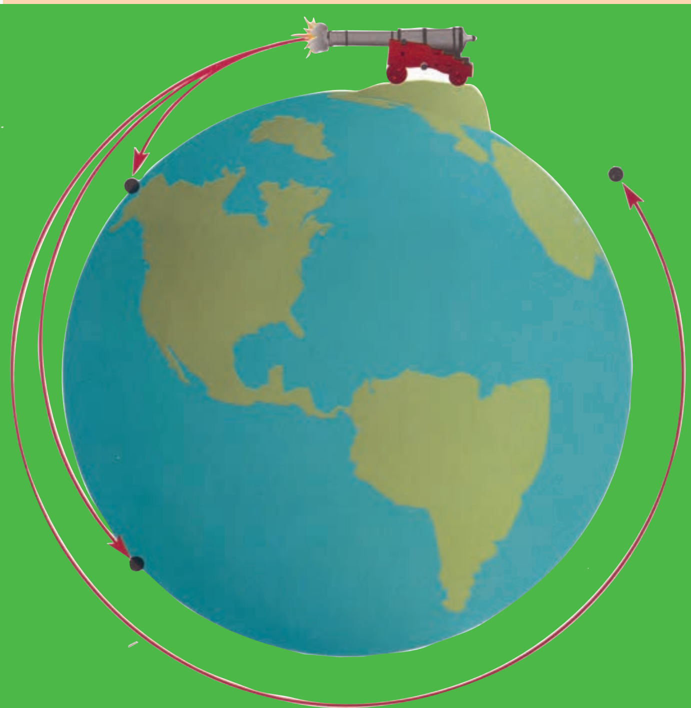
پودمان اول

تابع



اگر پرتابه‌ای را به‌طور افقی پرتاب کنیم، پس از مدتی بر روی زمین سقوط می‌کند. هرچه سرعت اولیهٔ پرتابه بیشتر باشد، پرتابه مدت بیشتری را در هوا باقی‌می‌ماند و محل سقوط بر روی زمین فاصلهٔ بیشتری تا محل پرتاب دارد.

فاصلهٔ محل سقوط پرتابه تا محل پرتاب وابسته به سرعت اولیهٔ پرتابه است و می‌گویند این فاصله تابعی از سرعت اولیهٔ پرتابه است. اما با توجه به گرد بودن زمین، با افزایش سرعت اولیهٔ پرتابه (تقریباً ۷ کیلومتر در ثانیه)، ممکن است پرتابه هرگز بر زمین سقوط نکند.

اگر سرعت اولیهٔ پرتابه از این مقدار بیشتر باشد، پرتابه با زمین برخورد نمی‌کند.

رابطهٔ بین کمیت‌ها

امروز، کلاس ریاضی ما با نجوم شروع شد.

دبیر گفت: من در دورهٔ دبیرستان به نجوم خیلی علاقه داشتم و دربارهٔ آن بسیار مطالعه می‌کردم. در کتاب‌های نجوم خوانده بودم که فاصلهٔ خورشید تا زمین ۱۵۰ میلیون کیلومتر است و نور خورشید حدود ۸ دقیقه و ۲۰ ثانیه طول می‌کشد تا به زمین برسد. بعد از خورشید، نزدیک‌ترین ستاره به زمین، پروکسیما قنطورس[۱] (Proxima Centauri) نام دارد. نور این ستاره ۴/۲ سال طول می‌کشد تا به زمین برسد. فاصلهٔ ستارگان از هم زیاد است و برای اندازه‌گیری آن از مقیاس بسیار بزرگی به نام سال نوری استفاده می‌شود. منظور از سال نوری، طول مسیری است که نور در یک سال طی می‌کند. برای مثال، فاصلهٔ پروکسیما قنطورس با زمین، ۴/۲ سال نوری است. دورترین ستاره‌های دیده شده، ۱۳/۳ میلیارد سال نوری با ما فاصله دارند.

آرش که از هنرجویان کنجکاو کلاس بود، با تعجب پرسید:

ما که نمی‌توانیم به این ستاره‌ها برویم؛ پس دانشمندان این فاصله‌ها را چگونه اندازه می‌گیرند؟

دبیر گفت: سؤال بسیار خوبی است. اما من یک سؤال آسان‌تر مطرح می‌کنم؛ معمولاً مساحت یک مربع را چگونه اندازه می‌گیرید؟

حمید گفت: طول ضلع مربع را اندازه می‌گیرم و سپس، آن را به توان دو می‌رسانم.

دبیر گفت: پس، مساحت مربع را به طور مستقیم اندازه‌گیری نمی‌کنید؛ بلکه از طریق طول ضلع آن، مساحتش را به دست می‌آورید.

حمید گفت: بله، مساحت مربع با طول ضلعش رابطه دارد، اما این مطلب چه ربطی به فاصلهٔ ستارگان دارد؟

دبیر گفت: صبر کنید به ارتباط این مطالب با فاصله‌های ستارگان هم می‌رسیم. آیا می‌توانید مورد دیگری هم پیدا کنید که نتوانید آن را به‌طور مستقیم اندازه‌گیری کنید ولی با اندازه‌گیری یک کمیت[۲] دیگر، اندازهٔ آن را به‌دست آورید؟

صادق گفت: در جایی دیدم که ارتفاع از سطح دریا را با دماسنج اندازه می‌گیرند. دمایی که آب در آن به جوش می‌آید یعنی دمای جوش آب، در هر مکان با ارتفاع آن مکان از سطح دریا رابطه دارد. پس اگر دمای جوش آب را در مکانی اندازه‌گیری کنیم، ارتفاع آن مکان از سطح دریا را می‌توانیم به دست آوریم.

دبیر گفت: برای اندازه‌گیری فاصلهٔ ستارگان تا زمین، آیا می‌توان از این روش استفاده کرد؟

۱ــ در بعضی از متون مربوط به ستاره‌شناسی این ستاره را پروکسیما سنتوری نام می‌برند.

۲ــ مفاهیمی مانند وزن و جرم و بار الکتریکی و فشار هوا و نظایر آنها را کمیت‌های فیزیکی و مفاهیمی مانند طول و مساحت و حجم و نظایر آنها را کمیت‌های هندسی می‌نامند. برخی از این کمیت‌ها با یکدیگر رابطه دارند و شناختن این ارتباطات بخش مهمی از کار علوم تجربی و ریاضی است.

آرش گفت: اگر بتوانیم کمیتی را بیابیم که با این فاصله‌ها ارتباط داشته باشد و بتوان آن را اندازه‌گیری کرد، شاید بتوانیم این فاصله‌ها را به دست آوریم.

دبیر گفت: به یک چراغ روشن دقت کنید. هر چه به آن نزدیک‌تر می‌شوید، نور بیشتری به شما می‌رسد و هر چه از آن دورتر می‌شوید، نور کمتری دریافت می‌کنید. آیا این مطلب به حل مسئله کمکی می‌کند؟

آرش گفت: یعنی میزان نوری که از چراغ به ما می‌رسد، با فاصلهٔ چراغ از ما مرتبط است. پس با اندازه‌گیری نوری که از ستارگان به ما می‌رسد، می‌توانیم فاصلهٔ آنها را به دست آوریم.

دبیر گفت: بله درست است. با اندازه‌گیری نوری که از ستارگان به ما می‌رسد، فاصلهٔ آنها با ما به‌دست می‌آید.

در دنیای واقعی، به کمیت‌های متعددی برخورد می‌کنیم که با هم ارتباط دارند؛ از این ارتباط می‌توان استفاده کرد و با داشتن مقدار یکی، دیگری را به دست آورد. برای درک بهتر مفهوم رابطهٔ بین کمیت‌ها، در فعالیت(۱) ارتباط طول یک فنر و جرم جسمی را که به آن آویزان می‌شود، بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۱

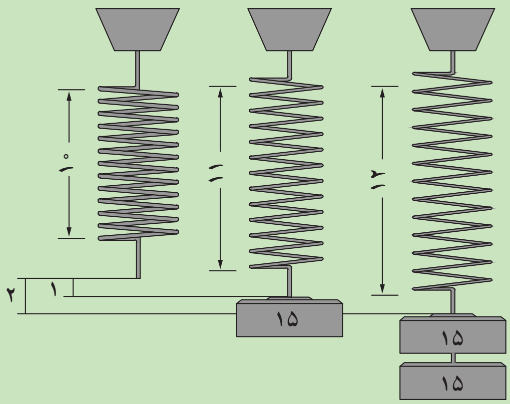
فنری در اختیار داریم که در حالت طبیعی طول آن ۱۰ سانتی‌متر است. به ازای هر ۱۵ گرم وزنه که به آن آویزان می‌کنیم، ۱ سانتی‌متر به طول آن اضافه می‌شود. حداکثر طول این فنر ۶۰ سانتی‌متر است و اگر بیش از این کشیده شود پاره می‌شود.

۱ در جاهای خالی کلمهٔ مناسب بگذارید.

الف) هر چه جرم وزنهٔ آویزان شده .... شود، طول فنر .... می‌شود.

ب) اگر به این فنر یک وزنهٔ ۳۰۰ گرمی آویزان کنیم برای پیدا کردن طول فنر، چون به ازای هر ۱۵ گرم، ۱ سانتی‌متر به طول آن اضافه می‌شود، پس ابتدا ۳۰۰ را بر .... تقسیم می‌کنیم و سپس

....



۲ در حالت کلی، اگر جرم وزنهٔ آویزان شده را بر حسب گرم با a نشان دهیم و طول فنر را برحسب سانتی‌متر با l نشان دهیم، رابطه‌ای بنویسید که مقدار l را برحسب مقدار a بیان کند.

....

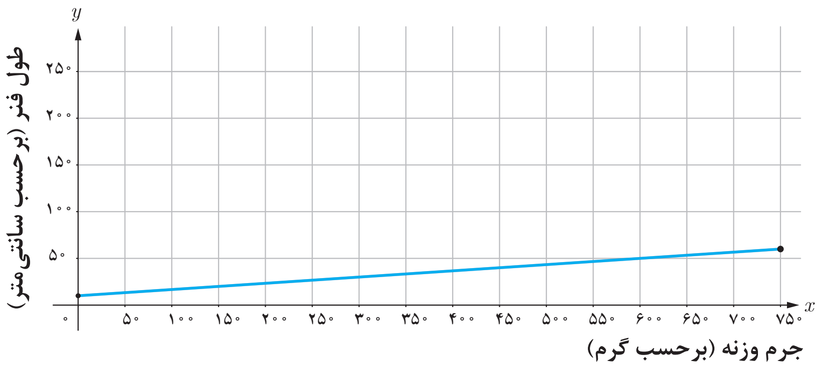
۳ حداکثر جرمی که می‌توانیم به این فنر آویزان کنیم، چقدر است؟ (**راهنمایی:** برای پیدا کردن حداکثر جرمی که می‌توانیم به این فنر آویزان کنیم، ابتدا باید حداکثر تغییر طول فنر را به‌دست آورد).

....

فعالیت (۱) نشان می‌دهد که اندازهٔ طول فنر با اندازهٔ جرم وزنه آویزان شده مرتبط است. جدول زیر اندازهٔ طول فنر را به ازای چندین مقدار خاص برای جرم وزنهٔ آویزان شده، نشان می‌دهد.

جرم وزنه آویزان شده (بر حسب گرم)	۰	۷۵	۱۵۰	۳۰۰	۴۵۰	۵۲۵	۶۰۰	۷۵۰
طول فنر کشیده شده (بر حسب سانتی‌متر)	۱۰	۱۵	۲۰	۳۰	۴۰	۴۵	۵۰	۶۰

اگر به ازای کلیهٔ مقادیر برای جرم وزنه، مقدار طول فنر را در نظر بگیریم، نمودار این رابطه به‌صورت یک پاره‌خط طبق شکل زیر است که در آن محور افقی نشان‌دهنده جرم وزنه آویزان شده برحسب گرم و محور عمودی نشان‌دهنده طول فنر بر حسب سانتی‌متر می‌باشد. جدول بالا، نقاطی از این پاره‌خط را نشان می‌دهد.



کمیت‌های مرتبط بسیاری وجود دارند. برای مثال، مساحت یک مربع و طول ضلع آن دو کمیت مرتبط هستند. در این حالت، اگر طول ضلع مربع را بدانیم، آنگاه می‌توانیم مساحت آن را به‌دست آوریم و برعکس، با داشتن مساحت مربع، طول ضلع آن نیز مشخص می‌شود.

مثال‌هایی از ارتباط بین کمیت‌ها را می‌توان در طبیعت و زندگی روزمره یافت: فشار هوا در هر نقطه و ارتفاع آن نقطه از سطح دریا، هزینه پرداخت شده بابت برق و میزان برق مصرف شده، قیمت بلیت اتوبوس‌های بین شهری و فاصلهٔ بین شهرها و غیره نمونه‌هایی از این ارتباط محسوب می‌شوند.

سؤال مهمی که مطرح می‌شود این است که رابطه بین دو کمیت را چگونه باید بیان کنیم. در مثال (۱)، نمونهٔ دیگری از ارتباط بین دو کمیت را می‌بینیم که درک بیشتری از رابطه بین کمیت‌ها را به ما می‌دهد.

مثال ۱

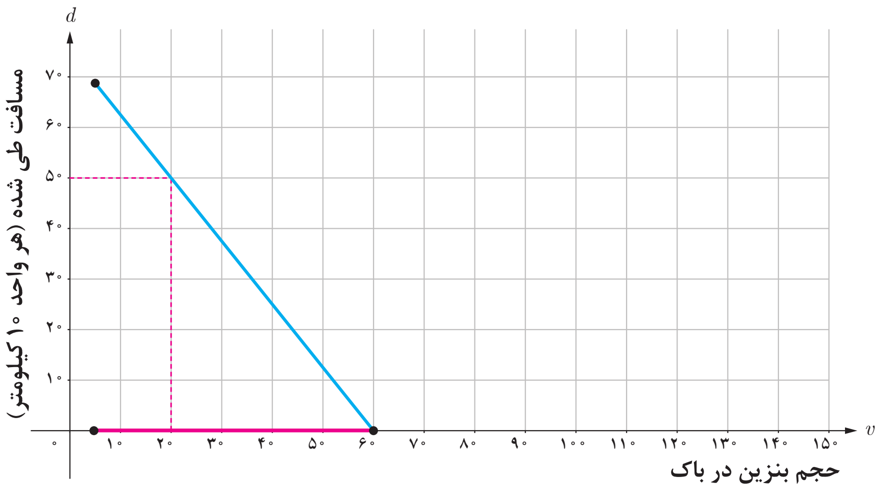
خودرویی را در نظر بگیرید که گنجایش ۶۰ لیتر بنزین را دارد. اگر این خودرو با سرعت ثابت حرکت کند، برای طی کردن هر ۱۰۰ کیلومتر، ۸ لیتر بنزین مصرف می‌کند. باک این خودرو قبل از حرکت، پر شده است. مقدار بنزین باقی‌مانده در باک خودرو با مسافت طی شده رابطه دارد. توجه داشته باشید که هیچ خودرویی تمام بنزین باک خود را مصرف نمی‌کند و توصیه می‌شود برای وارد نشدن صدمه به موتور، حداقل ۵ لیتر بنزین در باک موجود باشد.

در این مثال نتایج زیر را می‌توان مشاهده کرد:

- هر چه بنزین در باک کمتر شود، مسافتی که با خودرو طی شده است بیشتر می‌شود.
- اگر ۴۴ لیتر بنزین در باک خودرو باقی‌مانده باشد، خودرو ۲۰۰ کیلومتر مسافت را طی کرده است. زیرا، این خودرو به ازای هر لیتر بنزین، $۱۲/۵=\frac{۱۰۰}{۸}$ کیلومتر مسافت را طی می‌کند.
- با توجه به توصیه‌ای که برای سالم نگه داشتن موتور شده است، حجم بنزین موجود در باک نباید به صفر برسد. طبق توصیه، در باک باید حداقل ۵ لیتر بنزین وجود داشته باشد و حداکثر حجم باک نیز ۶۰ لیتر است.
- اگر مقدار بنزین باقی‌مانده در باک را بر حسب لیتر با v و مسافت طی شده را برحسب کیلومتر با d نشان دهیم، رابطه‌ای که مقدار d را برحسب v نشان می‌دهد، به‌صورت $d=۱۲/۵(۶۰-v)$ است، زیرا این خودرو به ازای هر لیتر بنزین، ۱۲/۵ کیلومتر مسافت را طی می‌کند.
- جدول زیر مسافت طی شده را به ازای چند مقدار خاص برای حجم بنزین موجود در باک، نشان می‌دهد.

حجم بنزین در باک (بر حسب لیتر)	۵	۱۰	۲۰	۳۰	۴۵	۵۰	۶۰
مسافت طی شده (بر حسب کیلومتر)	۶۸۷/۵	۶۲۵	۵۰۰	۳۷۵	۱۸۷/۵	۱۲۵	۰

اگر به ازای کلیهٔ مقادیر برای حجم بنزین موجود در باک (۵ تا ۶۰ لیتر)، مسافت طی شده را در نظر بگیریم، نمودار این رابطه به‌صورت یک پاره‌خط طبق شکل صفحه بعد است که محور افقی نشان‌دهندهٔ حجم بنزین موجود در باک بر حسب لیتر و محور عمودی نشان‌دهندهٔ مسافت طی شده بر حسب هر واحد ۱۰ کیلومتر می‌باشد. جدول بالا، نقاطی از این پاره‌خط را نشان می‌دهد.



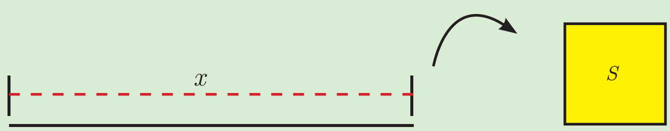
- با توجه به نمودار، اگر ۲۰ لیتر بنزین در باک باقی‌مانده باشد، خودرو ۵۰۰ کیلومتر را طی کرده است.

این مثال نشان می‌دهد که برای شناخت رابطهٔ بین مقدار بنزین باقی‌مانده و مسافت طی‌شده، کافی‌است بدانیم که حجم بنزین موجود در باک، چه مقادیری می‌تواند باشد و مسافت طی‌شده توسط خودرو چگونه از حجم بنزین موجود در باک محاسبه می‌شود. در واقع، برای شناخت رابطهٔ بین دو کمیت، باید بدانیم که این کمیت‌ها چه مقدارهایی می‌توانند داشته باشند و شیوهٔ محاسبهٔ یکی برحسب دیگری چیست.

