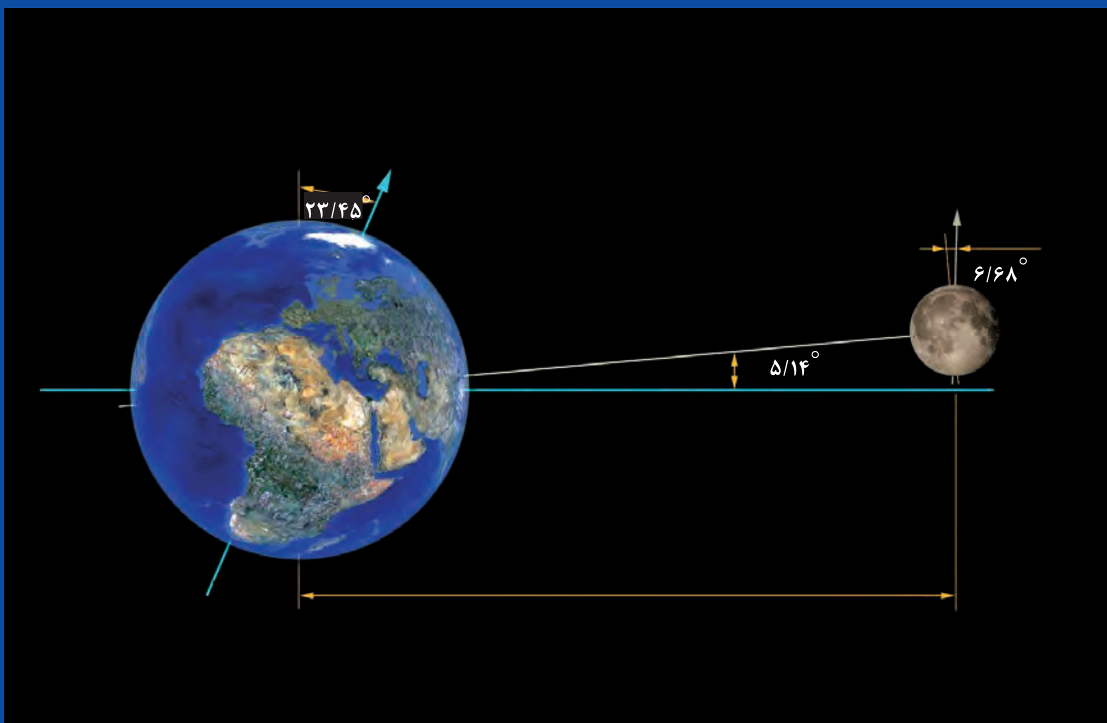
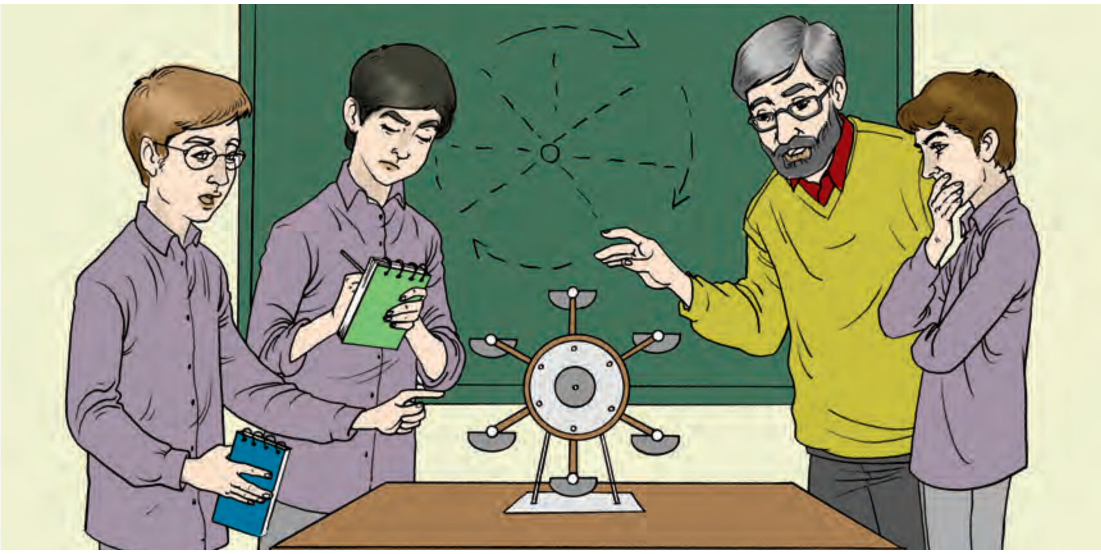
پودمان سوم

