۳x^{۲}$ رسم کنید که نقاط اکسترمم نسبی تابع در آن مشخص شده باشد.

مثال‌های بالا از توابع پیوسته، این مطلب را القا می‌کنند که تغییر رفتار این‌گونه تابع‌ها در یک نقطه از صعودی بودن به نزولی بودن، نشان‌دهندهٔ نقطهٔ ماکزیمم نسبی آن تابع است. برای مینیمم نسبی هم می‌توان مطلب مشابهی را بیان کرد که در ادامه آمده است.

آزمون مشتق اول

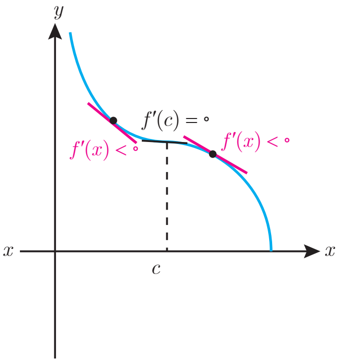
فرض کنیم c طولِ نقطهٔ بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و همچنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق‌پذیر باشد.

الف) اگر علامت f' در $x = c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آنگاه $x = c$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.

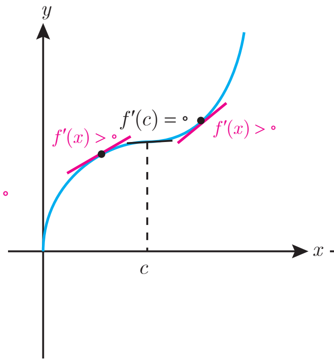
ب) اگر علامت f' در $x = c$ از منفی به مثبت تغییر کند، آنگاه $x = c$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f است.

پ) اگر f' در c تغییر علامت ندهد؛ به‌طوری که f' در یک همسایگی محذوف c همواره مثبت (یا همواره منفی) باشد، آنگاه f در c ماکزیمم یا مینیمم نسبی ندارد.

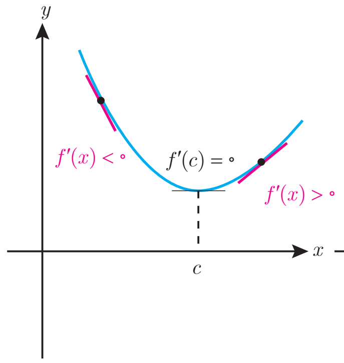
درستی آزمون مشتق اول را در همسایگی نقطهٔ c در هر یک از نمودارهای زیر مورد توجه قرار دهید.



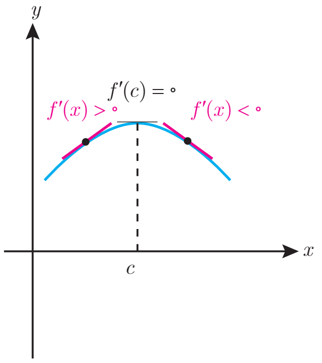
$x=c$: نه طول ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی



$x=c$: نه طول ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی



$x=c$: طول مینیمم نسبی



$x=c$: طول ماکزیمم نسبی

اکسترمم‌های مطلق تابع

فعالیت

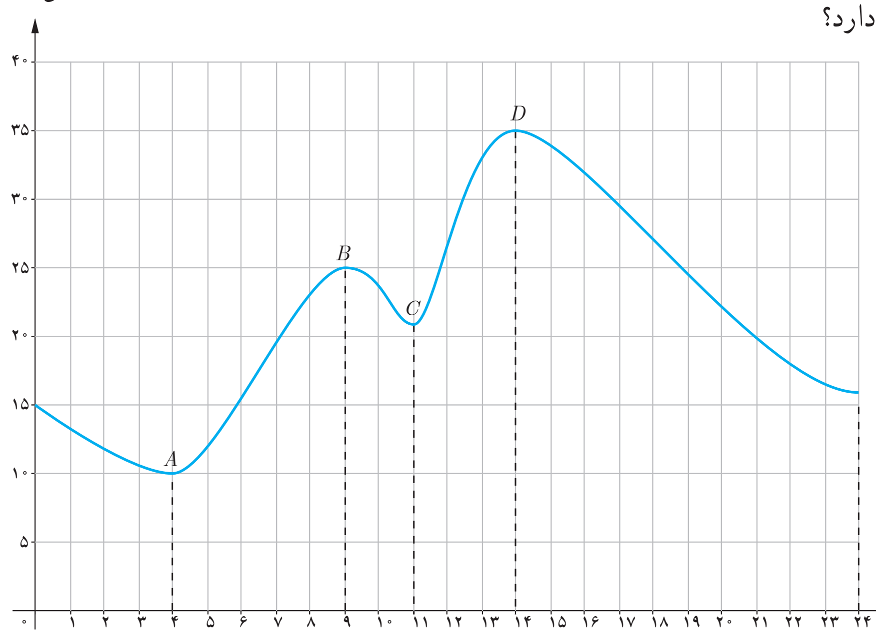
نمودار زیر نشان‌دهنده تغییرات دمایی برای یک شهر در طی ۲۴ ساعت است.