رابطهٔ بین کمیت‌ها در زمینه‌های بسیار متنوعی دیده می‌شود و لازم است بتوانیم در هر زمینه‌ای این رابطه‌ها را تشخیص دهیم.

کار در کلاس ۱

مفتولی به طول ۱۰۰ سانتی‌متر در اختیار داریم. قسمتی از آن را می‌بریم و با قطعهٔ بریده شده یک مربع می‌سازیم. مساحت مربع به دست آمده با طول قطعهٔ بریده شده رابطه دارد.



۱ آیا مساحت می‌تواند صفر باشد؟

۲ اگر طول قطعهٔ بریده شده از مفتول را با x نشان دهیم، x چه مقادیری می‌تواند باشد؟

$$\dots < x < \dots$$

۳ اگر طول قطعهٔ بریده شده از مفتول ۸ سانتی‌متر باشد، مساحت مربع ساخته شده چند سانتی‌متر مربع است؟

....

....

۴ اگر طول قطعهٔ بریده شده از مفتول را با x و مساحت مربع ساخته شده با آن را با S نشان دهیم، رابطه‌ای بنویسید که مقدار S را بر حسب مقدار x بیان کند.

....

....

با توجه به پاسخ پرسش‌های بالا، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

۵ جدول زیر، ارتباط بین طول قطعهٔ بریده شده و مساحت مربع ساخته شده را نشان می‌دهد. این جدول را کامل کنید.

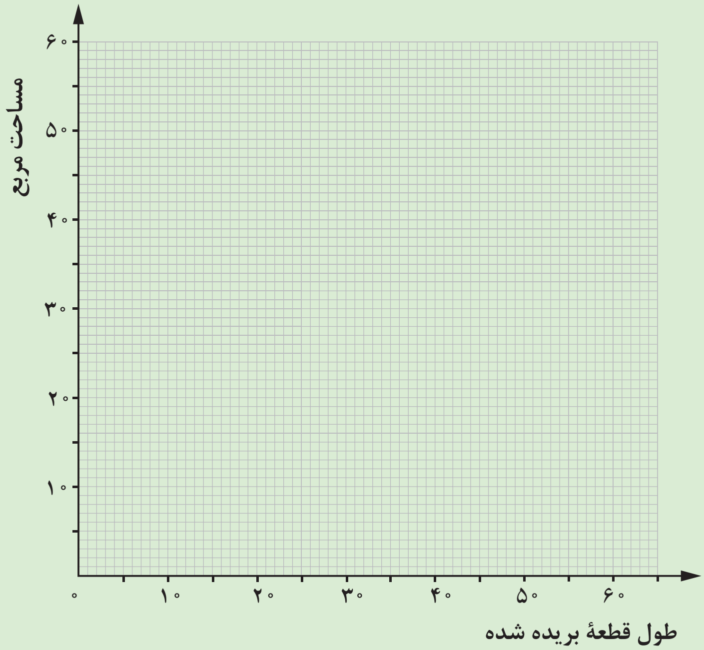
طول قطعهٔ بریده شده (برحسب سانتی‌متر)	۱	۴	۲۰	۳۲	۴۸	۶۰
مساحت مربع (برحسب سانتی‌متر مربع)		۱			۱۴۴	

....

....

....

۶ در شکل صفحهٔ بعد، محور افقی طول قطعهٔ بریده شده را بر حسب سانتی‌متر و محور عمودی، مساحت مربع ساخته شده را بر حسب سانتی‌مترمربع نشان می‌دهد. جدول بالا، نقاطی در این صفحهٔ مختصات را نشان می‌دهد. ۴ نقطهٔ اول جدول را در نمودار صفحهٔ بعد بیابید و آنها را به‌طور تقریبی به هم وصل کنید.



۷ با توجه به نمودار، برای ساختن مربعی به مساحت ۴۰ سانتی‌متر مربع، چه مقدار از مفتول را باید ببریم؟ این مقدار را به کمک رابطهٔ قسمت (۴) نیز به‌دست آورید و سپس مقایسه کنید.

....

....

۸ آیا پاسخ به سؤالات (۲) و (۴) برای شناخت رابطهٔ بین مساحت مربع ساخته شده و طول قطعهٔ بریده شده از مفتول کافی هستند؟

....

....

مسائل

۱ کدام‌یک از گزینه‌های زیر دو کمیت مرتبط هستند؟ اگر دو کمیت مرتبط هستند، هر یک را نام‌گذاری کنید و رابطه بین این دو کمیت را با نام‌های انتخابی خود بنویسید.

الف) طول ضلع یک مربع و محیط آن؛

ب) طول ضلع یک مربع و مساحت آن؛

پ) محیط یک مثلث و طول بزرگ‌ترین ضلع آن؛

ت) شعاع یک دایره و محیط آن؛

ث) شعاع یک دایره و مساحت آن؛

ج) مساحت یک مستطیل و محیط آن.

۲ آیا درجه حرارت یک مکان بر حسب سانتی‌گراد و درجه حرارت آن بر حسب فارنهایت مرتبط هستند؟ اگر مرتبط هستند، هر یک را نام‌گذاری کنید و رابطه بین آنها را بنویسید.

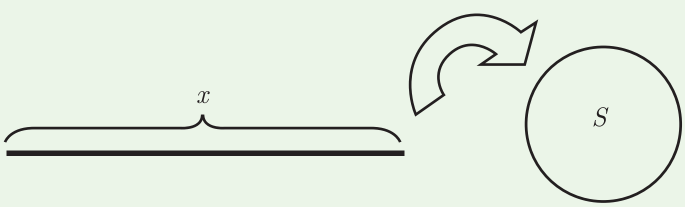
۳ وزن جلد کتابی (با حداکثر ۲۰۰ صفحه) برابر ۴۰ گرم و وزن هر ورق آن ۰/۸ گرم است. رابطه‌ای بنویسید که به کمک آن بتوان وزن کتاب را بر حسب تعداد ورق‌های آن به‌دست آورد.

۴ راننده‌ای مسافت ۳۵۰ کیلومتری بین دو شهر را با سرعت ثابت ۷۰ کیلومتر بر ساعت در حال طی کردن است.

الف) آیا مقدار مسافتی که طی می‌کند (d) و زمان (t)، دو کمیت مرتبط هستند؟ اگر دو کمیت مرتبط هستند، چه رابطه‌ای بین آنها برقرار است؟

ب) هر یک از این دو کمیت چه مقادیری را می‌توانند داشته باشند؟

۵ طنابی به طول ۱۰ متر در اختیار داریم. قطعه‌ای از آن را می‌بُریم و با قطعهٔ بُریده شده یک حلقهٔ دایره‌ای شکل می‌سازیم. مساحت حلقه دایره‌ای شکل به‌دست آمده با طول قطعهٔ بریده شده رابطه دارد.



الف) آیا مساحت می‌تواند صفر باشد؟

ب) طول قطعهٔ بریده شده از طناب، چه مقادیری می‌تواند باشد؟

پ) اگر طول قطعه بریده شده از طناب ۴ متر باشد، مساحت دایرۀ ساخته شده چندمترمربع است؟

ت) اگر طول قطعۀ بریده شده از طناب را با x و مساحت دایرۀ ساخته شده با آن را با S نشان دهیم، رابطه‌ای بنویسید که مقدار S را بر حسب مقدار x بیان کند.

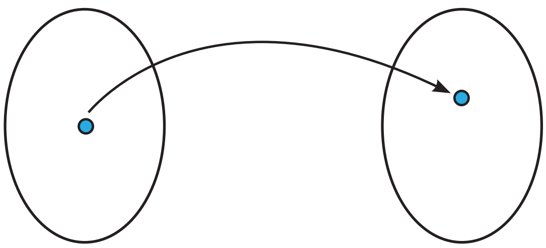
ث) جدول زیر، ارتباط بین طول قطعۀ بریده شده و مساحت دایرۀ ساخته شده را نشان می‌دهد. این جدول را کامل کنید (فرض کنید $\pi \approx ۳$).

طول قطعه بریده شده	$\frac{۱}{۲}$	۲	۴	۶	۸
مساحت دایره	$\frac{۱}{۴۸}$	$\frac{۱}{۳}$			

۶ دو کمیت مرتبط به هم مثال بزنید. هر یک را نام‌گذاری کنید و در صورت امکان رابطهٔ بین این دو کمیت را با نام‌های انتخابی خود بنویسید.

مفهوم تابع

اهمیت رابطۀ بین کمیت‌ها، ابتدا در فیزیک مشاهده شد و بیان ریاضی ارتباط کمیت‌ها، مفهوم تابع را به وجود آورد. تاکنون، چند کمیت مرتبط به هم را بررسی کردیم. اگر یکی از این کمیت‌ها را کمیت (الف) و دیگری را کمیت (ب) بنامیم، مثال‌ها به گونه‌ای بودند که با مشخص شدن مقدار کمیت (الف)، **یک مقدار معین** برای کمیت (ب) به‌دست می‌آمد.



این دسته از روابط بین کمیت‌ها، روابط خاصی هستند که در ریاضی با مفهومی به نام تابع بیان می‌شوند و کمیت (ب) را تابعی از کمیت (الف) می‌نامند. در واقع، وقتی که کمیتی مانند (ب) وابسته به کمیت دیگری مانند (الف) باشد، و به‌ازای هر مقداری از کمیت (الف)، مقدار معینی برای کمیت (ب) داشته باشیم، مفهوم تابع پیش می‌آید و می‌گوییم کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) است.

گفتگو

فرهاد گفت: منظور از این جمله که با مشخص شدن مقدار کمیت (الف)، یک مقدار معین برای کمیت (ب) به دست می‌آید، چیست؟

دبیر گفت: در فعالیت (۱) دیدیم که اگر یک وزنهٔ a گرمی به فنر آویزان کنیم، طول آن برابر l خواهد شد و رابطه‌ای که بیانگر این واقعیت است به‌صورت $l=\frac{a}{۱۵}+۱۰$ به‌دست آمد. در این رابطه با مشخص شدن جرم وزنه، یک مقدار معین برای طول فنر به دست می‌آید. مثلاً اگر یک وزنه ۷۵ گرمی به فنر آویزان کنیم، طول آن یک مقدار معین می‌باشد. این مقدار معین برابر ۱۵ سانتی‌متر است. بنابراین، طول فنر تابعی از جرم وزنه می‌باشد.

فرهاد گفت: آیا مثال (۱) که در آن رابطهٔ بین مسافت طی شده با مقدار بنزین باقی‌مانده در باک خودرو را بررسی کردیم، نیز همین‌طور است؟

دبیر گفت: بله. دیدیم که مسافت طی شده (d) با مقدار بنزین باقی‌مانده در باک خودرو (v) رابطه دارد و رابطه‌ای که بیانگر این واقعیت است به‌صورت $d=۱۲/۵(۶۰-v)$ است. در این رابطه با مشخص شدن مقدار بنزین باقی‌مانده در باک، یک مقدار معین برای مسافت طی شده به‌دست می‌آید. مثلاً اگر حجم بنزین باقی‌مانده در باک ۳۰ لیتر باشد، مسافت طی شده، مقدارِ معین ۳۷۵ کیلومتر می‌باشد. بنابراین، مسافت طی‌شده توسط خودرو، تابعی از حجم بنزین باقی‌مانده در باک است. آیا شما می‌توانید مثال دیگری ذکر کنید؟

فرهاد گفت: مساحت مربع تابعی از ضلع آن است، زیرا با مشخص شدن اندازه ضلع مربع، یک مقدار معین برای مساحت آن به‌دست می‌آید. مثلاً اگر اندازه ضلع مربع ۵ متر باشد، مساحت مربع مقدار معین ۲۵ متر مربع می‌باشد.

تعریف

اگر دو کمیت (الف) و (ب) با یکدیگر مرتبط باشند و با مشخص شدن مقدار کمیت (الف)، **یک مقدار معین** برای کمیت (ب) به‌دست آید، در این صورت کمیت (ب) را تابعی از کمیت (الف) می‌نامند.

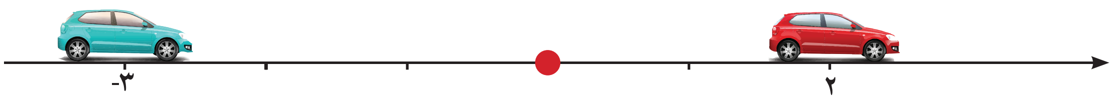
اگر دو کمیت (الف) و (ب) با هم ارتباط داشته باشند ولی با مشخص شدن مقدار کمیت (الف) نتوان **یک مقدار معین** برای کمیت (ب) به‌دست آورد؛ یعنی، با مشخص شدن مقدار کمیت (الف)، بیش از یک مقدار برای کمیت (ب) به‌دست آید این رابطه، تابع نیست.

مثال ۲

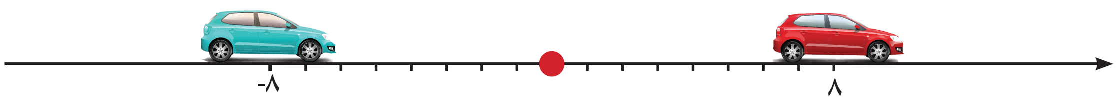
در کار در کلاس (۱) دیدیم که مساحت مربع ساخته شده (S) با طول قطعهٔ بریده شده از مفتول (x) رابطه‌ای به‌صورت $S=\frac{x^{۲}}{۱۶}$ دارد. در این رابطه با مشخص شدن طول قطعهٔ بریده شده، یک *مقدار معین* برای مساحت مربع ساخته شده به‌دست می‌آید. مثلاً اگر طول قطعهٔ بریده شده ۸ سانتی‌متر باشد، مساحت مربع ساخته شده، مقدار معین ۴ سانتی‌متر مربع می‌باشد. بنابراین، مساحت مربع ساخته شده، تابعی از طول قطعه بریده شده است.

مثال ۳

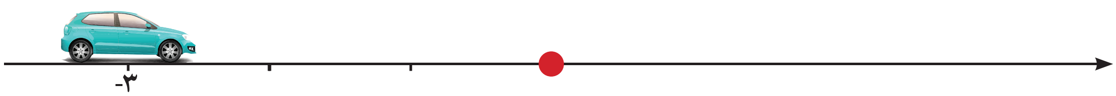
فرض کنید خودرویی در جادهٔ مستقیمی در حال حرکت است. این جاده را به‌صورت محور اعداد در نظر می‌گیریم. هر نقطه روی محور اعداد، با یک عدد حقیقی مشخص می‌شود که آن را *مختص طولی* آن نقطه می‌نامند. مثلاً در شکل زیر مختص طولی خودروی قرمز برابر ۲ و مختص طولی خودروی آبی برابر ۳- است. مختص طولی این خودرو، با فاصلهٔ آن تا مبدأ ارتباط دارد.



اگر فاصلهٔ خودرو تا مبدأ را کمیت (الف) و مختص طولی آن را کمیت (ب) بنامیم، با مشخص شدن مقدار کمیت (الف)، برای کمیت (ب) یک مقدار معین به‌دست نمی‌آید. مثلاً، اگر فاصلهٔ خودرو تا مبدأ ۸ واحد باشد، خودرو ممکن است دارای مختص طولی ۸- یا ۸ باشد. یعنی به‌طور قطع نمی‌توان یک مکان خاص مشخص را برای خودرو تعیین کرد. به عبارت دیگر، با داشتن فاصلهٔ خودرو تا مبدأ، برای مختص طولی آن یک مقدار معین به دست نمی‌آید، زیرا ممکن است مختص طولی خودرو، دو عدد قرینهٔ هم باشد.



بنابراین، در این مثال، کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) نخواهد بود. اما بر عکس، با مشخص شدن مختص طولی خودرو، فاصلهٔ آن تا مبدأ دقیقاً مشخص می‌شود. پس، در این مثال، کمیت (الف)، تابعی از کمیت (ب) خواهد بود. برای مثال، اگر مختص طولی خودرو برابر ۳- باشد، در این صورت فاصلهٔ آن از مبدأ مقدار معین ۳ است.



کار در کلاس ۲

۱ در فعالیت (۱)، آیا جرم جسم آویزان شده، تابعی از طول فنر است؟ چرا؟

....

....

۲ در مثال (۱)، آیا مسافت طی شده توسط خودرو، تابعی از حجم بنزین مصرف شده است؟ چرا؟

....

....

در بررسی نمونه‌هایی از کمیت‌های مرتبط دیدیم که برای مشخص شدن تابعی که رابطهٔ بین دو کمیت (الف) و (ب) را بیان می‌کند باید به دو سؤال اصلی زیر پاسخ دهیم:

۱ کمیت (الف) چه مقادیری می‌تواند داشته باشد؟

۲ با مشخص شدن یک مقدار برای کمیت (الف)، چگونه مقدار کمیت (ب) به‌دست می‌آید؟

تعریف

فرض کنیم کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) باشد. مقادیری را که کمیت (الف) می‌تواند داشته باشد، **دامنهٔ** این تابع می‌نامند و قانونی را که، مقادیر کمیت (ب) را بر حسب مقادیر کمیت (الف) به دست می‌دهد، **قانون یا ضابطهٔ** این تابع می‌نامند.

مثال ۴

در کار در کلاس (۲) دیدیم که اگر l، طول فنر کشیده شده با آویزان کردن یک وزنهٔ a گرمی باشد، جرم وزنه، تابعی از طول فنر کشیده شده است. مقادیری که طول فنر می‌تواند داشته باشد از ۱۰ تا ۶۰ سانتی‌متر هستند. پس، دامنهٔ این تابع $\{x \in \mathbb{R} \mid 10 \leq x \leq 60\}$ است. مقدار a بر حسب l از طریق تساوی $a=15l-150$ محاسبه می‌شود، پس قانون تابعی که جرم وزنه را بر حسب طول فنر بیان می‌کند، به‌صورت $a=15l-150$ است.

کار در کلاس ۳

۱ در مثال (۱)، دامنه و قانون تابعی را بنویسید که مسافت طی شده توسط ماشین را بر حسب حجم بنزین باقی‌مانده در باک، بیان می‌کند.

....

....

۲ در کار در کلاس (۱)، دامنه و قانون تابعی را بنویسید که مساحت مربع ساخته شده را برحسب طول قسمت بریده شده از مفتول، بیان می‌کند.

....

....

خواندنی

نیاز به بررسی روابط بین کمیت‌ها با رشد علوم آغاز شد. ابتدا نیوتن و گالیله برای توصیف حرکت اشیا، نیاز به یافتن رابطهٔ بین زمان و مکان اشیا را احساس کردند.