زاویه‌های دلخواه و نسبت‌های مثلثاتی آنها



حرکات چرخشی در طبیعت بسیار رخ می‌دهند و برای تبیین ریاضی آنها لازم است مفهوم زاویه‌ها را گسترش دهیم و نسبت‌های مثلثاتی را برای آنها تعریف کنیم.

زاویهٔ چرخش



دیروز، مجید به همراه خانوادهٔ خود به شهر بازی رفته بود. در آنجا چرخ و فلک بزرگی بود که مجید و بقیهٔ جوان‌ترها سوار یکی از کابین‌های آن شدند. بقیه روی نیمکت نشستند و از پایین آنها را تماشا می‌کردند. چرخ و فلک برای پیاده و سوار کردن افراد گاهی می‌ایستاد و سپس حرکت می‌کرد. پدر مجید که روی نیمکت نشسته بود آنها را گم کرد. او با تلفن همراه خود با مجید تماس گرفت تا بداند آنها کجا هستند. مجید نمی‌دانست چگونه موقعیت خود را بیان کند تا پدرش جای او را پیدا کند. او با خود فکر کرد که چگونه می‌توان موقعیت کابین‌های چرخ و فلک را توصیف کرد.

روز بعد، او این سؤال را در کلاس درس ریاضی مطرح کرد. دبیر از هنرجویان خواست تا در این مورد فکر کنند و نظر خود را بیان کنند.

آرمان گفت: به نظر من دانستن ارتفاع کابین از سطح زمین مهم است. ما می‌توانیم در هر لحظه با مشخص کردن ارتفاع کابین، موقعیت آن را مشخص کنیم.

سعید گفت: ولی من فکر نمی‌کنم فقط با داشتن ارتفاع کابین بتوان موقعیت آن را مشخص کرد، ممکن است کابین در سمت چپ یا راست چرخ و فلک باشد؛ یعنی، برخی کابین‌ها با اینکه ارتفاع یکسان دارند، جایشان متفاوت است. شاید بهتر باشد مسافت طی شدهٔ کابین روی مسیر دایره‌ای را اندازه‌گیری کنیم. اگر مسافت طی شده از نقطهٔ شروع معلوم باشد، موقعیت کابین هم مشخص می‌شود.

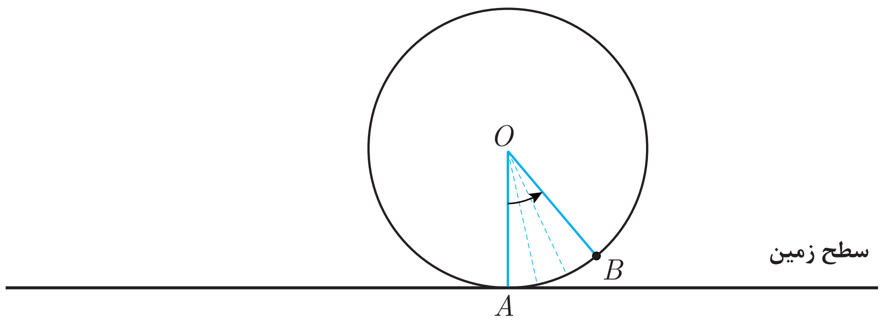
دبیر گفت: بله، با مشخص شدن مسافت طی شده، موقعیت کابین کاملاً مشخص می‌شود؛ مثلاً اگر شعاع دایرهٔ چرخ و فلک ۱۰ متر باشد و مسافت طی شده از نقطهٔ شروع، ۱۰π متر باشد، معلوم می‌شود کابین به بالاترین نقطهٔ خود رسیده است و اگر مسافت طی شده ۲۰π متر باشد، معلوم می‌شود کابین یک دور کامل زده و به نقطهٔ شروع برگشته است. ولی یافتن مسافت طی شده دشوار است. آیا راه ساده‌تری برای

توصیف موقعیت کابین می‌توان پیدا کرد؟

حمید گفت: فکر کنم اگر زاویهٔ طی شده توسط کابین را بدانیم، می‌توانیم مسافت طی شده را بیابیم.