الف) تابع مقابل در چه نقاطی ماکزیمم نسبی دارد؟

ب) مقادیر ماکزیمم نسبی تابع کدام‌اند؟

پ) تابع در چه نقاطی مینیمم نسبی دارد؟

ت) مقادیر مینیمم نسبی تابع کدام‌اند؟



با توجه به نمودار، دیده می‌شود که دمای هوا در ساعت ۱۴ بیشترین مقدار و برابر با ۳۵ درجه سانتی‌گراد بوده است. در این حالت می‌گوییم، نقطهٔ $D(14,35)$ ماکزیمم مطلق تابع است و مقدار ماکزیمم مطلق تابع برابر ۳۵ می‌باشد. نقطهٔ مینیمم مطلق این تابع و همچنین مقدار مینیمم مطلق آن را بنویسید.

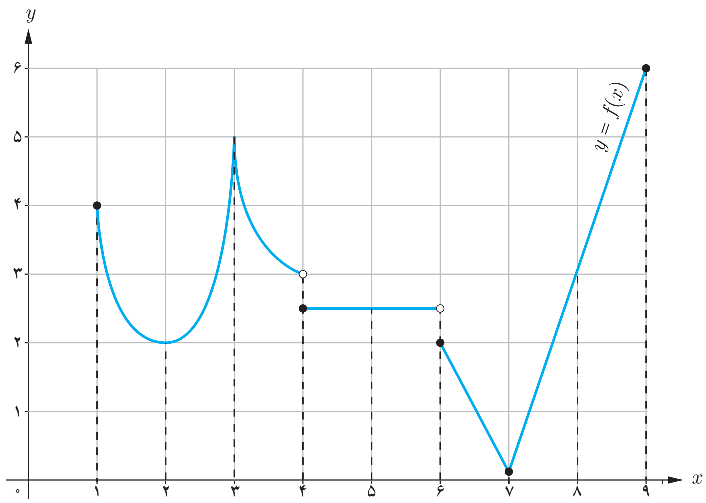
تعریف: با فرض $c \in D_f$، نقطهٔ $(c\,,f(c))$، یک نقطهٔ ماکزیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.

تعریف: با فرض $c \in D_f$، نقطهٔ $(c\,,f(c))$، یک نقطهٔ مینیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.

در تابع صفحه قبل، اکسترمم‌های مطلق تابع f یعنی نقاط A و D، به ترتیب نقاط مینیمم مطلق و ماکزیمم مطلق تابع هستند.

کار در کلاس

۱ با تکمیل جدول زیر، اکسترمم‌های مطلق و نسبی تابع زیر و همچنین نقاط بحرانی آن را در نقاط مشخص شده تعیین کنید.



طول نقطه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
max مطلق	×	×			×	×			✓
min مطلق	×	×			×	×			×
max نسبی	×	×			✓	×			×
min نسبی	×	✓			✓	×			×
نقطهٔ بحرانی	×	✓			✓	✓			×

۲ به کمک رسم نمودار تابع، مقادیر اکسترمم نسبی و مطلق تابع‌های زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

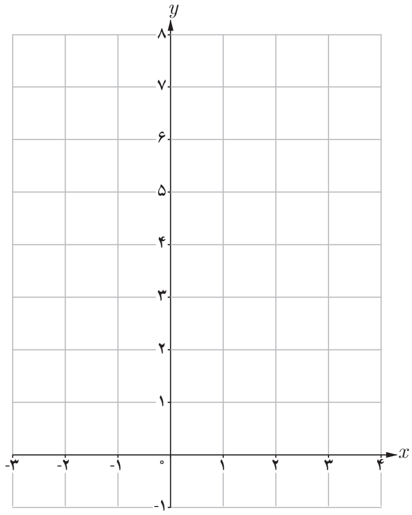
الف) $t(x) = x^۳\ ;\ x \in [-۲\,,۱]$

ب) $g(x) = -x^۲\ ;\ x \in [-۲\,,۳]$

پ) $u(x) = \dfrac{۱}{x}$

فعالیت

تابع $f(x) = |x^۲ - ۱|$ را در بازهٔ $[-۲ , ۳]$ رسم کنید و با توجه به نمودار، نقاط اکسترمم مطلق را تعیین کنید.