لایب‌نیتز ریاضی‌دان قرن هفدهم نیز برای توصیف یک منحنی در صفحه، نیاز به یافتن رابطه بین طول و عرض نقاط یک منحنی را احساس کرد. نهایتاً، بررسی روابط بین کمیت‌ها منجر به تعریف مفهوم تابع در ریاضی شد. اما رسیدن به مفهوم تابع چندان ساده نبود و با شروع از کارهای نیوتون و لایب‌نیتز تا رسیدن به یک مفهوم دقیق از تابع، بیش از سه قرن طول کشید (تاریخ ریاضی ایوز، جلد ۲).

لایب‌نیتز

نیوتن

مسائل

۱ آیا دمای کلاس شما در یک روز معین، تابعی از زمان است؟ چرا؟

۲ دمای هوا در یک منطقه، در ارتفاعات مختلف از سطح دریا، متفاوت است و به ازای هر ۱۵۰متر افزایش ارتفاع، ۱ درجه از دمای هوا کاسته می‌شود. آیا دمای یک منطقه تابعی از ارتفاع آن منطقه از سطح دریا است؟ چرا؟

۳ یک مغازه شیرینی فروشی ماهانه ۷ میلیون تومان بابت اجارهٔ مغازه، آب، برق و دستمزد کارگران، به‌طور ثابت پرداخت می‌کند. تولید هر کیلوگرم شیرینی ۳۰۰۰ تومان هزینهٔ مواد اولیه دارد. ظرفیت تولید شیرینی در این مغازه حداکثر ۲۵۰۰ کیلوگرم در ماه است. قیمت هر کیلوگرم شیرینی در بازار ۱۲۰۰۰ تومان است و تمام تولیدات مغازه به فروش می‌رسد. اگر x میزان تولید شیرینی باشد:

الف) درآمد این مغازه، تابعی از میزان تولید آن است، این تابع را با به‌دست آوردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

ب) هزینه ماهانه مغازه، تابعی از میزان تولید آن است، این تابع را با به‌دست آوردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

پ) سود مغازه، تابعی از میزان تولید آن است، این تابع را با مشخص کردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

۴ از منبع آبی با حجم ۵۰۰ لیتر برای پرکردن یک حوضچه استفاده می‌شود. اگر شیر آب منبع به‌طور کامل باز باشد، در هر دقیقه ۵ لیتر آب از آن خارج می‌شود.

الف) توضیح دهید که چرا حجم آب داخل حوضچه تابعی از زمان است.

ب) با فرض آنکه در لحظه صفر، حوضچه خالی است، قانون این تابع را با نوشتن حجم آب داخل حوضچه بر حسب زمان باز بودن شیر، بنویسید.

پ) دامنهٔ این تابع را مشخص کنید.

۵ سنگی را به هوا پرتاب می‌کنیم و بعد از ۳ ثانیه به زمین برمی‌گردد. در این صورت کمیت ارتفاع سنگ از سطح زمین و کمیت زمان، باهم مرتبط هستند.

الف) چرا ارتفاع سنگ از سطح زمین تابعی از زمان است؟

ب) اگر زمان را بر حسب ثانیه اندازه بگیریم و مبدأ، زمان شروع پرتاب باشد، دامنهٔ این تابع چیست؟

۶ فرض کنیم که $x^۲$ مربع عدد حقیقی x باشد، آیا با مشخص بودن $x^۲$، برای x یک مقدار معین در اعداد حقیقی به‌دست می‌آید؟ آیا یک عدد، تابعی از مربع آن است؟ چرا؟

بازه‌ها

گفتگو

حسین دربارۀ تمرین‌های مربوط به تابع که شب قبل حل کرده بود، با دوستش صحبت می‌کرد؛ او به دوستش گفت: در حل تمرین‌های تابع و مرور درس به مجموعه‌ای که با $\{x \in \mathbb{R} \mid ۱۰ \le x \le ۶۰\}$ نمایش داده شده بود، برخورد کردم. به‌نظرم آمد که چنین نمایشی کمی دشوار است. فکر می‌کنی می‌توانیم آن را ساده‌تر بنویسیم؟

احمد گفت: بهتر است سر کلاس ریاضی از دبیر سؤال کنیم.

حسین در کلاس از دبیر ریاضی پرسید: برای اینکه در ریاضی بتوانیم آسان‌تر صحبت کنیم، از نمادها و علائم استفاده می‌شود. آیا مجموعه‌هایی مانند $\{x \in \mathbb{R} \mid ۱۰ \le x \le ۶۰\}$ رامی‌توان ساده‌تر نمایش داد؟

علی گفت: قبلاً وقتی می‌خواستیم اعداد طبیعی از ۱ تا ۶ را نمایش دهیم، آن را به‌صورت ۶,...,۱ می‌نوشتیم. آیا برای اعداد حقیقی هم می‌توانیم این خلاصه‌سازی را داشته باشیم؟

دبیر گفت: برخی از زیر مجموعه‌های اعداد حقیقی کاربرد بیشتری دارند. برای آسان‌تر صحبت کردن دربارۀ آنها سعی می‌شود ساده‌تر نمایش داده شوند.

زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی را که به‌صورت زیر است در نظر بگیرید.

$$\{x \in \mathbb{R} \quad a \le x \le b\}$$

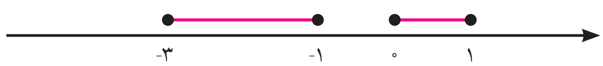
نمایش آن روی محور به‌صورت روبه‌رو است.

نقطه‌های توپر نشان‌دهندۀ آن است که a و b دو عضو از این مجموعه هستند. مجموعۀ بالا را به‌صورت $[a, b]$ نشان می‌دهند و آن را بازۀ بسته به ابتدای a و انتهای b یا به اختصار بازۀ بستۀ a تا b می‌نامند.

مثال ۵

بازه‌های $[۰, ۱]$ و $[-۳, -۱]$ را با نماد مجموعه نمایش دهید و روی یک محور نشان دهید.

$$[۰,۱] = \{x \in \mathbb{R} \mid ۰ \le x \le ۱\}$$
$$[-۳,-۱] = \{x \in \mathbb{R} \mid -۳ \le x \le -۱\}$$



مثال ۶

کار در کلاس (۲) نشان داد که جرم وزنه، تابعی از طول فنر و دامنه آن $\{x \in \mathbb{R} \mid ۱۰ \le x \le ۶۰\}$ است. پس دامنۀ این تابع، بازه $[۱۰, ۶۰]$ است.

اگر از بازهٔ بسته $[a\ ,\ b]$ ابتدا و انتهای آن را خارج کنیم، آن را بازهٔ باز به ابتدای a و انتهای b یا به اختصار بازهٔ باز a تا b می‌نامند و با $(a\ ,\ b)$ نشان می‌دهند. به عبارت دیگر:

$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$$

نقطه‌های توخالی نشان‌دهنده آن است که a و b متعلق به این مجموعه نیستند.

اگر از بازهٔ بسته $[a\ ,\ b]$ ابتدا یا انتهای آن را خارج کنیم، بازهٔ نیم باز، نیم بسته به‌دست می‌آید. اگر ابتدای آن را خارج کنیم، آن را با $(a\ ,\ b]$ نشان می‌دهند و آن را بازه باز در a و بسته در b می‌نامند. به عبارت دیگر:

$$(a\ ,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\leq b\}$$

نمایش این مجموعه روی محور به‌صورت روبه‌رو است:

اگر از بازهٔ بسته $[a\ ,\ b]$، انتهای آن را خارج کنیم، آن را با $[a\ ,\ b)$ نشان می‌دهند و آن را بازهٔ بسته در a و باز در b می‌نامند. به عبارت دیگر:

$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x<b\}$$

مثال ۷

الف) مجموعهٔ اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی ۵ و بزرگ‌تر از ۱ را روی محور نشان دهید و با بازه نمایش دهید.

$$(۱,۵]=\{x\in\mathbb{R}\mid ۱<x\leq ۵\}$$

ب) بازهٔ $[۱,۴)$ را با نماد مجموعه نمایش دهید و روی یک محور نشان دهید.

$$[۱,۴)=\{x\in\mathbb{R}\mid ۱\leq x<۴\}$$

کار در کلاس ۴

۱ بازه‌های زیر را با نماد مجموعه نمایش داده و روی یک محور نشان دهید. سپس تعیین کنید $-\frac{۳}{۱۰}$ متعلق به کدام‌یک از بازه‌ها می‌باشد.

[۲, ۵]

(-۱, ۳)

(۴, ۷]

[-۴, -۲)

کار در کلاس ۴

۲ هر یک از مجموعه‌های زیر را روی یک محور نمایش داده و با نماد بازه‌ها نشان دهید.

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-۱}{۳} < x < ۲\right\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid ۳ < x \le ۵۵\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid ۱ \le x < ۱۰\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -۳ \le x \le ۸\}$$

مجموعه‌های به‌صورت $\{x \in \mathbb{R} \quad a \le x\}$ را نیز بازه نامیده و با $[a, +\infty)$ نمایش می‌دهند(توجه داشته باشید که در این علامت‌گذاری نماد $+\infty$ به عدد خاصی اشاره ندارد و نشانهٔ هیچ عدد خاصی نیست).

ابتدای این بازه عدد a است ولی انتهایی ندارد و آن را بازهٔ بسته a تا مثبت بی‌نهایت می‌نامند.

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$$

اگر a را از این بازه خارج کنیم آن را با $(a, +\infty)$ نشان می‌دهند و آن را بازهٔ باز a تا مثبت بی‌نهایت می‌نامند. به عبارت دیگر:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

به همین ترتیب، مجموعه‌هایی به‌صورت $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$ را با $(-\infty, b]$ نمایش می‌دهند. انتهای این بازه عدد b است ولی ابتدایی ندارد و آن را بازهٔ بسته از منفی بی‌نهایت تا b می‌نامند. به عبارت دیگر:

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$$

اگر b را از این بازه خارج کنیم، آن را با $(-\infty, b)$ نشان می‌دهند و آن را بازهٔ باز منفی بی‌نهایت تا b می‌نامند. به عبارت دیگر:

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

کار در کلاس ۵

۱ بازهٔ $[۱, +\infty)$ را روی محور نمایش دهید.

۲ بازهٔ $(-\infty, ۱)$ را روی محور نمایش دهید.

۳ اجتماع این دو بازه را روی محور نمایش دهید. اجتماع این دو بازه، چه مجموعه‌ای است؟

....

مسائل

۱ مجموعه‌های زیر را با بازه نمایش دهید و روی محور مشخص کنید.

الف) مجموعهٔ اعداد حقیقی کوچک‌تر از ۳-

ب) مجموعهٔ اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۲

پ) مجموعهٔ اعداد حقیقی بین ۳- و ۵

۲ بازه‌های زیر را روی محور مشخص کنید.

الف) $(۰,۳)$

ب) $[-۱,۵)$

پ) $(-۱,۴]$

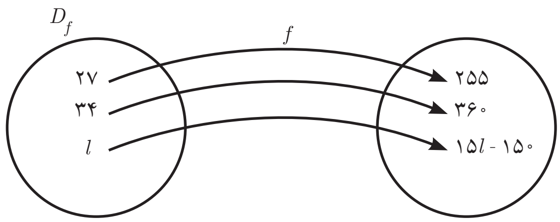
۳ مجموعهٔ جواب نامعادله $۲x-۵>۱$ را با یک بازه نمایش دهید.

۴ جدول زیر را کامل کنید.

توصیف مجموعه	نمایش روی محور اعداد	نمایش با بازه	نمایش با نماد مجموعه
			$\{x \in \mathbb{R} \mid ۰ \leq x < ۲\}$
		$[۱,۴)$	
			
مجموعهٔ اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی ۲			

نمادگذاری تابع‌ها

رابطهٔ بین کمیت‌ها، به شکل‌های مختلفی برقرار می‌شود؛ بنابراین تابع‌های بسیاری وجود دارند. برای صحبت کردن در مورد تابع‌ها بهتر است برای هر تابع نامی انتخاب کنیم. مثلاً، در فعالیت فنر، جرم وزنهٔ آویزان شده تابعی از طول فنر است، می‌توانیم این تابع را f بنامیم.[1] در این صورت، دامنهٔ این تابع را با D_f (بخوانید دامنهٔ f یا دیِ اف)[2] نشان می‌دهیم، پس $D_f=[۱۰ , ۶۰]$
عدد ۲۷ در دامنهٔ این تابع است و با جای‌گذاری ۲۷ در قانون تابع، $a=۱۵l-۱۵۰$، عدد $۲۵۵=۱۵۰-۲۷\times۱۵$ به‌دست می‌آید. مقداری را که با جای‌گذاری ۲۷ در قانون تابع به‌دست می‌آید با $f(۲۷)$ (بخوانید افِ ۲۷) نشان می‌دهند، پس $f(۲۷)=۱۵\times۲۷-۱۵۰=۲۵۵$. عدد ۳۴ نیز در دامنهٔ این تابع است و با جای‌گذاری ۳۴ در قانون تابع، عدد $۳۶۰=۱۵۰-۳۴\times۱۵$ به دست می‌آید. مقداری را که با جای‌گذاری ۳۴ در قانون تابع به‌دست می‌آید با $f(۳۴)$ نشان می‌دهند، پس: $f(۳۴)=۱۵\times۳۴-۱۵۰=۳۶۰$. اگر l عددی در D_f باشد (یعنی $l\in D_f$)، با اِعمال قانون تابع f روی آن، مقدار $۱۵l-۱۵۰$ به‌دست می‌آید و آن را با $f(l)$ (بخوانید افِ اِل) نشان می‌دهند، پس: $f(l)=۱۵l-۱۵۰$.



اگر $l\in D_f$، در این صورت l می‌تواند مقادیر مختلفی داشته باشد، به همین دلیل در عبارت $f(l)$، l را متغیر تابع f می‌نامند. در مسئلهٔ فنر، از نماد l به عنوان متغیر این تابع استفاده کردیم ولی می‌توانیم از نام‌های دیگری هم استفاده کنیم. اگر از نماد x برای متغیر تابع f استفاده کنیم؛ در این صورت $x\in D_f$ و $f(x)=۱۵x-۱۵۰$. انتخاب نام متغیر یک تابع، اختیاری است و هر نمادی را می‌توان برای متغیر به‌کاربرد. در نام‌گذاری توابع نیز می‌توان از نمادهای دیگری مانند g و h و غیره استفاده کرد.

در این هنگام، برای احمد، سؤالی پیش آمد.

گفتگو

احمد گفت: در فعالیت (۱) که نام تابع را f گذاشتیم، اگر طول فنر l باشد، جرم جسم آویزان شده $f(l)$ است. با استفاده از قانون این تابع، من می‌توانم $f(۷۰)$ را هم حساب کنم، اما عدد ۷۰ در دامنه این تابع نیست. پس معنای $f(۷۰)$ چیست؟

۱ـ نماد f اول کلمهٔ function است که در زبان انگلیسی به معنای تابع است.

۲ـ نماد D اول کلمهٔ Domain است که به معنای محدوده‌ای معین است.

دبیر گفت: همان‌طور که گفتید، ۷۰ در دامنه این تابع نیست و فنر مورد بحث در آن فعالیت، نمی‌تواند ۷۰ سانتی‌متری شود، پس در این وضعیت $f(۷۰)$ معنایی ندارد.

احمد گفت: اما ما می‌توانیم با جای‌گذاری ۷۰ در قانون تابع، $f(۷۰)$ را حساب کنیم. پس، چرا می‌گویید معنایی ندارد؟

دبیر گفت: بله، این درست است که می‌توان به ازای $l=۷۰$ مقداری را محاسبه کرد، ولی این تابع می‌خواهد وضعیت فنری را توصیف کند که حداکثر می‌تواند ۶۰ سانتی‌متر شود، بنابراین این فنر هیچ‌گاه ۷۰ سانتی‌متر نمی‌شود. پس برای این فنر مقدار $f(۷۰)$ معنایی ندارد. اما اگر می‌خواستیم فنر دیگری را توصیف کنیم که همین خصوصیات را داشت، با این تفاوت که می‌توانست ۷۰ سانتی‌متر هم بشود و مثلاً دامنهٔ آن بازهٔ $[۱۰,۹۰]$ می‌بود، مقدار $f(۷۰)$ معنادار بود و جرم جسم آویزان شده را نشان می‌داد.

نکته

در هر تابعی، مقدار تابع فقط برای مقادیر دامنه محاسبه می‌شود و حتی اگر مقادیر خارج از دامنه را بتوان در قانون تابع قرار داد و مقداری را برای آن محاسبه کرد، عدد محاسبه شده معنایی ندارد. به عبارت دیگر، اگر f یک تابع و x متغیر آن باشد، مقادیر $f(x)$ را فقط برای xهایی محاسبه می‌کنیم که این xها در دامنه تابع باشند.

مثال ۸

تابع g با قانون $g(x)=۴x^۲-۵$ و دامنه $D_g=[-۳,۶]$ را در نظر بگیرید. $g(-۲)$، $g(\frac{۱}{۳})$، $g(۳)$، $g(\sqrt{۵})$ را محاسبه کنید. آیا $g(۷)$ معنایی دارد؟ چرا؟

$$g(-۲)=۴\times(-۲)^۲-۵=۴\times۴-۵=۱۱$$

$$g(۳)=۴\times۹-۵=۳۱$$

$$g(\frac{۱}{۳})=۴\times(\frac{۱}{۳})^۲-۵=\frac{۴}{۹}-۵=\frac{-۴۱}{۹}=-۴\frac{۵}{۹}$$

$$g(\sqrt{۵})=۴\times(\sqrt{۵})^۲-۵=۲۰-۵=۱۵$$

$g(۷)$ معنایی ندارد؛ زیرا ۷ در دامنهٔ این تابع نیست.

کار در کلاس ۶

۱ الف) تابع به‌دست آمده در مثال (۱)، که مسافت طی شده توسط خودرو را بر حسب حجم بنزین موجود در باک بیان می‌کند، g بنامید. D_g را بنویسید. قانون تابع g چگونه نوشته می‌شود؟

ب) مقدارهای g(۴۵) و g(۱۸) را بیابید. آیا مقدار g(۷۵) معنایی دارد؟ چرا؟

پ) اگر متغیر این تابع را با t نشان دهیم، مجموعه‌ای که t در آن است چه نام دارد؟ قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟

ت) اگر متغیر این تابع را با v نشان دهیم، مجموعه‌ای که v در آن است چه نام دارد؟ قانون تابع چگونه نوشته می‌شود؟

ث) دو تابعِ قسمت‌های (پ) و (ت) را از نظر قانون و دامنه مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲ الف) تابع به دست آمده در کار در کلاس (۱) که مساحت مربع ساخته شده بر حسب طول مفتول بریده شده را بیان می‌کند h نام‌گذاری کنید و D_h را بنویسید.