دبیر گفت: منظورت از زاویهٔ طی شده چیست؟

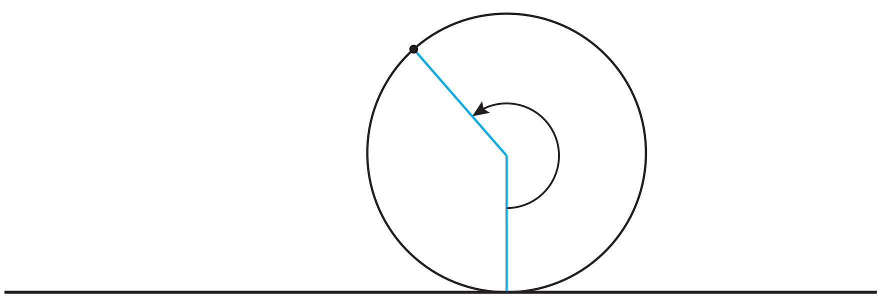
حمید گفت: اگر اجازه دهید، شکل آن را روی تخته بکشم و از روی شکل توضیح دهم.



می‌توانیم تصور کنیم چرخ و فلک همانند یک دایره و یک کابین آن مانند نقطه‌ای از این دایره (نقطهٔ B) است. اگر شعاع ثابتی را در نظر بگیریم که از مرکز دایره (نقطهٔ O) به نقطهٔ شروع حرکت (نقطهٔ A) وصل شده باشد، زاویهٔ بین دو شعاع OA و OB را می‌توانیم زاویهٔ طی شده، با حرکت از A به B در نظر بگیریم. در شروع حرکت، این دو شعاع بر هم منطبق‌اند و زاویهٔ بین آنها را می‌توان صفر در نظر گرفت و رفته رفته با حرکت کابین، اندازهٔ این زاویه بیشتر می‌شود.

دبیر گفت: خیلی خوب است. اندازه‌گیری این زاویه ساده‌تر از اندازه‌گیری مسافت طی شده است.(چرا؟) آیا می‌توان مستقیماً از همین زاویه برای مشخص کردن موقعیت کابین استفاده کرد؟

سعید گفت: بله، دانستن اندازهٔ زاویهٔ طی شده برای مشخص کردن موقعیت کابین کافی است، فقط یک مشکل وجود دارد. بعد از آنکه کابین بیش از یک نیم دور بزند (بیش از ۱۸۰ درجه)، زاویهٔ‌بین این دو شعاع چه معنایی دارد؟ (مانند شکل زیر)



دبیر گفت: زاویه‌هایی که با چرخش ایجاد می‌شوند، می‌توانند از ۱۸۰ درجه هم بیشتر شوند و هر مقداری باشند. این زاویه‌ها را **زاویهٔ چرخش** می‌نامند؛ مثلاً با چرخش به اندازهٔ یک دور کامل، زاویهٔ چرخش، ۳۶۰ درجه خواهد بود.

مجید گفت: وقتی چرخ و فلک یک دور زده است، باید بگوییم ۳۶۰ درجه چرخیده‌ایم. اما، اگر چرخ و فلک دورهای بیشتری بزند، زاویهٔ چرخش چقدر خواهد بود؟

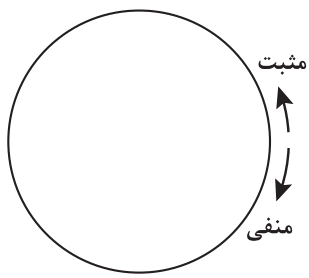
حمید گفت: فکر کنم به ازای هر دور باید ۳۶۰ درجه چرخش حساب کنیم؛ یعنی ۲ دور چرخش برابر ۷۲۰ درجه چرخش و اگر ۱۰ دور زده باشیم باید بگوییم ۳۶۰۰ درجه چرخیده‌ایم.