در فعالیت قبل دیده می‌شود که تابع پیوستهٔ $f(x) = |x^۲ - ۱|$ در بازهٔ بستهٔ $[-۲ , ۳]$ هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق که این مطلب همواره درست است. همچنین مشاهده می‌شود که نقاط اکسترمم مطلق، در نقاط بحرانی تابع یا نقاط انتهایی بازه واقع‌اند. این موضوع نیز همواره درست است.

قضیه : فرض کنیم تابع f در بازهٔ بستهٔ $[a , b]$ پیوسته باشد. در این صورت f در این بازه هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق.

قضیهٔ فوق، تنها وجود اکسترمم‌های مطلق توابع پیوسته را در بازه‌های بسته تضمین می‌کند و به روش یافتن این نقاط اشاره‌ای ندارد. مراحل یافتن اکسترمم‌های مطلق تابع پیوسته f در بازهٔ بستهٔ $[a , b]$ به شرح زیر است :

۱ــ مشتق تابع را به دست آورده و نقاط بحرانی f را می‌یابیم.

۲ــ مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی و همچنین در نقاط انتهایی بازه محاسبه می‌کنیم.

۳ــ در مرحلهٔ ۲، بزرگ‌ترین عدد به دست آمده، مقدار ماکزیمم مطلق تابع و کوچک‌ترین آنها مینیمم مطلق تابع در بازهٔ $[a , b]$ است.

مثال : نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x) = ۲x^۳ + ۳x^۲ - ۱۲x$ را در بازهٔ $[-۱ , ۳]$ تعیین کنید.

حل : ابتدا به کمک f'، نقاط بحرانی تابع را به‌دست می‌آوریم.

$$f'(x) = ۶x^۲ + ۶x - ۱۲$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow x^۲ + x - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۲)(x-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۲ \notin [-۱,۳] \\ x = ۱ \ \text{نقطهٔ بحرانی} \end{cases}$$

علاوه بر نقطهٔ بحرانی، مقدار تابع را در نقاط انتهایی بازه هم به‌دست می‌آوریم که در جدول مقابل آمده است.

x	-۱	۱	۳
$f(x)$	۱۳	-۷	۴۵

با توجه به جدول، دیده می‌شود که بزرگ‌ترین مقدار برای تابع در بازهٔ $[-۱ , ۳]$ برابر ۴۵ و کوچک‌ترین مقدار، مساوی -۷ است. به همین دلیل، این دو مقدار به ترتیب مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع در این بازه‌اند.

تمرین

۱) بزرگ‌ترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x) = x^{3} - 12x + 4$ در آن نزولی اکید باشد، کدام است؟ چرا؟

۲) با تشکیل جدول تغییرات تابع $g(x) = \frac{1}{x^{2}+1}$، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید است؟

۳) نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x) = \sqrt{4 - x^{2}}$ ب) $g(x) = x^{3} + 3x^{2} - 4$ پ) $h(x) = \sqrt[3]{x}$

۴) در هر یک از توابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

الف) $f(x) = x^{3} + 3x^{2} - 9x - 10$ ب) $g(x) = -2x^{3} + 3x^{2} + 12x - 9$ پ) $h(x) = -x^{3} - 3x + 2$

۵) مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق توابع زیر را در بازه‌های مشخص شده، در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = -2x^{3} + 9x^{2} - 13 \quad ; \quad x \in [-1, 2]$

ب) $g(x) = x^{3} + 2x - 5 \quad ; \quad x \in [-2, 1]$

۶) اگر نقطهٔ $(1, 2)$، نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^{3} + bx^{2} + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.

۷) نمودار تابعی مانند f با دامنه $\mathbb{R}$ را رسم کنید به طوری که هر نقطهٔ دلخواه از D_f، یک نقطهٔ بحرانی f باشد. مسئله چند جواب دارد؟