ب) مقدارهای h(۵) و h(۱۲) را بیابید. آیا مقدار h(۲۰۰) معنایی دارد؟ چرا؟

پ) اگر متغیر این تابع را با x نشان دهیم، مجموعه‌ای که x در آن است چه نام دارد؟ قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟

ت) اگر این تابع را با k و متغیر این تابع را با z نشان دهیم، قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟ مجموعه‌ای را که z در آن است، مشخص کنید.

ث) دو تابعِ قسمت‌های (پ) و (ت) را از نظر قانون و دامنه مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

در این کار در کلاس، مشاهده می‌کنید که تغییر نام یک تابع یا متغیر آن، تأثیری در تابع ندارد و آن تابع را تغییر نمی‌دهد. اگر چه شکل بیان قانون یک تابع ممکن است عوض شود ولی تابع عوض نمی‌شود. مثلاً همهٔ تابع‌های f ، g و h به ترتیب با قانون‌های $h(t)=t^2+1$ ، $g(x)=x^2+1$ ، $f(x)=x^2+1$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ به یک تابع اشاره می‌کنند.

مسائل

۱ جاهای خالی را برای تابع با قانون $f(x)=x^{۲}-x+۲$ و دامنهٔ $\mathbb{R}$ پر کنید.

x	$x^{۲}-x+۲$	$f(x)$
۲-	....	$f(-۲)=$....
۰	....	....
۲	....	....

۲ تابع g با قانون $g(x)=۴x^{۲}-۳x$ و دامنهٔ $D_g=[-۲,۳]$ را در نظر بگیرید. $g(-۲)$ و $g\left(-\frac{۴}{۳}\right)$ را محاسبه کنید. آیا $g(۴)$ معنایی دارد؟ چرا؟

۳ تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و قانون $f(x)=x^{۲}-۴$ مفروض است. مقادیر خواسته شده را بیابید.

الف) $f(-۲)=$ ب) $f\left(\frac{۱}{۲}\right)=$ پ) $f\left(\sqrt{۲}\right)=$

۴ کرایه تاکسی وابسته به طول مسیر مسافر است. ورودیهٔ تاکسی ۶۰۰ تومان است و به ازای هر ۱۰۰ متر، ۵۰ تومان کرایه گرفته می‌شود. قانون تابعی را به‌دست آورید که کرایهٔ تاکسی را بر حسب مسافت طی شده بیان می‌کند. با توجه به آنکه تاکسی‌ها در روز حداکثر ۵۰۰ کیلومتر طی می‌کنند، دامنهٔ این تابع را مشخص کنید. نامی برای این تابع و متغیر آن انتخاب کنید و دامنه و قانون این تابع را با نام‌های انتخابی خود بیان کنید.

۵ مستطیل‌هایی را در نظر بگیریدکه طول آنها ۲ واحد بیشتر از عرض آنها است. مساحت این مستطیل‌ها تابعی از عرض آنها است. این تابع را g بنامید و متغیر آن را با l نمایش دهید. دامنه و قانون این تابع را بنویسید. آیا $g(-۱)$ معنایی دارد؟

۶ سنگی را از بالای یک ساختمان ۲۵ متری رها می‌کنیم. طبق قوانین فیزیکی، ارتفاع این سنگ از سطح زمین تابعی از زمان است. اگر t، زمان (بر حسب ثانیه) و $f(t)$، ارتفاع از سطح زمین (برحسب متر) باشد. قانون این تابع به‌صورت $f(t)=-۵t^{۲}+۲۵$ است.

الف) سنگ در لحظهٔ صفر ($t=۰$) رها شده است. با پیدا کردن زمان برخورد سنگ با زمین، دامنهٔ این تابع را تعیین کنید.

ب) مقدارهای $f(۱)$ و $f(۲)$ را حساب کنید. این مقادیر چه چیزی را نشان می‌دهند؟

پ) آیا $f(۳)$ و $f(-۱)$ معنایی دارند؟چرا؟

نمایش‌های تابع: جدول و نمودار

گفتگو

مسعود و احمد در پایان کلاس با دبیر خود دربارهٔ عدد π بحث می‌کردند.

مسعود گفت: در کتابی خواندم که عدد π گنگ است و نمی‌توان آن را با یک عدد اعشاری نشان داد. اما می‌توان آن را با اعداد اعشاری تقریب زد.

احمد گفت: تقریبات اعشاری عدد π را باچه قانونی پیدا می‌کنند؟

دبیر گفت: در این مورد قانونی وجود ندارد ولی یک روش محاسبه وجود دارد که به کمک آن با رایانه تا چند میلیون رقم اعشار π را محاسبه کرده‌اند.

مسعود گفت: از چه روشی برای نمایش این رقم‌ها استفاده می‌کنیم؟

دبیر گفت: فعالیت زیر می‌تواند جوابی برای این پرسش فراهم کند.

فعالیت ۲

عدد π تا ده رقم اعشار برابر است با:

$$\pi \approx ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵$$

برای n=۱,۲,۳,...,۱۰، اگر $f(n)$ ، رقم nام اعشاری π را نشان دهد، برای مثال داریم:

$$f(۱)=۱ \qquad , \qquad f(۲)=۴$$

۱ جاهای خالی را پر کنید.

$f(۸)=$ ...... $\qquad f(۱۰)=$ ...... $\qquad f(۹)=$ ...... $\qquad f(۶)=$ ......

۲ دامنهٔ این تابع را با یک مجموعه نشان دهید.

۳ جدول زیر را با توجه به دامنه داده شده کامل کنید.

n	۱	۲								
$f(n)$	۱	۴								

در فعالیت بالا تابعی را مشاهده کردیم که قانون خاصی نداشت و فقط روشی برای یافتن مقدار تابع داشتیم که نقش قانون تابع را بازی می‌کرد.

به کمک جدول یک تابع، می‌توان نموداری در صفحه رسم کرد. هر زوج از اعدادِ جدول که از اعداد دامنهٔ تابع (سطر اول) و مقدار تابع (سطر دوم) تشکیل شده است، نقطه‌ای در صفحه مختصات را مشخص می‌کند. مجموعه این نقاط، شکلی را در صفحه مشخص می‌کنند که نمودار تابع نامیده می‌شود. از طریق نمودار یک تابع، رفتار تابع را بهتر می‌توان تشخیص داد.

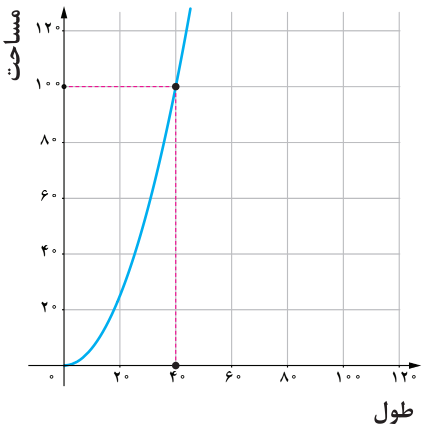
مثال ۹

اگر تابعی که در کار در کلاس (۱) به آن رسیدیم، را با h نشان دهیم دامنه این تابع $D_h=(۰, ۱۰۰]$ و برای $x\in D_h$ قانون آن $h(x)=\frac{x^2}{۱۶}$ است جدول زیر را برای این تابع در نظر می‌گیریم.

x	۴	۸	۱۶	۲۰	۳۶	۶۰	۸۰	۱۰۰
$h(x)$	۱	۴	۱۶	۲۵	۸۱	۲۲۵	۴۰۰	۶۲۵

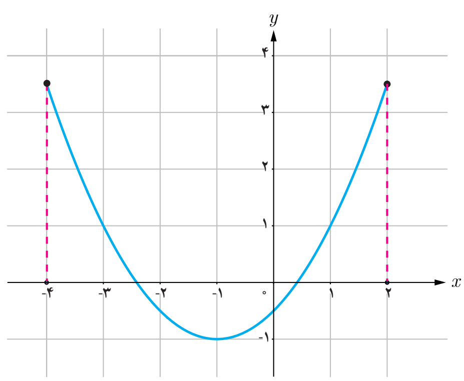
از طریق این جدول مشخص می‌شود که با زیاد شدن مقدار متغیر، مقادیر تابع نیز زیاد می‌شوند. روشن است که این جدول‌ها را نمی‌توان به ازای تمام مقادیر دامنه نوشت و فقط از تعدادی متناهی از اعداد در دامنه می‌توان استفاده کرد. معمولاً عددهایی را در دامنه انتخاب می‌کنند که مشخص شدن مقدار تابع در این نقاط، برای تشخیص رفتار تابع (چگونگی تغییرات تابع) در سرتاسر دامنه کافی باشد.

تشخیص رفتار تابع از طریق جدول چندان آسان نیست و نمودار تابع، بهتر می‌تواند رفتار تابع را نشان دهد. همانند کار در کلاس (۱) دو محور عمود بر هم رسم می‌کنیم. محور افقی نشان‌دهندهٔ طول قطعهٔ بریده شده و محور عمودی نشان‌دهنده مساحت مربع ساخته شده است. جدول بالا، فقط برخی از نقاط این نمودار را نشان می‌دهد. شکل روبه‌رو بخشی از نمودار این تابع می‌باشد.



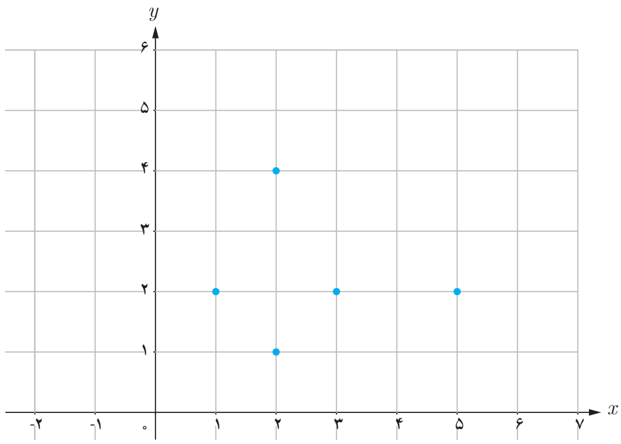
مثال ۱۰

نمودار تابع f با دامنهٔ $[-۴, ۲]$ رسم شده است.
نقطهٔ دلخواهی روی نمودار تابع در نظر بگیرید. از این نقطه خطی بر محور xها عمود کنید. طول نقطهٔ برخورد با محور افقی، یکی از مقادیر دامنه را نشان می‌دهد. اگر برای تمام نقطه‌های روی نمودار این عمل را انجام دهیم، همهٔ مقادیر دامنهٔ تابع به‌دست می‌آید.



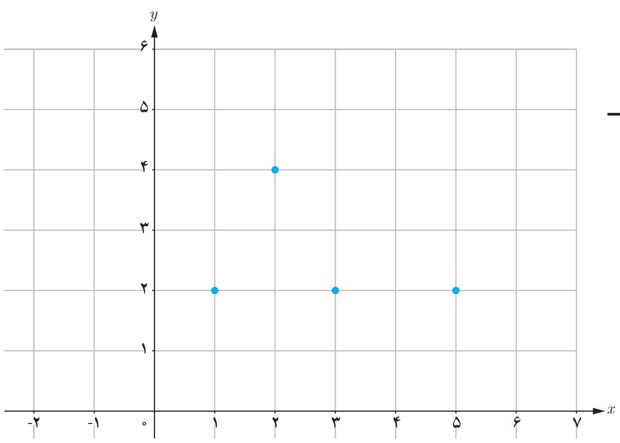
مثال ۱۱

x و y به ترتیب مقادیر متناظر دو کمیت (الف) و (ب) هستند. نقاط مشخص شده در صفحهٔ مختصات زیر، مقدارهای متناظر این دو کمیت را نشان می‌دهد. آیا کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) است؟
برای اینکه کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) باشد باید برای هر مقدار از کمیت (الف)، یک مقدار معین برای کمیت (ب) به‌دست آید. مطابق شکل، وقتی x برابر ۲ می‌باشد، دو مقدار ۱ و ۴ برای y وجود دارد. بنابراین کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) نمی‌باشد.

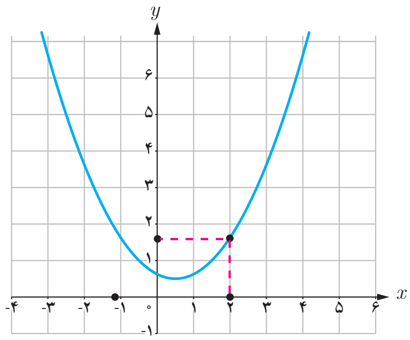


اگر نقطه به مختصات $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ را از نقاط روی نمودار حذف کنیم، نمودار زیر به‌دست می‌آید. مشاهده می‌شود که برای هر مقدار از x، یک مقدار معین برای y به‌دست آید. پس در این حالت کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) است. اگر این تابع را با f نام‌گذاری کنیم در این صورت $D_f = \{۱, ۲, ۳, ۵\}$ و مقادیر تابع فقط برای مقادیر دامنه محاسبه می‌شود. یعنی $f(۱) = ۲, f(۲) = ۴, f(۳) = ۲, f(۵) = ۲$. جدول این تابع به‌صورت زیر است:

x	۱	۲	۳	۵
y	۲	۴	۲	۲



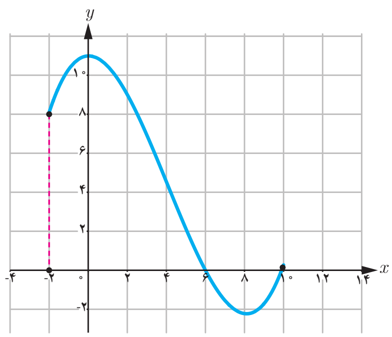
مثال ۱۲



در روبه‌رو نمودار تابع h رسم شده است.
از نقطهٔ x=۲ خطی بر محور xها عمود کنید تا نمودار را قطع کند. از این نقطه خطی موازی محور xها رسم کنید تا محور yها را قطع کند. این نقطه چه چیزی را نشان می‌دهد؟

این نقطه همان مقدار تابع به ازای x=۲ یعنی h(۲) است.

مثال ۱۳



نمودار تابع g به‌صورت زیر رسم شده است.

الف) دامنه g را بیابید.

ب) مقادیر تابع g را به ازای ۲-، ۱-، ۶ و ۷ بیابید.

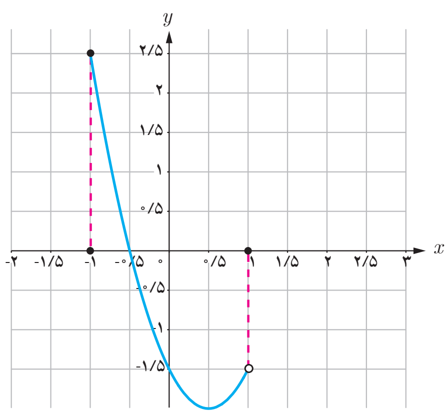
پ) آیا g(۱۱) معنایی دارد؟ چرا؟

الف) D_g=[-۲, ۱۰]

ب) g(-۲) =۸ , g(-۱) =۱۰ , g(۶) =۰ , g(۷) = -۱/۵

پ) g(۱۱) معنایی ندارد زیرا عدد ۱۱ در دامنه نیست.

مثال ۱۴



نمودار مقابل مربوط به تابع g است.

اگر از تمام نقطه‌های روی نمودار بر محور xها عمود کنیم، دامنهٔ این تابع بازه [-۱, ۱) به‌دست می‌آید.

مسائل

۱ هر یک از جدول‌های زیر نمایش یک تابع با دامنهٔ {-۱, ۰, ۱, ۲, ۳} می‌باشد. نمودار هریک را در صفحهٔ مختصات رسم کنید. در صورت امکان، قانون تابع را بنویسید.

الف)

x	-۱	۰	۱	۲	۳
y	-۲	۰	۲	۴	۶

ب)

x	-۱	۰	۱	۲	۳
y	۱	۰	۱	۴	۹

۲ نمایش جدول تابع f با دامنهٔ {-۲, ۰, ۱, ۲, ۴} به‌صورت زیر است:

x	-۲	۰	۱	۲	۴
$f(x)$	۰	۳	-۱	۳	۱

الف) مقادیر $f(۴)$، $f(۱)$ و $f(۰)$ را بیابید.

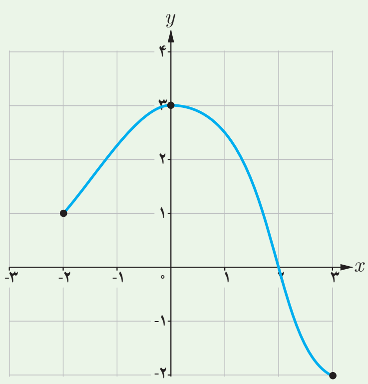
ب) نمودار f را در صفحهٔ مختصات رسم کنید.

۳ نمودار تابع g به‌صورت روبه‌رو است:

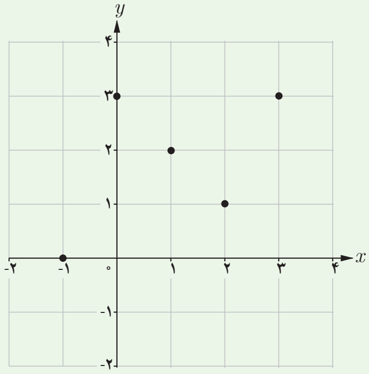
الف) با توجه به شکل، دامنهٔ g را بنویسید.

ب) $g(۲)$، $g(-۲)$ و $g(۰)$ را به‌دست آورید.

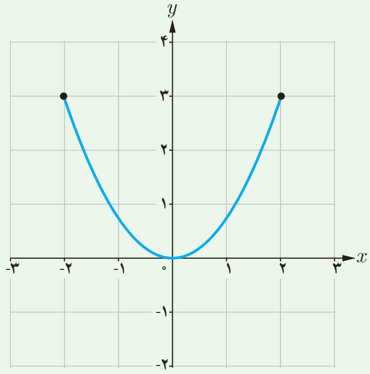
پ) آیا $g(۴)$ معنایی دارد؟ چرا؟



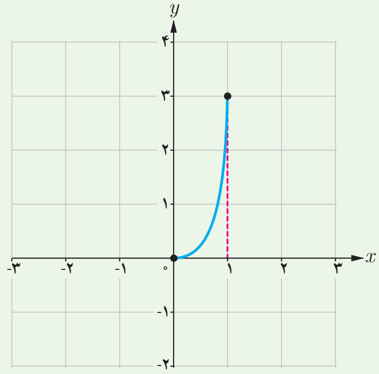
۴ سه تابع زیر را درنظر بگیرید. دامنهٔ هریک از این تابع‌ها را بنویسید.