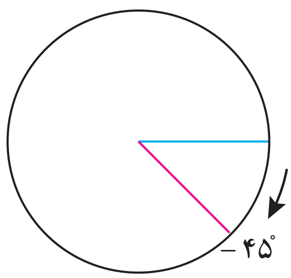
مجید گفت: وقتی سوار چرخ و فلک بودیم چند بار چرخ و فلک در جهت برعکس نیز حرکت کرد، زاویهٔ‌چرخش در جهت برعکس را چگونه حساب کنیم؟ آیا می‌توانیم اندازهٔ زاویهٔ چرخش در جهت برعکس را عددی منفی در نظر بگیریم؟

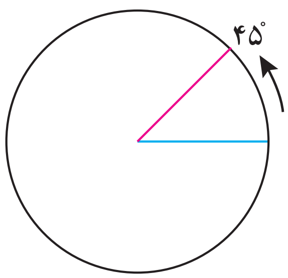
دبیر گفت: بله، منفی درنظر گرفتن اندازهٔ زاویهٔ چرخش در جهت برعکس بسیار طبیعی است و ما می‌توانیم زاویه‌های با مقدار منفی هم داشته باشیم. درست مثل محور اعداد که یک جهت را جهت مثبت و خلاف آن را جهت منفی در نظر گرفتیم، در اینجا نیز یک جهت چرخش را جهت مثبت و جهت خلاف آن را جهت منفی می‌نامند.

مجید گفت: چه جالب! اما کدام جهت را مثبت و کدام جهت را منفی در نظر بگیریم؟

دبیر گفت: انتخاب جهت چرخش مثبت یا منفی قراردادی است. طبق قرارداد، در یک صفحه، چرخش در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت را مثبت و چرخش درجهت موافق حرکت عقربه‌های ساعت را منفی در نظر می‌گیرند.