الف

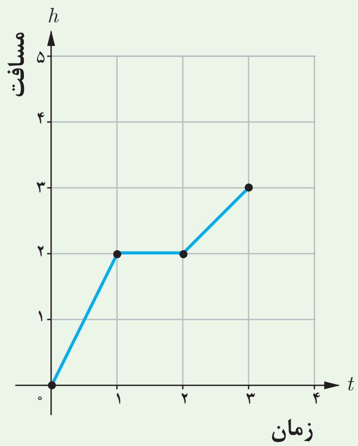


ب



پ

۵ وضعیتی از زندگی روزمره را بنویسید که نمودار زیر نشان‌دهندهٔ آن وضعیت باشد.



۶ تابع g با دامنه $\{-۲, -۱, ۰, ۳\}$ را طوری رسم کنید که $g(-۲)=۱$ و $g(۰)=۲$.

۷ تابع دلخواه f با دامنهٔ $[-۱, ۴]$ را طوری رسم کنید که $f(-۱)=۱$ و $f(۲)=-۳$.

۸ تابع h با دامنهٔ $[۰, ۳]$ و قانون $h(x)=۳x^{۲}+a$ را در نظر بگیرید.

الف) مقدار a را طوری بیابید که $h(۱)=۲$.

ب) $h(۲)$ را بیابید.

پ) آیا $h(۴)$ معنایی دارد؟ چرا؟

پودمان دوم

تابع‌های خطی و درجۀ دوم و کاربردآنها در حل معادله‌ها و نامعادله‌ها

گونه‌ای از گیاه بامبو پس از آنکه به ارتفاع تقریبی ۲۰ سانتی‌متر می‌رسد، در هر ساعت به‌طور تقریبی، ۳/۸ سانتی‌متر رشد می‌کند. یعنی در یک شبانه‌روز این گیاه حدود ۹۱/۲ سانتی‌متر رشد می‌کند.

تابع‌های خطی

محمد علاقهٔ زیادی به گیاهان و پرورش آنها داشت. او با کمک مادرش، در باغچهٔ حیاط خانه‌شان، انواع گل و گیاه را کاشته بود و هر روز به آنها رسیدگی می‌کرد. او به‌اندازهٔ رشد هر کدام از این گیاهان دقت می‌کرد. برخی از آنها در روزهای متوالی رشدهای متفاوت و برخی دیگر رشد یکنواختی داشتند. محمد به مادرش گفت: جالب است! نحوهٔ رشد هر کدام از این گیاهان باهم فرق دارد.

مادر محمد که دبیر ریاضی بود به او گفت: دقیقاً همین‌طور است. پیشنهاد می‌کنم دو یا سه گیاه را انتخاب کنی و هرروز طول آنها را اندازه بگیری. در این‌صورت می‌توانی نحوهٔ رشد طولی هر کدام را بهتر درک کنی.

محمد به مادرش گفت: اگر مدتی این کار را انجام دهم، آیا می‌توانم پیش‌بینی کنم هر کدام از آنها بعد از یک ماه چقدر رشد طولی خواهند کرد؟

مادرش گفت: بله، باید یک مدل ریاضی برای رفتار رشد طولی آنها بنویسی تا بتوانی مقدار رشد طولی آنها را در روزهای آینده پیش‌بینی کنی.

انجام فعالیت صفحهٔ بعد می‌تواند پاسخی برای این سؤال فراهم سازد.

فعالیت (۱)

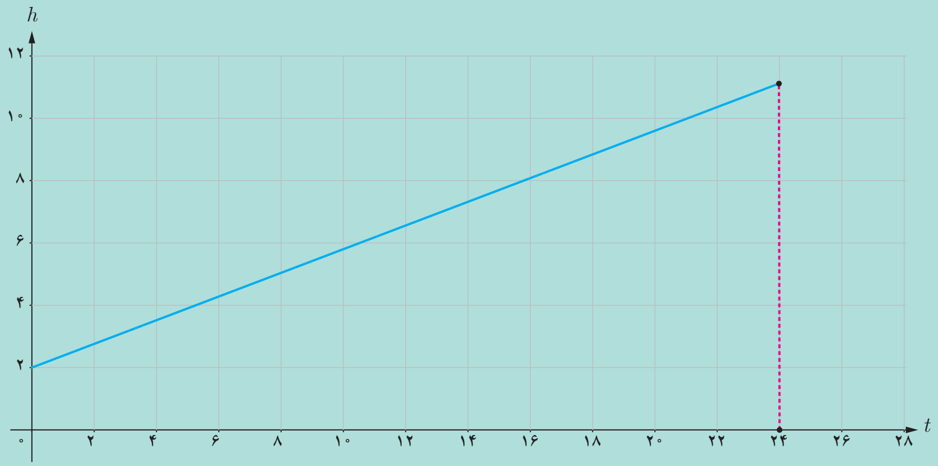
نوعی بامبو پس از آنکه به ارتفاع ۲۰ سانتی‌متر می‌رسد، به‌طور تقریبی در هر ساعت ۳/۸ سانتی‌متر رشد می‌کند. ارتفاع بامبو تابعی از زمان است و اگر ارتفاع بامبو را (برحسب سانتی‌متر) پس از t ساعت با $h(t)$ نشان دهیم داریم: $h(t)=۲۰+۳/۸t$.

اگر رشد بامبو را در یک شبانه‌روز در نظر بگیریم، دامنه این تابع $[۰,۲۴]$ خواهد بود.

۱ جدول زیر را کامل کنید و اختلاف مقادیر تابع را در داخل مربع‌ها بنویسید.

t (برحسب ساعت)	۰	۱	۲	۳	۴
h (برحسب سانتی‌متر)	....	....	....	....	....

نمودار زیر، نمودار تابع $h(t)=۲۰+۳/۸t$ را نشان می‌دهد.



۲ به ازای هر یک واحد افزایش مقدار t، مقدار h چه تغییری می‌کند؟

....

۳ رابطهٔ بین دو کمیت h و t، خطی است یا غیر خطی؟ چرا؟

....

۴ $h(۲)$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟ $h(۱۸)$ چطور؟

....

۵ اگر $h(a)=۳۹$, a را پیدا کنید. این مقدار چه چیزی را نشان می‌دهد؟

....

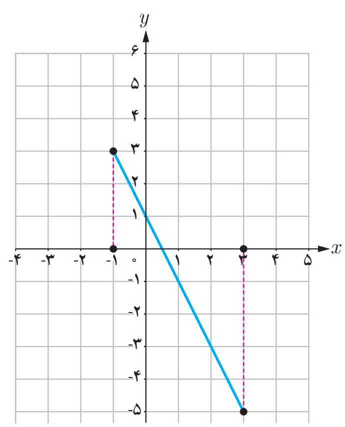
همان طور که می‌بینید در فعالیت (۱)، h و t با هم رابطهٔ خطی دارند و قانون تابعی که رابطهٔ آنها را توصیف می‌کند، یک چند جمله‌ای درجهٔ ۱ است. در این تابع به‌ازای هر ۱ واحد افزایش متغیر تابع، مقدار تابع ۳/۸ واحد افزایش می‌یابد. نمودار این تابع، یک خط راست با شیب ۳/۸ است.

تعریف

تابع‌هایی را که بتوان با قانون $f(x)=ax+b$ (a و b دو عدد مشخص هستند) نوشت، **تابع‌های خطی** می‌نامند. دامنهٔ این تابع‌ها می‌تواند $\mathbb{R}$ یا هر زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد. نمودار تابع‌های خطی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ به‌صورت خط راست است. ویژگی اساسی تابع‌های خطی، آن است که به‌ازای هر ۱ واحد افزایش یا کاهش متغیر تابع، مقدار تابع به اندازهٔ ثابتی تغییر می‌کند.

مثال ۱

تابع خطی $f(x)=-۲x+۱$ را با دامنهٔ $[-۱, ۳]$ در نظر بگیرید. مقدار تابع را در دو نقطه به طول‌های ۱− و ۳ به کمک قانون آن به‌دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.



داریم $f(-۱)=۳, f(۳)=-۵$. پس $\begin{bmatrix}-۱\\ ۳\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۳\\ -۵\end{bmatrix}$ دو نقطه از نمودار این تابع هستند و نمودار این تابع به شکل روبه‌رو است.

جدول زیر تعدادی از نقاط روی این خط را نشان می‌دهد.

x	−۱	۰	۱	۲	۳
$-۲x+۱$	۳	۱	−۱	−۳	−۵

$\boxed{-۲}$ $\boxed{-۲}$ $\boxed{-۲}$ $\boxed{-۲}$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، با هر ۱ واحد افزایش متغیر، مقدار تابع ۲ واحد کاهش می‌یابد و این نشان می‌دهد شیب خط ۲− است.

کار در کلاس ۱

رضا علاقهٔ زیادی به طراحی داشت. او تا سال قبل، ۵ طرح رسم کرده بود و تصمیم گرفت از این به بعد هر ماه ۲ طرح ارائه کند و این کار را تا ۱۲ ماه ادامه دهد.

۱ رضا قبل از این تصمیم، چند طرح داشت؟ او در آخر ماه اول چند طرح داشت؟ در آخر ماه پنجم چطور؟

....

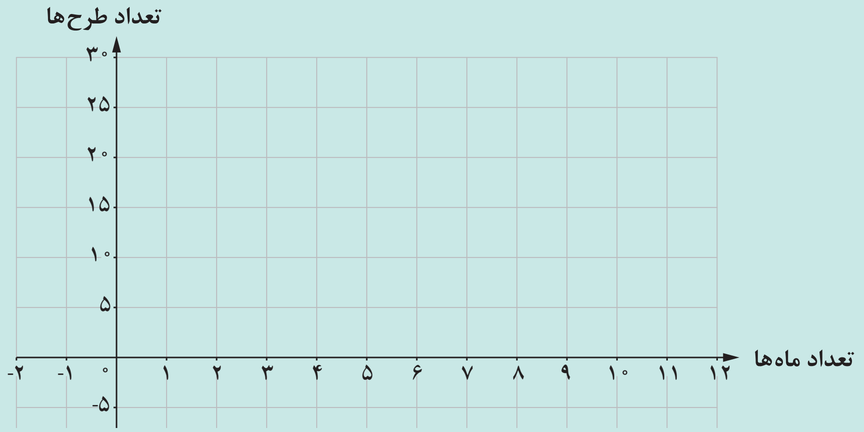
۲ اگر تعداد ماه‌های سپری شده را با x و تعداد کل طرح‌ها پس از x ماه را با $f(x)$ نمایش دهیم، قانون تابع f و دامنهٔ آن را بنویسید.

....

۳ مقادیر $f(۱۰), f(۰)$ را به‌دست آورید و معنای آن را بیان کنید. آیا $f(-۱)$ معنایی دارد؟

....

۴ اگر دامنهٔ تابع را بازهٔ $[۰, ۱۲]$ در نظر بگیریم، نمودار تابع را رسم کنید.



۵ اگر $f(a) = ۱۷$ مقدار a را به‌دست آورید و معنای آن را بیان کنید.

....

با مرور آنچه که دربارهٔ تابع‌های خطی دیدیم، مشاهده می‌شود که در برخی از تابع‌های خطی، با افزایش مقدار متغیر، مقدار تابع به میزان ثابتی افزایش می‌یابد و در برخی دیگر به‌میزان ثابتی کاهش می‌یابد.
آیا می‌توان تابع‌های خطی پیدا کرد که با افزایش یا کاهش مقدار متغیر، مقدار تابع تغییر نکند؟
در فعالیت زیر این نوع از تابع‌های خطی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

فعالیت (۲)

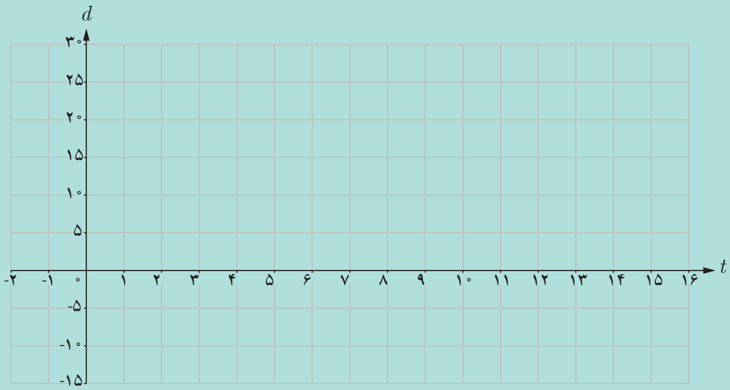
خودرویی از نقطهٔ A شروع به حرکت می‌کند و پس از طی ۲ کیلومتر پشت چراغ قرمز می‌ایستد. مدت زمان چراغ قرمز ۲۰ ثانیه است.

۱ مقدار مسافت طی شده به‌وسیلهٔ خودرو از نقطه A، پس از ۲ ثانیه توقف پشت چراغ قرمز چقدر است؟ پس از ۵ ثانیه چطور؟

۲ جدول زیر را کامل کنید.

t (زمان توقف برحسب ثانیه)	۰	۲	۵	۱۰	۲۰
d (مسافت طی شده برحسب کیلومتر)	—	—	—	—	—

۳ نمودار تابع را از زمان t=۰ تا زمان t=۲۰ رسم کنید.



۴ با تغییر زمان (t)، مسافت طی شده (d) چه تغییری می‌کند؟

در بازهٔ زمانی [۰,۲۰] که چراغ، قرمز است و خودرو پشت چراغ قرمز متوقف است، گرچه زمان می‌گذرد، مسافت طی شدهٔ خودرو از نقطهٔ A، ۲ کیلومتر است و تغییری نمی‌کند. قانون این تابعِ خطی، به‌صورت $f(t)=$۲ است و نمودار آن پاره خطی به موازات محور xهاست. در این فعالیت تابعی را بررسی کردیم که به ازای تمام مقادیر دامنه، مقداری ثابت دارد. این نوع تابع‌ها، ساده‌ترین نوع توابع خطی هستند.

تعریف

تابعی را که به‌ازای تمام مقادیر متغیر، مقداری ثابت دارد، **تابع ثابت** می‌نامند.

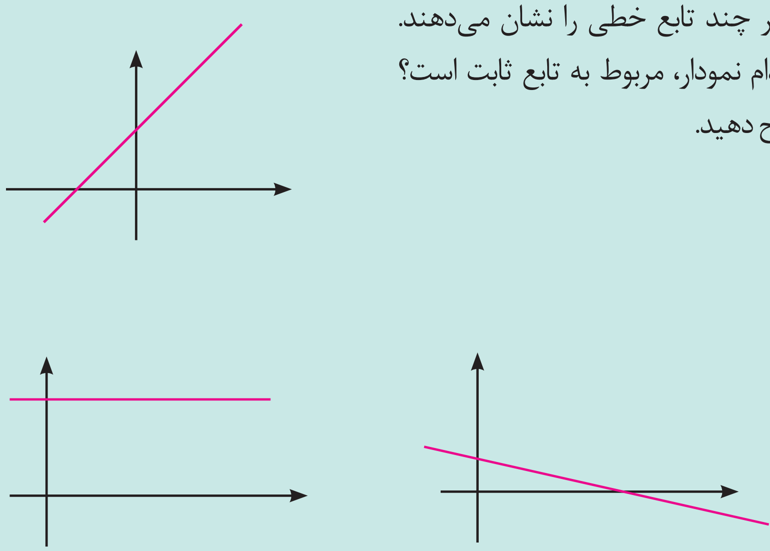
اگر f یک تابع ثابت باشد قانون آن به صورت $f(x)=c$ می‌باشد که در آن c یک عدد مشخص است. نمودار تابع ثابت با دامنهٔ $\mathbb{R}$ خطی به موازات محور xها (شیب صفر) است.

مثال ۲

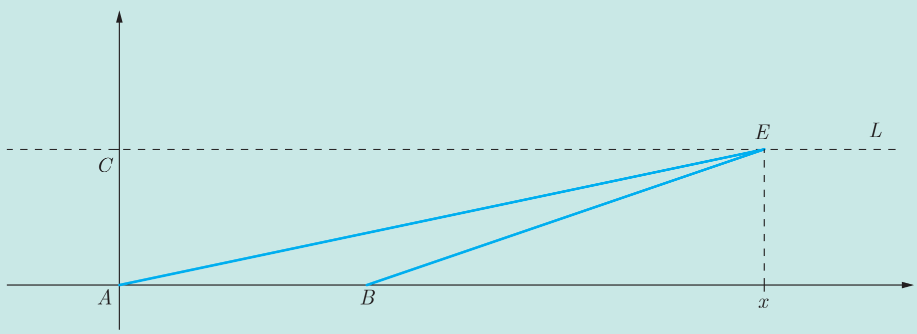
معمولاً پس از ۲۲ سالگی رشد قد متوقف می‌شود. طول قد که تابعی از زمان است در بازهٔ زمانی تقریبی ۲۲ سالگی تا حدود ۶۰ سالگی، تقریباً ثابت است. بنابراین طول قد افراد به عنوان تابعی بر حسب سن افراد، در این بازه، یک تابع ثابت است.

کار در کلاس ۲

۱ نمودارهای زیر چند تابع خطی را نشان می‌دهند.
مشخص کنید کدام نمودار، مربوط به تابع ثابت است؟
دلیل خود را توضیح دهید.



۲ در صفحهٔ مختصات زیر، مثلثی با رئوس $A=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ رسم کنید.



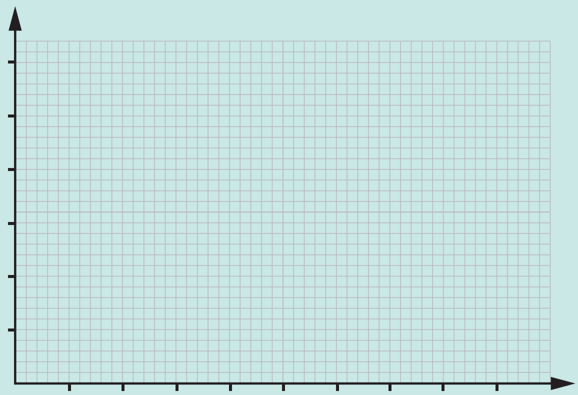
الف) در جدول زیر، x طول نقطه‌ای از خط L (مانند E) است و S (تابعی از x) مساحت مثلث ABE است. جدول زیر را کامل کنید و اختلاف مقادیر تابع را در داخل مربع‌ها بنویسید.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$S(x)$	....	....	....	....	....

ب) قانون این تابع را بنویسید و توضیح دهید چرا S تابعی خطی از x است؟

....