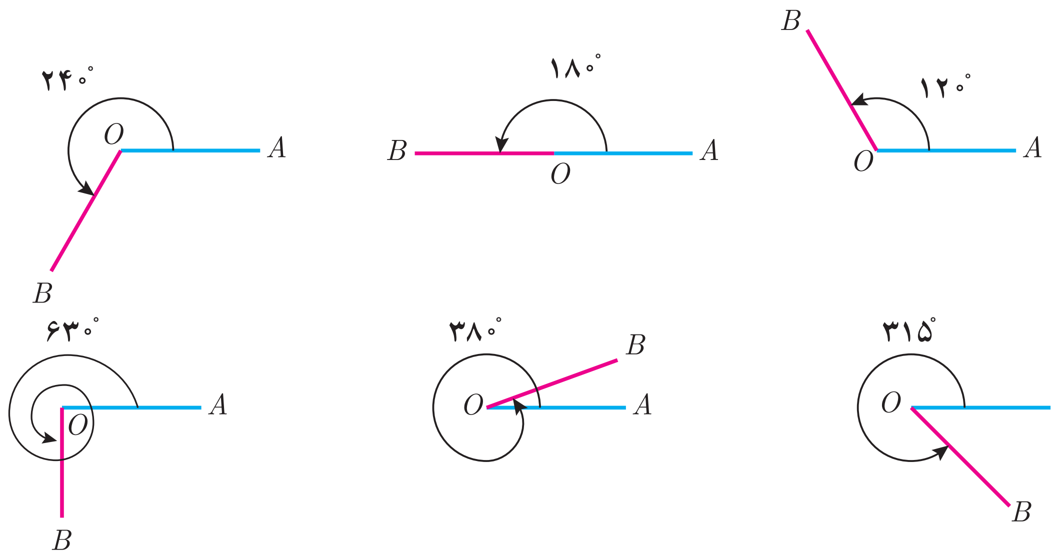




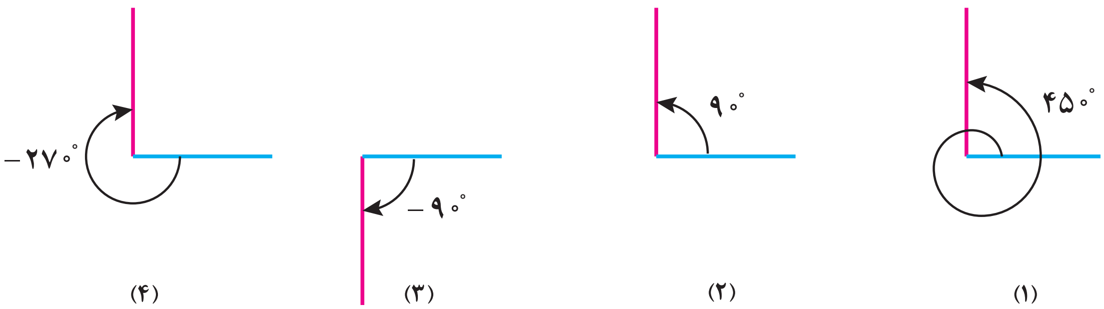
زاویه‌های با مقدار منفی را زاویهٔ منفی می‌نامند و دو زاویه را که مقدار آنها قرینهٔ یکدیگرند، دو **زاویهٔ قرینه** می‌نامند؛ مثلاً دو زاویه با مقدارهای ۴۵° و -۴۵°، قرینهٔ یکدیگرند.

زاویه را می‌توان به‌عنوان چرخش یک نیم خط نسبت به یک نیم‌خط دیگر هم در نظر گرفت. در شکل‌های صفحه بعد، نیم‌خط OA ثابت است و نیم‌خط OB حول نقطهٔ O در حال چرخش در جهت مثبت است. در این شکل‌ها، مقدار زاویهٔ چند چرخش خاص بر حسب درجه نشان داده شده است.

توجه داشته باشید که **زاویهٔ چرخش یک مفهوم فقط هندسی نیست و در آن از مفهوم حرکت و جهت حرکت نیز استفاده می‌شود.**

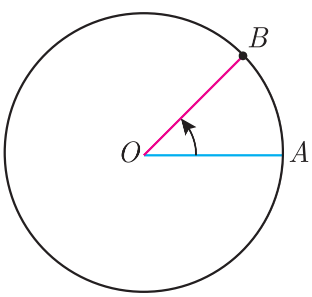


اگر جهت چرخش، منفی (موافق حرکت عقربه‌های ساعت) باشد، مقدار زاویه‌های چرخش را به‌صورت منفی درنظر می‌گیریم؛ برای مثال در شکل‌های زیر، مقدار زاویه‌های چرخش (۳) و (۴) که در جهت منفی هستند، عددی منفی است.



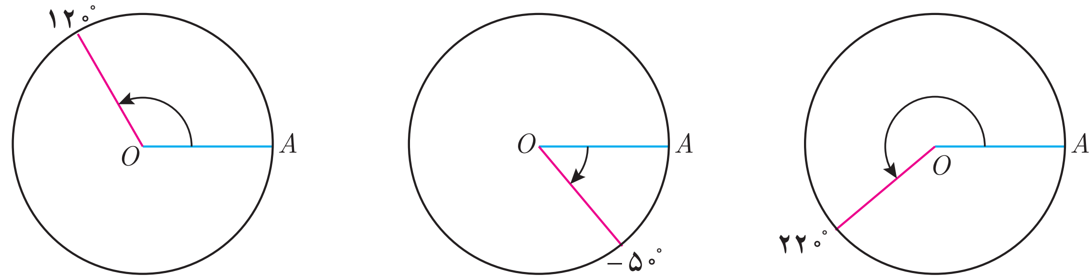
توجه داشته باشید که برای مشخص شدن زاویهٔ چرخش بین دو نیم‌خط، دانستن وضعیت قرار گرفتن آن دو نیم‌خط کافی نیست و باید معلوم باشد کدام نیم‌خط در کدام جهت و چند دور چرخش کرده است؛ برای مثال در حالت‌های (۱) و (۲) و (۴) وضعیت قرارگرفتن نیم‌خط‌ها مانند یکدیگر است، ولی هرکدام زاویه‌های چرخش متفاوتی دارند.