پ) با استفاده از جدول، نمودار تابع را رسم کنید.



می‌دانیم نمودار هر تابع خطی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ یک خط راست است. نمودار تابع خطی $f(x)=ax+b$ با تغییر مقادیر a و b چگونه تغییر می‌کند؟ فعالیت روبه‌رو، می‌تواند پاسخی برای این سؤال فراهم کند.

فعالیت (۳)

تابع خطی $f(x)=ax+b$ را در نظر بگیرید. با استفاده از جئوجبرا مطابق دستورالعمل صفحهٔ ۴۳، دو لغزنده برای a و b در نظر بگیرید.

۱ با ثابت نگه‌داشتن a و تغییر مقادیر b، نمودار تابع چگونه تغییر می‌کند؟ وضعیت خط‌های به دست آمده، نسبت به هم چگونه است؟

۲ با ثابت نگه داشتن b، به ازای مقادیر مختلف a، نمودار تابع چگونه تغییر می‌کند؟

۳ اگر a مثبت باشد، زاویهٔ خط با جهت مثبت محور طول‌ها چگونه است؟ اگر a منفی باشد، زاویهٔ خط با جهت مثبت محور طول‌ها چگونه است؟

فعالیت بالا نشان می‌دهد که با ثابت ماندن a و تغییر b نمودار تابع، خط‌هایی هستند که با یکدیگر موازی هستند. اگر b افزایش یابد، این خط به موازات خود به بالا منتقل می‌شود و اگر b کاهش یابد، این خط به موازات خود به پایین منتقل می‌شود و با صفرشدن b، خط از مبدأ می‌گذرد. با ثابت ماندن b و تغییر a خط‌هایی به دست می‌آیند که شیب‌های مختلفی دارند و همگی از یک نقطه می‌گذرند. اگر a مثبت باشد، زاویهٔ خط با جهت مثبت محور طول‌ها، زاویهٔ تند و اگر a منفی باشد این زاویه باز است.

مثال ۳

نمودار همهٔ تابع‌های خطی با قانون $f(x)=ax+۳$، در چه نقطه‌ای مشترک هستند؟

تابع‌های خطی $f(x)=ax+۳$ را در نظر می‌گیریم.

برای مثال:

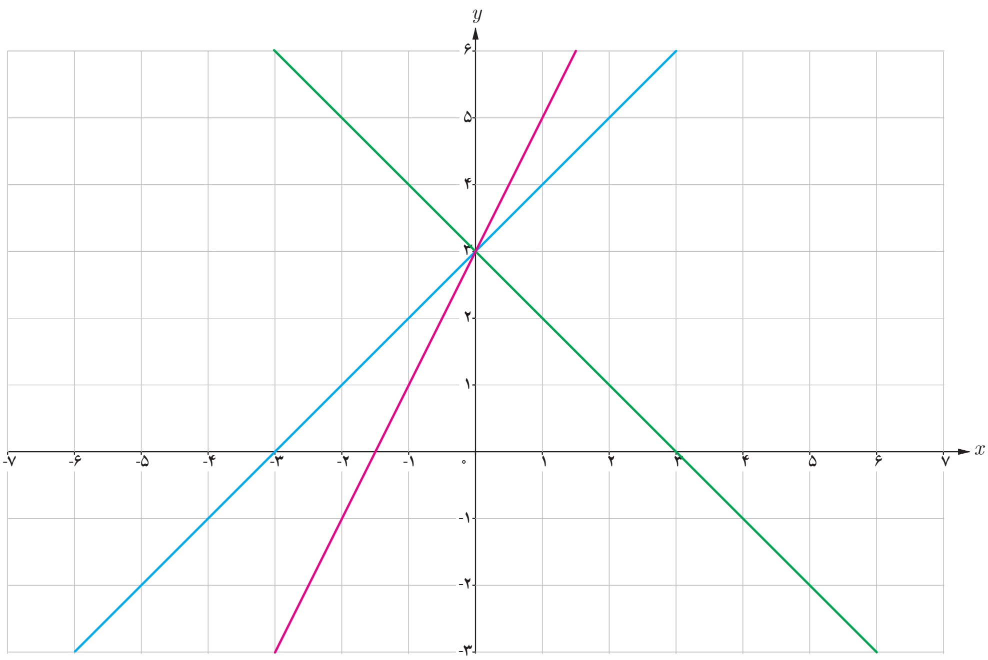
اگر $a=۱$ باشد، در این‌صورت قانون تابع $f(x)=x+۳$ است.

اگر $a=۲$ باشد، در این‌صورت قانون تابع $f(x)=۲x+۳$ است.

اگر $a=-۱$ باشد، در این‌صورت قانون تابع $f(x)=-x+۳$ است.

مشاهده می‌کنیم که برای مقدارهای مختلف a، تابع‌های مختلفی به دست می‌آید. برای رسم نمودار این تابع‌ها به کمک جئوجبرا، ابتدا لغزنده‌ای به‌نام a تعریف می‌کنیم (مطابق دستورالعمل صفحهٔ ۴۳). با کلیک راست روی نمودار، گزینهٔ ردیابی را فعال می‌کنیم تا بتوانیم نمودار این تابع‌ها را هم‌زمان مشاهده کنیم.

شکل زیر نمودار برخی از این تابع‌ها را نشان می‌دهد.



همان‌طور که مشاهده می‌کنیم نمودار این تابع ها، در نقطهٔ $\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$ همدیگر را قطع می‌کنند. پس تمام این تابع‌های خطی از نقطهٔ $\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$ می‌گذرد.

کار در کلاس ۳

۱ وضعیت خط‌های به معادلهٔ $2y+5x=c$ را به ازای مقادیر مختلف c، توصیف کنید. شیب این خط‌ها چقدر است؟

....

....

۲ وضعیت خط‌های به معادلهٔ $2y+cx=4$ را به ازای مقادیر مختلف c، توصیف کنید. این خط‌ها از چه نقطه مشترکی می‌گذرند؟

....

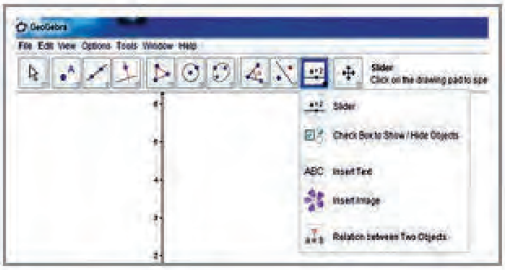
۳ آیا هر خطی در صفحهٔ مختصات، نمودار یک تابع خطی است؟ چرا؟

....

استفاده از نرم‌افزار

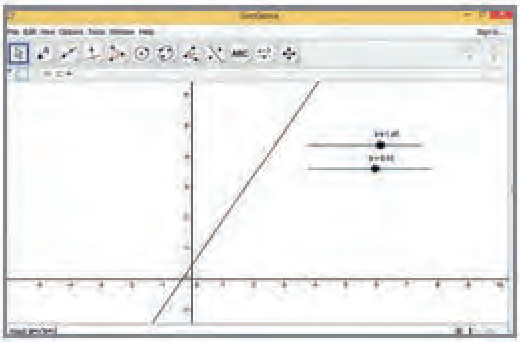
لغزنده در جئوجبرا

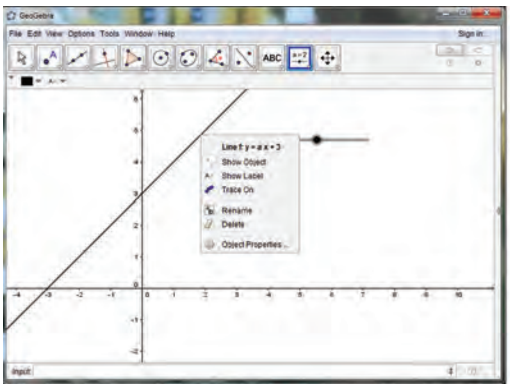
از نوار ابزار نرم افزار جئوجبرا دو Slider یا لغزنده به نام‌های a وb انتخاب کنید و دامنه تغییرات برای هرکدام تعریف کنید.



سپس در قسمت وارد کردن تابع، فرمول تابع را که شامل a و b است بنویسید.

برای تغییر مقدار a وb، نقطه روی لغزنده را حرکت دهید.





مسائل

۱ در زیر، جدول مقادیر مربوط به چهار تابع داده شده است. کدام جدول می‌تواند مربوط به یک تابع خطی باشد؟

x	۲-	۱-	۰	۱
$g(x)$	۵	۱۰-	۲۵-	۴۰-

x	۲-	۱-	۰	۱
$f(x)$	۸-	۱-	۰	۱

x	۰	۱	۲	۳
$k(x)$	۱	۳	۵	۷

x	۲-	۱-	۰	۱
$h(x)$	۵	۵	۵	۵

۲ علی در یک شرکت بیمه کار می‌کند. او ۱,۰۰۰,۰۰۰ تومان به‌عنوان حقوق پایه دریافت می‌کند و به ازای هر مشتری جدید که جذب می‌کند، ۵۰,۰۰۰ تومان به حقوقش اضافه می‌شود.

الف) قانونی برای حقوق علی به‌عنوان تابعی از تعداد مشتری‌هایی که ماهانه جذب می‌کند، بنویسید.

ب) اگر او در یک ماه ۱۲ مشتری جدید برای شرکت جذب کرده باشد، میزان حقوق او در آن ماه چقدر خواهد بود؟

پ) چرا این تابع خطی است؟

ت) اگر علی بخواهد در یک ماه ۲,۰۰۰,۰۰۰ تومان حقوق بگیرد، در این ماه چند مشتری باید جذب کند؟

۳ آرمان سوار بر یک کشتی، در فاصلهٔ ۱۰ کیلومتری از ساحل قرار دارد و با سرعت ثابت ۳کیلومتر بر ساعت از ساحل دور می‌شود. این حرکت ۵ ساعت ادامه داشته است.

الف) قانون و دامنهٔ تابع مربوط به فاصلهٔ آرمان از ساحل (برحسب کیلومتر) را برحسب t (زمان برحسب ساعت) بنویسید.

ب) آرمان پس از ۲ ساعت در چه فاصله‌ای از ساحل خواهد بود؟

....

پ)چرا این تابع خطی است؟ شیب نمودار این تابع مثبت است یا منفی؟

....

۴ دمای هوا در شهر تهران در تابستان، در طول یک هفته، در ساعت ۱ ظهر، ۳۵ درجهٔ سانتی‌گراد بوده است.

الف)جدول زیر را کامل کنید.

d (روز)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
t (دما برحسب درجه سانتی‌گراد)							

ب) دامنه و قانون این تابع را بنویسید.

....

پ) آیا این تابع، یک تابع ثابت است؟ چرا؟

ت) نمودار تابع را در دامنه‌اش رسم کنید.

....

۵ رابطهٔ بین دو واحد اندازه‌گیری دما، درجهٔ سانتی‌گراد (c) و درجهٔ فارنهایت (F) با قانون $F(c)=\frac{۹}{۵}c+۳۲$ بیان می‌شود.

الف) مقدارهای $F(۲۸)$ و $F(-۴۰)$ را محاسبه کنید و معنای آن را بیان کنید.

....

ب) دمای صفر درجهٔ سانتی‌گراد، معادل چند درجهٔ فارنهایت است؟

....

پ) اگر $F(c)=۲۱۲$، مقدار c را حساب کنید. c چه چیزی را نشان می‌دهد؟

....

تابع‌های درجهٔ دوم

گفتگو

صدرا در ایام تعطیلات تابستان به همراه خانواده‌اش به شهر تبریز سفر کرده بود. آنها با استفاده از یک دفترچهٔ راهنما که از ایستگاه گردشگری شهر دریافت کرده بودند، هر روز از یک مکان تاریخی یا یک موزه دیدن می‌کردند. آن روز برای بازدید به مسجد کبود رفته بودند. صدرا تمام مدت به سقف مسجد خیره و محو زیبایی آن شده بود.

او به پدرش گفت: معماران چگونه توانسته‌اند انحنای گنبد را با این دقت ایجاد کنند. آیا معماران در زمان قدیم از ریاضیات مربوط به این معماری اطلاع داشته‌اند؟! پدرش به او گفت که بهتر است این سؤال را از دبیر ریاضی‌اش بپرسد. وقتی صدرا این موضوع را برای دبیرش تعریف کرد، دبیر ریاضی گفت: این منحنی‌ها از ساده‌ترین نوع منحنی‌ها در ریاضی هستند، که منحنی‌های درجهٔ دوم نامیده می‌شوند. نمونه‌ای از این منحنی‌ها، نمودار $f(x)=x^۲$ است.

تعریف

تابع‌هایی را که بتوان قانون آنها را به‌صورت یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم نوشت، یک **تابع درجهٔ دوم** می‌نامند. قانون یک تابع درجهٔ دوم در حالت کلی به صورت $f(x)=ax^۲+bx+c$ است که درآن a و b و c اعداد حقیقی مشخصی هستند ($a\neq ۰$). دامنهٔ این تابع‌ها می‌توانند $\mathbb{R}$ یا هر زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشند.

مثال ۴

تابع‌های زیر نمونه‌هایی از تابع درجهٔ ۲ با دامنه $\mathbb{R}$ هستند.

۱) $f(x)=۲x^۲+۳x+۱$

۲) $g(x)=-۳x^۲+۵$

۳) $h(x)=۱/۲x^۲-۵x+۲$

اکنون می‌خواهیم بررسی کنیم که نمودار تابع‌های درجهٔ دوم دلخواه چگونه است. با توجه به اینکه با نمودار تابع درجهٔ دوم $y=x^2$ آشنا هستید، با نوشتن قانون $f(x)=ax^2+bx+c$ به فرم $f(x)=k(x-q)^2+p$ می‌توانیم نمودار هر تابع درجهٔ ۲ دلخواه را بررسی و رسم کنیم.
فعالیت زیر، شما را با شکل کلی نمودار تابع‌های درجهٔ دوم آشنا خواهد کرد.

فعالیت (۴)

به کمک جئوجبرا نمودار تابع $y=x^2$ را رسم کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید. (در هر مرحله یک لغزنده تعریف کنید).

۱ نمودار تابع‌های درجهٔ دوم $y=x^2+p$ را به ازای مقادیر مختلف p رسم کنید. وضعیت نمودار تابع $y=x^2+p$ را با نمودار تابع $y=x^2$ توصیف کنید.

....

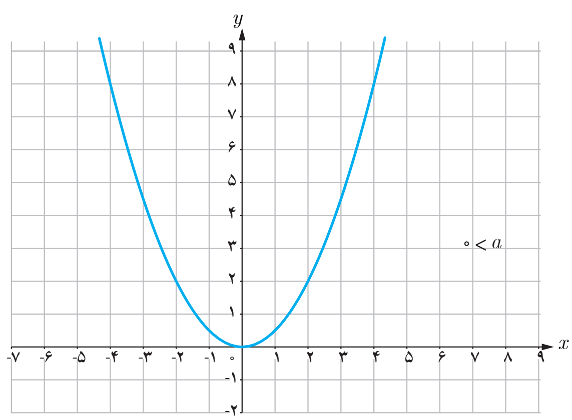
۲ نمودار تابع‌های درجهٔ دوم $y=(x-q)^2$ را به ازای مقادیر مختلف q رسم کنید. وضعیت نمودار تابع $y=(x-q)^2$ را با نمودار تابع $y=x^2$ توصیف کنید.

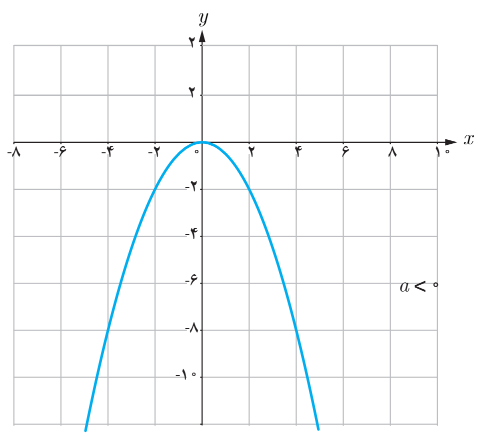
....

۳ نمودار تابع‌های درجهٔ دوم $y=kx^2$ را به ازای مقادیر مختلف مثبت و منفی برای k رسم کنید.
با تغییر علامت k از مثبت به منفی چه تغییری در نمودار ایجاد می‌شود؟

....

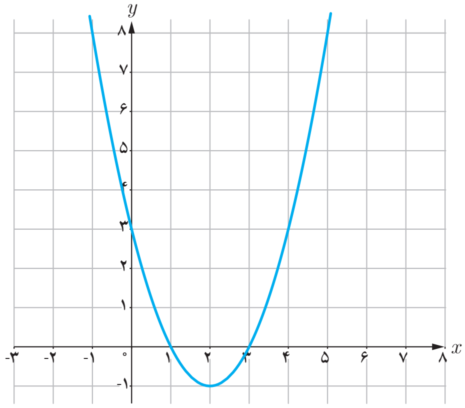
در فعالیت (۴)، با شکل کلی نمودار برخی از تابع‌های درجهٔ دوم آشنا شدید. نمودار هر تابع درجهٔ دوم از طریق نمودار تابع $y=ax^2$ با انتقال به پایین یا بالا (قسمت (۱)) و انتقال به چپ یا راست (قسمت (۲)) ساخته می‌شود. نمودار $y=ax^2$ برای حالت $a>0$ و $a<0$ در زیر آمده است.





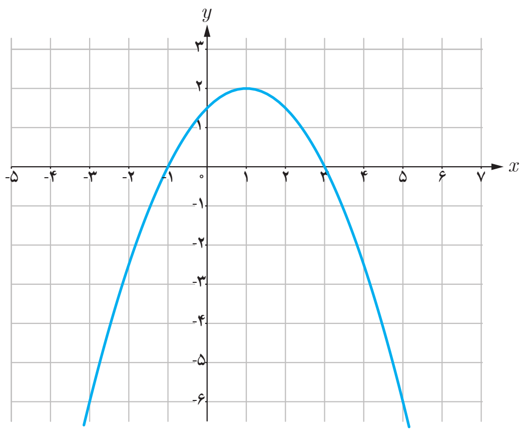
مثال ۵

الف) نمودار تابع $y=(x-۲)^۲-۱$ را رسم می‌کنیم.



نمودار این تابع همان نمودار تابع $y=x^۲$ است که به اندازهٔ ۲ واحد به سمت راست و به اندازهٔ ۱ واحد به پایین منتقل شده است.