مفهوم زاویهٔ چرخش را در یک دایره نیز می‌توان توصیف کرد. اگر یک دایره و روی آن نقطه‌ای به‌عنوان مبدأ حرکت مانند A در نظر بگیریم، با حرکت یک نقطه مانند B از این مبدأ (مانند شکل روبه‌رو)، شعاع OB حول نقطهٔ O چرخش می‌کند و زاویه‌ای با شعاع OA می‌سازد. مقدار این زاویه **را زاویهٔ چرخش نقطهٔ B از مبدأ A** می‌نامند. پس هرگونه حرکت نقطهٔ B روی دایره، یک زاویهٔ چرخش را معین می‌کند و هر زاویهٔ چرخشی، نقطه‌ای متناظر روی دایره خواهد داشت.



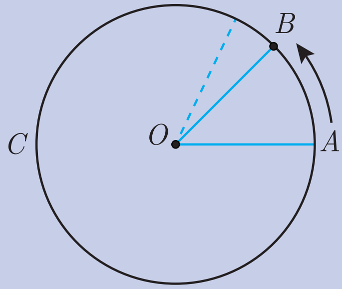
مثال ۱

نقاط متناظر زاویه‌های ۱۲۰ درجه و ۵۰ـ درجه و ۲۲۰ درجه در شکل‌های زیر مشخص شده‌اند.



کار در کلاس ۱

دوچرخه‌سواری در یک مسیر دایره‌ای شکل، از نقطهٔ A طبق شکل روبه‌رو، با سرعت ثابت شروع به حرکت می‌کند و چندین بار این دایره را دور می‌زند. او یک دور این دایره را در ۳ دقیقه طی می‌کند.



۱ دوچرخه‌سوار، $\frac{1}{4}$ این دایره را در چند دقیقه طی می‌کند؟ مکان او را روی دایرهٔ بالا با یک نقطه مشخص کنید.

۲ اگر دوچرخه‌سوار پس از ۲۰ ثانیه ($\frac{1}{3}$دقیقه) به نقطهٔ B رسیده باشد، زاویهٔ بین دو شعاع OA و OB چند درجه است؟

....

۳ این دوچرخه‌سوار پس از ۳ دقیقه و ۲۰ ثانیه در چه نقطه‌ای از دایره قرار می‌گیرد؟

....

۴ اگر یک دوربین فیلم‌برداری از مرکز دایره به دوچرخه‌سوار نگاه کند، در هر دقیقه چند درجه چرخش می‌کند؟

....

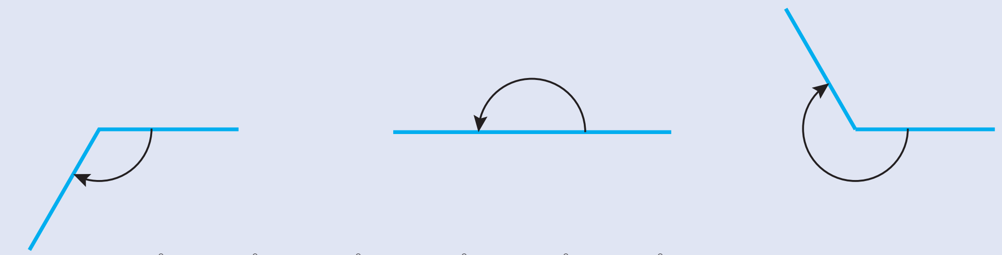
۵ جدول زیر را تکمیل کنید. در هر زمان، مکان دوچرخه را روی شکل نشان دهید و وضعیت او را توصیف کنید.

....

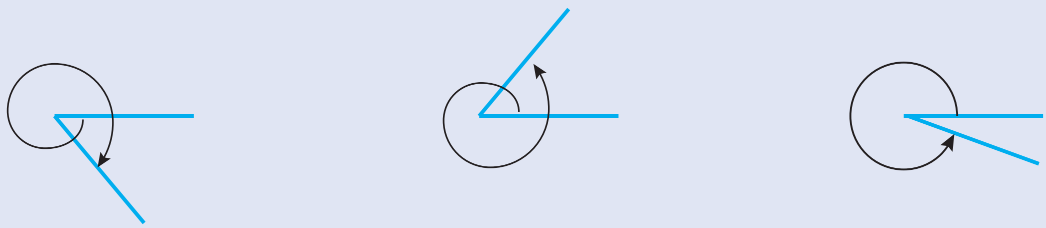
زمان حرکت دوچرخه بر حسب دقیقه	۲	۴	۵	۶/۵	۷	۱۳
زاویهٔ چرخش دوربین						