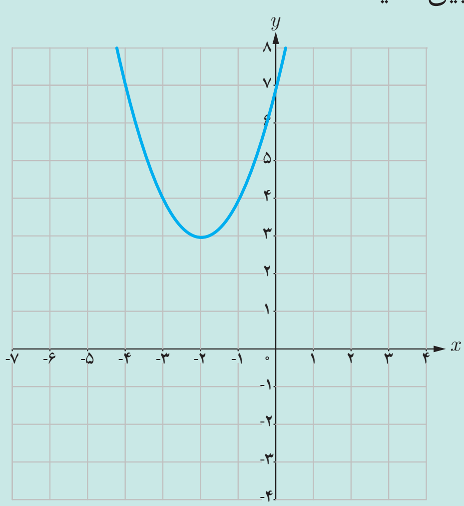
ب) اگر نمودار تابع درجهٔ دوم $y=k(x-q)^۲+p$ به شکل زیر باشد، علامت k و مقدار p و q را تعیین کنید.



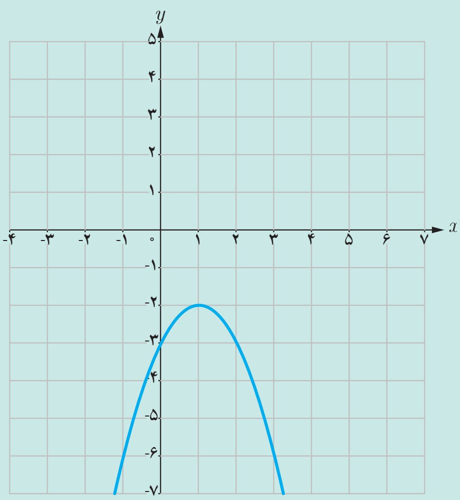
به سمت پایین بودن نمودار، نشان می‌دهد که $k<۰$. این شکل نشان می‌دهد که نمودار تابع $y=kx^۲$، ۱ واحد به راست و ۲ واحد به بالا منتقل شده است، پس $q=۱$ و $p=۲$.

کار در کلاس ۴

نمودارهای زیر مربوط به تابع درجهٔ دوم $y=k(x-q)^۲+p$ می‌باشد، علامت k ومقدار p و q را تعیین کنید.



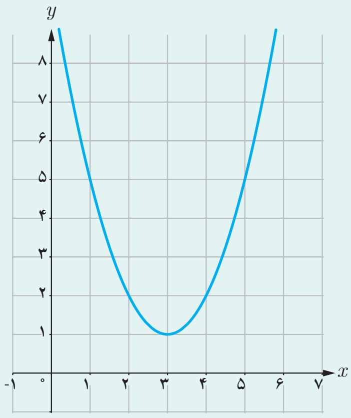
الف



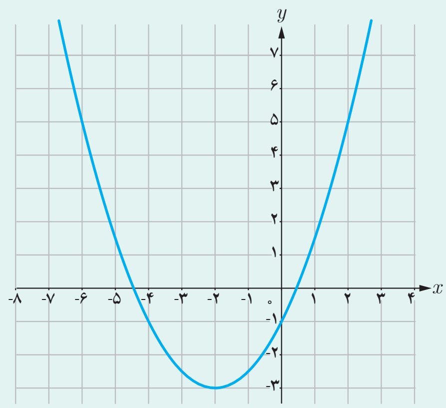
ب

مسائل

۱ نمودارهای زیر مربوط به تابع درجهٔ دوم، $y=k(x-q)^{۲}+p$ هستند. علامت k و مقدار q , p را تعیین کنید.



ب



الف

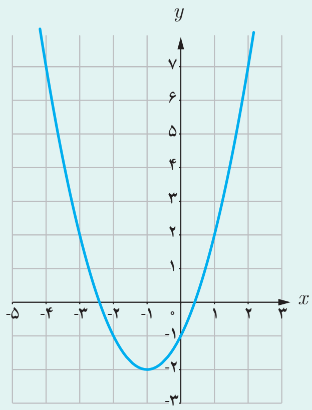
۲ نمودار زیر مربوط به یک تابع درجهٔ دوم است. مشخص کنید که کدام قانون، مربوط به این نمودار است.

الف) $f(x)=(x-۱)^{۲}+۱$

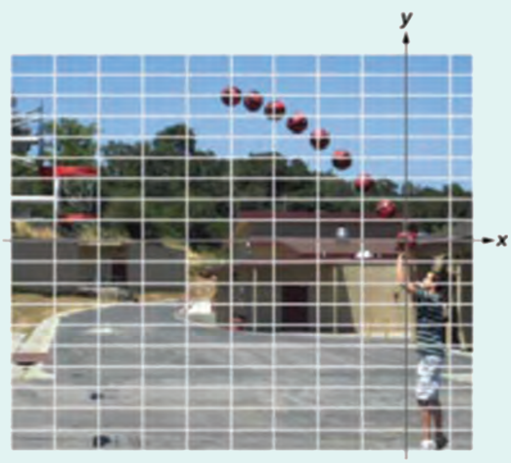
ب) $f(x)=(x-۱)^{۲}-۱$

پ) $f(x)=(x+۱)^{۲}+۲$

ت) $f(x)=(x+۱)^{۲}-۲$



۳ فرید بسکتبال بازی می‌کند. تصویر زیر یک پرتاب او را به سمت سبد نشان می‌دهد. صفحهٔ مختصات طوری قرار داده شده است که مبدأ مختصات دقیقاً روی نقطهٔ پرتاب توپ قرار گیرد. ارتفاع توپ از سطح زمین در هر لحظه یک تابع درجهٔ دوم با قانون $h(x)=k(x-q)^{۲}+p$ است. علامت k و p و q را تعیین کنید.



کاربرد تابع‌ها در حل معادله‌ها

گفتگو

برف شدیدی در حال باریدن بود. امیر و امین و چند نفر از هم‌کلاسی‌هایشان به همراه دبیر ریاضی خود قرار بود فردای آن روز به کوه بروند. پدر امیر که کوه‌نوردی حرفه‌ای بود به آنها قول داده بود که به‌همراه گروه، فردا به کوه بیاید تا گروه را راهنمایی کند. او به گروه توصیه کرد لباس گرم همراه داشته باشند.

صبح زود، گروه در حال بالا رفتن از کوه بود که امیر گفت: من سردم شده است. پدرش به او گفت: بهتر است یکی از لباس‌هایی را که آورده‌ای بپوشی، هر چه بالاتر برویم، هوا سردتر می‌شود. امیر رو به دبیر ریاضی کرد و گفت: معلوم می‌شود دما به ارتفاع بستگی دارد. آیا دما، تابعی از ارتفاع است؟ دبیر گفت: بله همین طور است. در واقع به ازای هر ۱۵۰ متر افزایش ارتفاع، ۱ درجه از دمای هوا کاسته می‌شود. امین پرسید: آیا می‌توانیم بفهمیم در چه ارتفاعی، دمای هوا صفر درجه می‌شود؟ دبیر قول داد که در کلاس، راجع به این موضوع بیشتر بحث کنند.

فعالیت (۵)

اگر دما در سطح دریا ۱۵ درجهٔ سانتی‌گراد باشد، در کوه دماوند رابطهٔ بین دما (T بر حسب درجه سانتی‌گراد) و ارتفاع از سطح دریا (h بر حسب متر) با قانون $T(h)=۱۵-\frac{h}{۱۵۰}$ مشخص می‌شود. در اینجا T تابعی از h است و دامنهٔ این تابع بازهٔ $[۰،۵۶۱۰]$ است.

(۵۶۱۰، ارتفاع قلهٔ دماوند برحسب متر است)

۱ $T(۰)$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟

....

۲ در ارتفاع ۱۸۰۰ متری از سطح دریا، دما چند درجه است؟

....

۳ نمودار تابع T در زیر رسم شده است. با توجه به نمودار به سؤال‌های زیر پاسخ دهید. روی محور افقی هر واحد را ۱۰۰متر در نظر می‌گیریم.

الف) تابع T ، از درجهٔ .... است.

ب) نمودار این تابع درچه نقطه‌ای محورافقی (ارتفاع) را قطع می‌کند؟ این نقطه چه چیزی را نشان می‌دهد؟

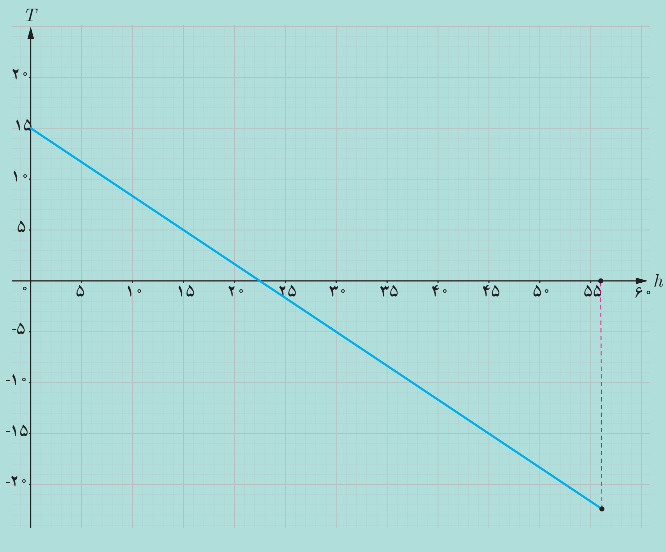
....

۴ جواب معادلهٔ $۱۵-\frac{h}{۱۵۰}=۰$ را بیابید. جواب این معادله چه چیزی را نشان می‌دهد؟

....

۵ از مقایسه (۳) و (۴) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

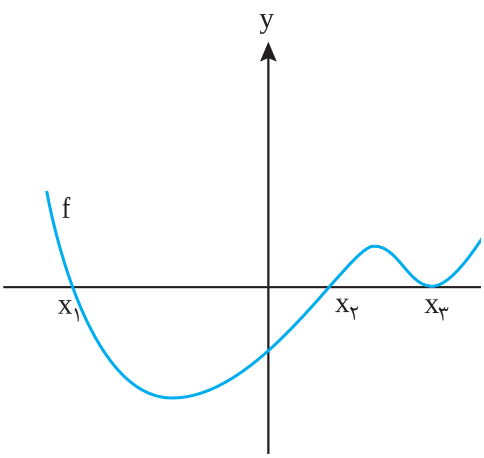
....



در فعالیت (۵) دیدیم که نمودار تابع T، محور افقی را در نقطه $h=۲۲۵۰$ قطع می‌کند؛ یعنی دما، در ارتفاع ۲۲۵۰ متری از سطح دریا، صفر درجهٔ سانتیگراد است. همچنین دیدیم، برای پیدا کردن جواب معادلهٔ $۱۵-\frac{h}{۱۵۰}=۰$ ، کافی است طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع $T(h)=۱۵-\frac{h}{۱۵۰}$ با محور افقی را بیابیم.

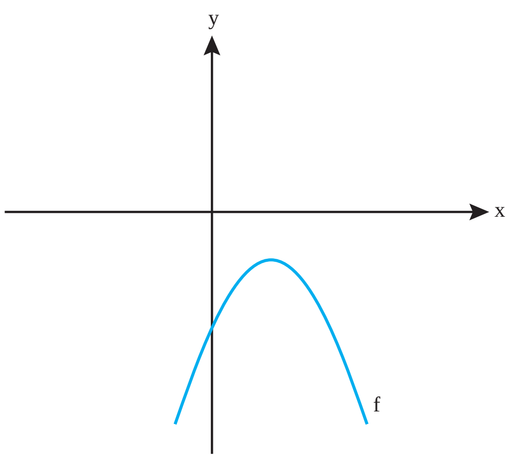
در حالت کلی برای حل معادلهٔ $ax+b=۰$ می‌توان نمودار تابع $f(x)=ax+b$ را رسم کرد. طول محل برخورد نمودار این تابع با محور xها همان جواب معادلهٔ $ax+b=۰$ است.

همچنین، برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ می‌توان نمودار تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ را رسم کرد. طول محل‌های برخورد نمودار این تابع با محور xها (درصورت وجود) همان جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم هستند.



از این روش می‌توان برای حل همهٔ معادله‌ها استفاده کرد. هر معادله‌ای را می‌توان به شکل کلی $f(x)=۰$ نوشت که در آن f تابعی با دامنهٔ مشخص است. با رسم نمودار f، محل‌های برخورد نمودار با محور xها (درصورت وجود) جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ هستند. در شکل روبه‌رو، نقاط $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ هستند. اگر نمودار f محور xها را قطع نکند، به این معناست که معادلهٔ $f(x)=۰$ جواب ندارد.

مثال ۶



معادلهٔ $-x^۲+۲x-۲=۰$ را به کمک رسم نمودار حل کنید.

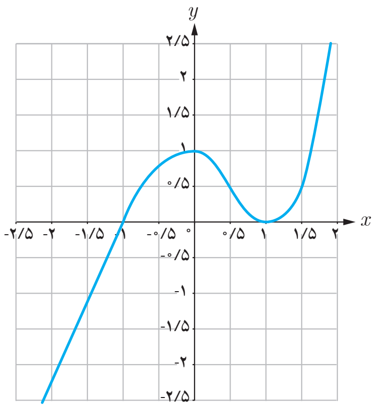
شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)=-x^۲+۲x-۲$ را نشان می‌دهد. این نمودار محور طول‌ها را قطع نمی‌کند. پس معادلهٔ بالا جواب ندارد.

مثال ۷

معادلهٔ $x^3-x^2-x+1=0$ را به کمک رسم نمودار حل کنید.

نمودار تابع $y=x^3-x^2-x+1$ را به کمک جئوجبرا رسم می‌کنیم (شکل روبه‌رو).

این نمودار، محور طول‌ها را در نقاط ±1 قطع می‌کند، پس جواب‌های آن معادله، ±1 هستند.

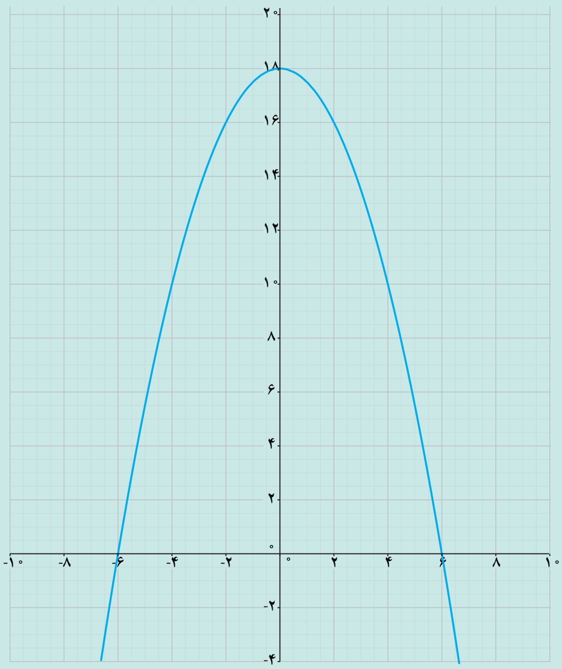


کار در کلاس ۵

آب از بالای آبشاری که ارتفاع آن ۱۸۰ متر است، به رودخانه می‌ریزد. تابع $h(t)=-5t^2+180$ ارتفاع یک قطرهٔ آب (بر حسب متر) از سطح رودخانه را بعد از t ثانیه از جدا شدن از بالای آبشار نشان می‌دهد.

۱ ارتفاع یک قطره آب از سطح رودخانه بعد از ۲ ثانیه، چقدر است؟

....



۲ نمودار تابع با قانون $h(t)$ و دامنهٔ $\mathbb{R}$ آورده شده است. (زمان را روی محور افقی و ارتفاع را روی محور عمودی، هر واحد ۱۰متر، در نظر بگیرید.) نمودار این تابع در چه نقطه‌هایی محور xها را قطع می‌کند؟ این نقطه‌ها چه چیزی را نشان می‌دهند؟

....

۳ جواب‌های معادلهٔ $-5t^2+180=0$ چه مقادیری هستند؟ کدام جواب در شرایط این مسئله قابل قبول نیست؟ دلیل خود را بیان کنید.

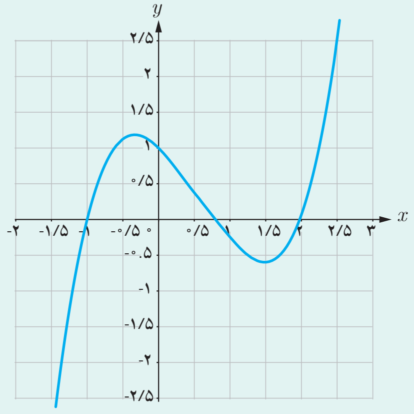
....

۴ دامنهٔ تابع h را طوری تعیین کنید که قانون $h(t)$ ارتفاع قطره آب از سطح رودخانه را مشخص کند.

....

مسائل

۱ اگر نمودار تابع f به شکل زیر باشد، کدام گزینه جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ است.



الف) ۲ و ۲ـ و ۱ـ

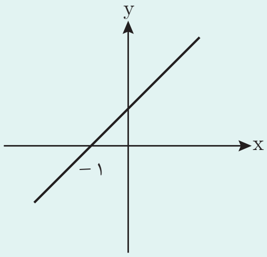
ب) ۱ و ۱ـ و ۰/۸

پ) ۲ و ۰/۸ و ۱ـ

ت) معادله جواب ندارد.

۲ شکل زیر نمودار خط به معادلهٔ $y = ax + ۲$ است.

با استفاده از شکل a را پیدا کنید.



۳ معادلات زیر را به کمک رسم نمودار با استفاده از جئوجبرا حل کنید.

الف) $۳x-۶=۰$

پ) $x^۲+۵x+۶=۰$

ث) $x^۳-۳x^۲+۳x-۱=۰$

ب) $-۳x^۲-۲x=۱۶$

ت) $x^۳-x^۲=۴x+۱$

ج) $x^۳-۳x-۲=۰$

۴ توپی را به هوا پرتاب می‌کنیم. ارتفاع آن از سطح زمین (بر حسب متر) تابعی از زمان (برحسب ثانیه) است. اگر ارتفاع توپ را با h و زمان را با t نشان دهیم برای یک پرتاب خاص، قانون این تابع به صورت $h(t)=-۵t^۲+۲۰t$ است. دامنه تابع $[۰,۴]$ است.

در چه زمان‌هایی ارتفاع این توپ ۲ متر است؟ چند جواب به دست می‌آید؟چرا؟

کاربرد تابع‌ها در حل نامعادله‌ها

گفتگو

یک مؤسسهٔ خیریه با هدف کمک به ایتام و کودکان بی سرپرست فعالیت می‌کند. این مؤسسه به‌طور فصلی نمایشگاهی از دست سازها، برگزار می‌کند و درآمد حاصل از فروش آنها، را صرف این کودکان می‌کند.

در نمایشگاه سال قبل، درآمد حاصل از فروش یک نوع دست ساز، ۸ میلیون تومان بوده است. هیئت مدیرهٔ مؤسسه تصمیم گرفته است که در سال جاری، درآمد حاصل را به بیش از ۸ میلیون تومان برساند. بر اساس اطلاعات اقتصادی، رابطهٔ بین قیمت این کالا و میزان کالای فروخته شده به صورت $x=80000-200p$ است که در آن p قیمت کالا (بر حسب هزار تومان) و x تعداد کالای فروخته شده است.

آنها تصمیم دارند قیمت کالا را طوری تنظیم کنند تا درآمد حاصل از فروش به بیش از ۸ میلیون تومان برسد. با انجام فعالیت زیر می‌توانیم مدلی برای پاسخ‌گویی به این مسئله بسازیم.

فعالیت (۶)

۱ درآمد حاصل از فروش x کالا با قیمت p را با R نشان دهید و معادلهٔ درآمد را تشکیل دهید.

....

۲ رابطهٔ بین قیمت کالا و میزان کالای فروخته شده به صورت $x=80000-200p$ است. تابع درآمد را برحسب p بنویسید.

....

۳ چندجمله‌ای قانون تابع درآمد بر حسب p از درجهٔ چند است؟

....

۴ رابطه‌ای برای p بنویسید که در آن، درآمد حاصل از فروش دست سازها، بیشتر از ۸ میلیون تومان باشد.

....

همان طور که در فعالیت بالا دیدید، هدف مؤسسه، پیدا کردن رابطه‌ای بین قیمت کالا و درآمد حاصل از فروش است تا با قیمت‌گذاری مناسب، درآمدی بیش از ۸ میلیون تومان داشته باشد. مدل ریاضی این مسئله یک نامساوی است که با استفاده از آن می‌توان شرایط مطلوب مسئله را برقرار کرد.

این گونه نامساوی‌ها را **نامعادله** می‌نامند.

تعریف

نامساوی‌هایی به صورت $ax^2+bx+c \leq 0$ یا $ax^2+bx+c \geq 0$ را که در آنها a، b، c اعداد مشخصی هستند ($a\neq 0$) **نامعادلهٔ درجهٔ دوم** می‌نامند. مقدارهایی از x که نامعادله را به یک نامساوی درست تبدیل می‌کنند، **جواب‌های نامعادله** می‌نامند.

مثال ۸

توپی از بالای ساختمانی به ارتفاع ۱۵ متر به هوا پرتاب شده است. ارتفاع این توپ از سطح زمین، به عنوان تابعی از زمان (t برحسب ثانیه) در یک پرتاب خاص با تابع $h(t)=-5t^2+12t+15$ بیان شده است. اگر بخواهیم زمان‌هایی را که ارتفاع توپ بیش از ۱۸ متر است به‌دست آوریم، باید نامعادلهٔ $-5t^2+12t+15>18$ را تشکیل دهیم که می‌توان آن را به صورت $-5t^2+12t-3>0$ نوشت. جواب‌های این نامعادله همان زمان‌هایی است که ارتفاع توپ بیش از ۱۸ متر است.

کار در کلاس ۶

در یک شرکت سازندهٔ تلفن همراه، رابطهٔ بین قیمت فروش تلفن همراه (p)، (برحسب صدهزار تومان) و تعداد تلفن همراه فروخته شده (x)، از رابطهٔ $p=15-0/25x$ به دست می‌آید.

۱ مقدار x را بر حسب p بنویسید.

....

۲ درآمد حاصل از فروش تعداد x کالا ($\boldsymbol{R(p)}$) را بر حسب p بنویسید.

....

۳ نامعادله‌ای بنویسید که نشان دهد برای چه مقدارهای p، درآمد حاصل از فروش، بیشتر از ۴۰۰ میلیون است.

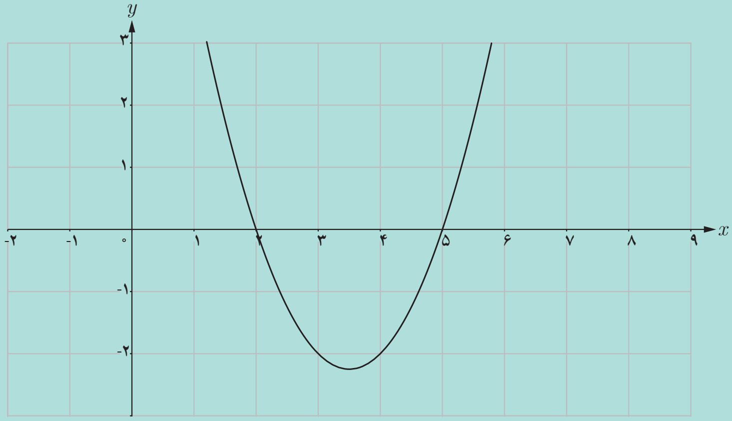
....

همان طور که مشاهده می‌کنید مدل ریاضی برخی از مسائلی که با آن روبه‌رو می‌شویم به صورت نامعادله است و برای حل مسئله لازم است نامعادله را حل کنیم. در بخش قبل دیدیم که محل‌های برخورد نمودار تابع $y=f(x)$ با محور طول‌ها (در صورت وجود)، جواب‌های معادله $f(x)=0$ هستند. یعنی برای حل معادله $f(x)=0$، می‌توانیم از نمودار تابع f کمک بگیریم.

فعالیت صفحهٔ بعد نشان می‌دهد برای حل نامعادله‌ها نیز می‌توان از نمودار تابع‌ها استفاده کرد.

فعالیت ۷

تابع $f(x)=x^2-7x+10$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. نمودار آن در زیر رسم شده است.



۱ طول نقاط محل برخورد نمودار تابع با محور xها ، چه چیزی را نشان می‌دهند؟

....

۲ با استفاده از نمودار، جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$ را به دست آورید.

....

۳ آن قسمت از نمودار تابع را که بالای محور xها قرار گرفته است، رنگی(پررنگ) کنید. و جمله زیر را کامل کنید:

عرض نقاط رنگی(کوچک‌تر از صفر / بزرگ‌تر از صفر) است.

۴ به ازای چه مقادیری از دامنه، مقدار تابع مثبت است؟ این مقادیر از دامنه را به صورت بازه نمایش دهید.

....

۵ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^2-7x+10>0$ با مجموعه به دست آمده در (۴) چه رابطه‌ای دارد؟ توضیح دهید.

....

۶ آن قسمت از نمودار تابع را که پایین محور xها قرار گرفته است با رنگ دیگری مشخص کنید.

....

۷ به ازای چه مقادیری از دامنه، مقدار تابع منفی است؟ این قسمت از دامنه را با استفاده از بازه‌ها بنویسید.

....

۸ آیا مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^2-7x+10<0$ همان مجموعهٔ به دست آمده در (۷) است؟ توضیح دهید.

....

همان‌طور که در فعالیت (۷) می‌بینید، برای xهایی که نمودار تابع بالای محور xهاست، داریم $f(x)>0$؛ پس مجموعهٔ این xها دقیقاً همان مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $f(x)>0$ است. به طور مشابه، برای xهایی که نمودار تابع، پایین محورxها است مقدار $f(x)$ منفی است و $f(x)<0$. پس مجموعهٔ این xها دقیقاً همان مجموعه جواب‌های نامعادلهٔ $f(x)<0$ است. نمودار تابع $f(x)=x^2-7x+10$ محور xها را در نقاطی به طول ۲ و ۵ قطع می‌کند. نمودار این تابع در بازهٔ (۲، ۵) زیر محور xها است و این بازه دقیقاً همان مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^2-7x+10<0$ است. همچنین، نمودار این تابع، در مجموعهٔ $(-\infty, 2)\cup(5, +\infty)$ بالای محور xها است و این مجموعه دقیقاً همان مجموعه جواب‌های نامعادلهٔ $x^2-7x+10>0$ است.

در حالت کلی برای حل نامعادلهٔ $f(x)>0$ که f یک تابع است، ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم. سپس، آن قسمت از نمودار تابع را که بالای محور xها است مشخص می‌کنیم. آن xهایی از دامنهٔ f که به ازای آنها، نمودار تابع بالای محور xها است مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $f(x)>0$ است.

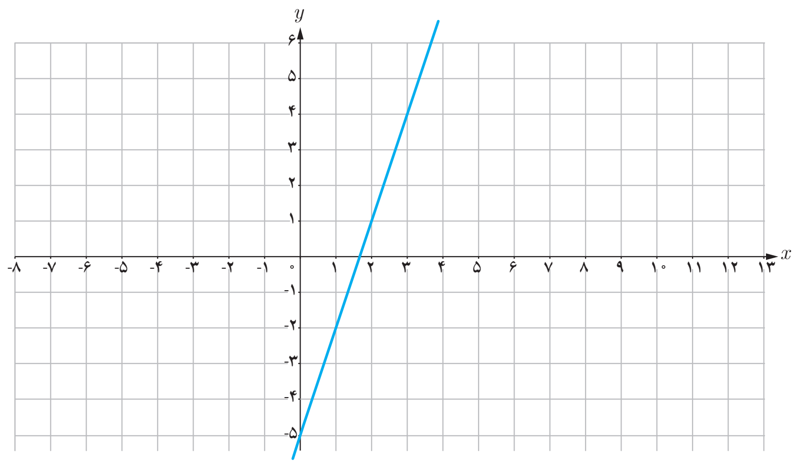
به طور مشابه، برای حل نامعادلهٔ $f(x)<0$، ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم. سپس، آن قسمت از نمودار تابع را که پایین محور xها است را مشخص می‌کنیم. آن xهایی از دامنهٔ f که به ازای آنها نمودار تابع، پایین محور xها است مجموعهٔ جواب‌های نامعادله $f(x)<0$ می‌باشد.

مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های به صورت $f(x)\geq 0$ (یا $f(x)\leq 0$) علاوه بر مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $f(x)>0$ یا $f(x)<0$، طول نقاط برخورد نمودار تابع با محور xها را هم شامل می‌شود.

مثال ۹

نامعادلهٔ $2x-1>4-x$ را با رسم نمودار حل کنید.

ابتدا بـا انتقال جملات به یک طرف، نامعادله را به شکل $3x-5>0$ می‌نویسیم. سپس، نمودار تابع $f(x)=3x-5$ را که دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ است رسم می‌کنیم.

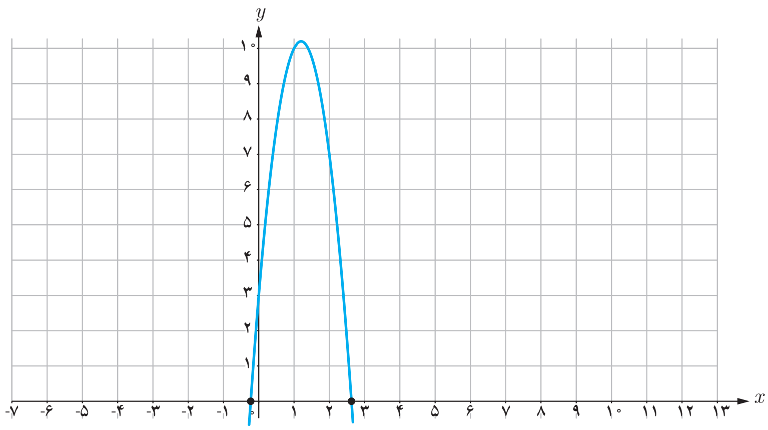


این خط در نقطه‌ای به طول $x=\frac{۵}{۳}$، محورxها را قطع می‌کند و در بازهٔ $(\frac{۵}{۳},+\infty)$ بالای محورxها است. پس، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۳x-۵>۰$ عبارت است از $(\frac{۵}{۳},+\infty)$.

مثال ۱۰

نامعادلهٔ $-۵t^{۲}+۱۲t+۵\geq ۲$ را حل کنید.

ابتدا نامعادله را به صورت $-۵t^{۲}+۱۲t+۳\geq ۰$ می‌نویسیم. سپس، نمودار تابع $f(t)=-۵t^{۲}+۱۲t+۳$ را که دامنه آن $\mathbb{R}$ است به کمک جئوجبرا رسم می‌کنیم.



جئوجبرا، محل تقریبی برخورد نمودار این تابع با محور xها را در نقاط به طول تقریبی ۰/۲۳- و ۲/۶۳ نشان می‌دهد. در بازهٔ بین این نقاط نمودار تابع بالای محور xها است، پس مجموعهٔ جواب این نامعادله، بازهٔ [۰/۲۳-, ۲/۶۳] است.

کار در کلاس ۷

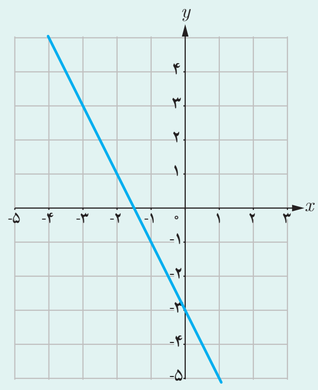
مستطیل‌هایی را در نظر بگیرید که طول آنها ۸ سانتی‌متر بیشتر از عرض آنها است. عرض این مستطیل‌ها چه مقادیری باید داشته باشند تا مساحت آنها از ۲۵ سانتی‌متر مربع کمتر باشد.

....

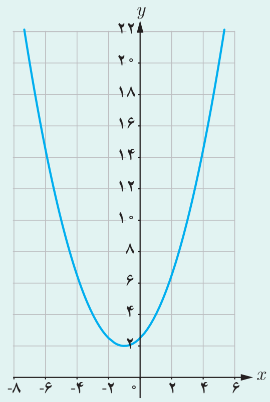
....

مسائل

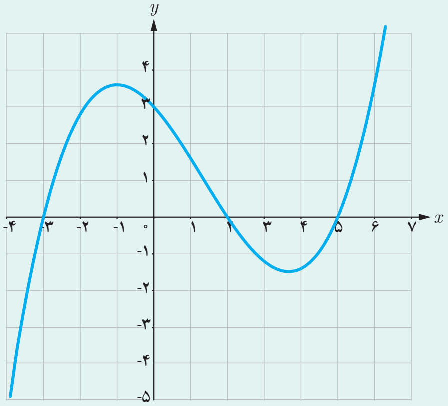
۱ در زیر نمودارهای چهار تابع رسم شده است. در هر مورد، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $f(x)\geq ۰$ را مشخص کنید.



الف



ب



پ

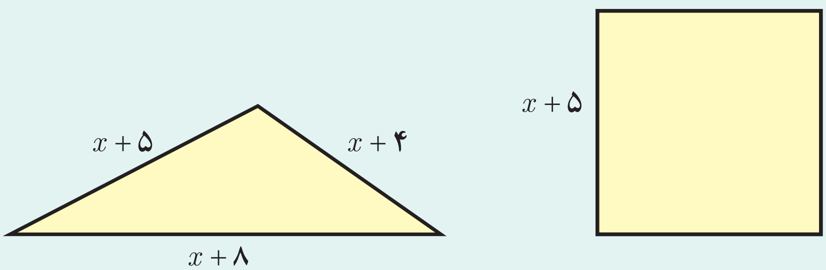
۲ نامعادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $۲x-۳<۰$ ب) $۳x^{۲}-۵x-۱>۰$ پ) $-x^{۲}+۴x+۳\geq -۲$

۳ پرتابه‌ای به طورعمودی به هوا پرتاب می‌شود. ارتفاع این پرتابه از سطح دریا (برحسب متر) به صورت تابعی از زمان(برحسب ثانیه) با رابطهٔ $h(t)=-۵t^{۲}+۱۰۰t$ داده شده است. مشخص کنید در چه بازهٔ زمانی، ارتفاع این پرتابه بیش از ۲۰۰ مترخواهد بود.

....

۴ مقدار x را طوری بیابید که اندازهٔ محیط مثلث از اندازهٔ مساحت مربع کمتر باشد.



۵ علی به تازگی یک کارگاه تولید قطعات یدکی راه اندازی کرده است. درآمد حاصل از فروش کالا به قیمت p (برحسب تومان) از قانون $R(p)=-۱۰۰p^{۲}+۵۰۰۰۰p$ به دست می‌آید. به‌ازای چه مقادیری برای p، میزان درآمد شرکت بیش از ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ است؟

خواندنی

هدایت غریزی زنبور عسل: مهندس طبیعت

کندوی زنبور عسل نمونهٔ بارزی از طرّاحی و استحکام است. ساختار کندو به‌گونه‌ای است که بیشترین فضا برای جمع‌آوری شیره را دارا می‌باشد. محاسبات ریاضی‌دانان نشان داده است که شش ضلعی مناسب‌ترین شکل هندسی برای دستیابی به این ویژگی است. زنبورها با الهام از وحی الهی، قوانین هندسی را رعایت نموده و پناهگاهی اَمن برای خود طراحی می‌کنند. یافته‌های انسان از دیرباز از به‌کارگیری و مدل‌سازی پدیده‌های خلقت حکایت دارد. امروزه ساختار کندوی عسل، الهام‌بخش الگوی آجرهای کم‌وزن و در عین حال با استحکام است. همچنین از بافتی مشابه شانه عسل در ساخت لاستیک‌های مخصوص زمستان یا تختهٔ اسنوبورد استفاده می‌شود.

خداوند متعال این حقیقت علمی را این‌چنین به زنبور عسل الهام فرموده است:

و پروردگار تو به زنبور عسل الهام کرد: از کوه‌ها، درخت‌ها و بناها خانه‌هایی برای خود برگیر؛ سپس از تمام ثمرات (و شیرهٔ گل‌ها) بخور و راه‌های پروردگارت را به اطاعت بپیما. آنگاه از درون آنها، شربتی رنگارنگ خارج می‌شود که در آن، شفا و درمان برای مردم است. به‌راستی در این امر، برای مردم اندیشمند نشانه‌ای است.

سورهٔ نحل آیات ۶۸ و ۶۹

تحقیقات بسیاری دربارهٔ الگوهای ریاضی موجود در مسیر حرکت زنبورها و دیگر ابعاد زندگی آنها انجام شده است. ساده‌ترین رابطهٔ ریاضی که می‌توان مشاهده کرد، رابطهٔ بین تعداد حجره یا سلول‌ها (شش ضلعی‌ها) با شماره حلقه‌های دور یک سلول است که با یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ ۲ نمایش داده می‌شود. اگر n شماره حلقه باشد، $Q(n)=۳n^۲-۳n+۱$ تابعی است که به کمک آن می‌توان تعداد حجره‌ها را پیدا کرد.