مسائل

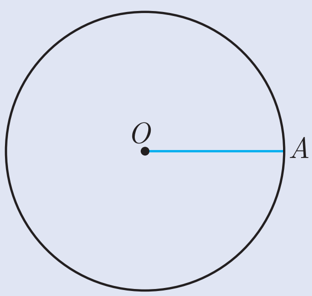
۱ در شکل‌های زیر چند زاویهٔ چرخش رسم شده‌اند. زاویه‌های چرخش داده شده را به شکل‌های صحیح آن وصل کنید.



۳۹۰°   -۱۲۰°   -۲۴۰°   -۴۱۰°   ۱۸۰°   ۳۴۰°



۲ در دایرهٔ مقابل، نقطهٔ A مبدأ در نظر گرفته شده است. نقاط متناظر زاویه‌های ۵۰ و ۱۴۵ و ۳۰۰ و ۴۶۰ و -۶۰ و -۱۸۰ درجه را روی این دایره نشان دهید.



۳ وضعیت دو نیم‌خط که زاویهٔ چرخش آنها صفر درجه است چگونه است؟

۴ اگر دونده‌ای ۵ بار روی یک مسیر دایره‌ای‌شکل در جهت مثبت بدود، زاویهٔ چرخش او نسبت به نقطهٔ شروع چند درجه است؟

۵ یک دایره و یک مبدأ روی آن انتخاب کنید. نقاط متناظر دو زاویهٔ چرخش ۱۲۰ و -۱۲۰ درجه را روی آن بیابید. از لحاظ هندسی، این نقاط چه وضعیتی نسبت به هم دارند. دو زاویهٔ قرینه دیگر مثال بزنید و وضعیت نقاط متناظر آنها نسبت به هم را توصیف کنید. آیا این وضعیت برای هر دو زاویه که قرینهٔ هم باشند برقرار است؟

واحد اندازه‌گیری زاویه: رادیان

گفتگو

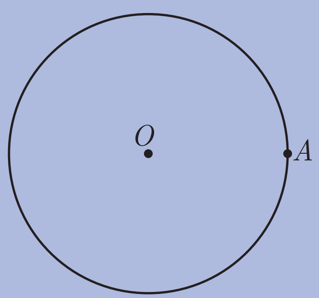
در مسئلهٔ تعیین موقعیت کابین‌های یک چرخ و فلک، سعید پیشنهاد کرده بود که مسافت طی شده توسط کابین برای شناختن موقعیت کابین به کار برده شود. او یاد گرفت که میزان زاویهٔ چرخش کابین برای دانستن موقعیت کابین کافی است، ولی نکتهٔ مهمی نظر او را جلب کرد.

سعید گفت: به نظر می‌رسد مسافت طی شده توسط کابین و زاویهٔ چرخش آن، با هم رابطه دارند و با داشتن هر کدام می‌توان دیگری را حساب کرد. رابطهٔ بین این دو کمیت را چگونه به دست آوریم؟

دبیر گفت: بله این دو کمیت، متناسب مستقیم هستند و فعالیت زیر می‌تواند رابطهٔ بین این دو کمیت را مشخص کند.

فعالیت ۱

دایره‌ای را به شعاع r در نظر بگیرید و روی آن نقطهٔ A را به عنوان مبدأ در نظر بگیرید.



۱ اگر از مبدأ، در جهت مثبت، شروع به حرکت کنیم، پس از طی یک دور کامل، زاویهٔ چرخش چند درجه است؟ مسافت طی شده چقدر است؟

۲ به ازای هر یک درجه زاویه چرخش، مسافت طی شده چقدر است؟

۳ اگر D ، زاویهٔ چرخش برحسب درجه و L ، مسافت طی شده باشد، نسبت $\frac{L}{D}$ چقدر است؟

۴ رابطه‌ای بنویسید که D را بر حسب L بیان کند و رابطه‌ای بنویسید که L را برحسب D بیان کند.

فعالیت (۱) نشان می‌دهد که زاویهٔ چرخش یک نقطه از یک دایره و کمان طی شده[1] توسط آن نقطه، دو کمیت متناسب مستقیم هستند. بنابر این، نسبت $\frac{L}{D}$ ، که D زاویهٔ چرخش نقطه و L طول کمان طی شده آن نقطه است، مقداری ثابت است. در یک دایره به شعاع r ، چرخش به اندازهٔ ۳۶۰ درجه،

۱ـ مسیر حرکت روی یک دایره، کمانی از آن دایره است و مسیر طی شده را کمان طی شده می‌نامند.

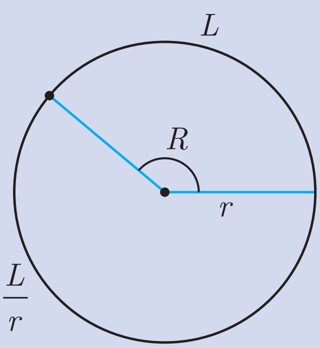
معادل کل محیط دایره، یعنی $۲\pi r$ است، پس $\frac{L}{D}=\frac{۲\pi r}{۳۶۰}$. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{L}{r}=\frac{\pi}{۱۸۰}D \quad \text{و} \quad D=\frac{۱۸۰}{\pi}\times\frac{L}{r}$$

این تساوی‌ها نشان می‌دهند که $\frac{L}{r}$ (نسبت طول کمان طی‌شده به شعاع دایره) مضربی از اندازهٔ زاویه است.
با مشخص بودن $\frac{L}{r}$، زاویهٔ چرخش کاملاً معین است. بنابراین، می‌توان $\frac{L}{r}$ را به‌عنوان واحد دیگری برای اندازه‌گیری زاویه در نظر گرفت. این واحد اندازه‌گیری را **رادیان** می‌نامند.

تعریف

اگر نقطه‌ای از یک دایره به شعاع r، کمانی به طول L را در جهت مثبت طی کند، مقدار $\frac{L}{r}$ را اندازهٔ زاویه چرخش آن نقطه، بر حسب رادیان می‌نامند.
برای زاویه‌های منفی، $-\frac{L}{r}$ را مقدار آن زاویه بر حسب رادیان می‌نامند.



$R=\frac{L}{r}$ (رادیان)

دایره‌ای که شعاع آن ۱ واحد است، **دایرهٔ واحد** نامیده می‌شود. در دایرهٔ واحد، طول کمان طی شده، همان اندازهٔ زاویهٔ چرخش بر حسب واحد رادیان است. در تساوی‌های زیر:

$$\frac{L}{r}=\frac{\pi}{۱۸۰}D \quad \text{و} \quad D=\frac{۱۸۰}{\pi}\times\frac{L}{r}$$

$\frac{L}{r}$ همان اندازهٔ زاویه بر حسب رادیان است. اگر اندازهٔ یک زاویه برحسب رادیان را با R و اندازهٔ آن زاویه بر حسب درجه را با D نشان دهیم، این تساوی‌ها به‌صورت زیر در می‌آیند.

$$D=\frac{۱۸۰}{\pi}R \quad \text{و} \quad R=\frac{\pi}{۱۸۰}D$$

این تساوی‌ها نشان می‌دهند، ضریب تبدیل رادیان به درجه $\frac{۱۸۰}{\pi}$ و ضریب تبدیل درجه به رادیان $\frac{\pi}{۱۸۰}$ است.

مثال ۲

۱۸۰ درجه معادل چند رادیان است؟

راه حل اول: چرخش به اندازهٔ ۱۸۰ درجه، معادل پیمودن نصف محیط دایره با شعاع واحد (دایرهٔ واحد) است که برابر π واحد است. پس ۱۸۰ درجه، معادل π رادیان یعنی تقریباً ۳/۱۴ رادیان است.

راه حل دوم: با استفاده از رابطهٔ بین واحد رادیان و درجه داریم:

$$R=\frac{\pi}{۱۸۰}\times D=\frac{\pi}{۱۸۰}\times ۱۸۰=\pi\approx ۳/۱۴$$

مثال ۳

۱ رادیان، چند درجه است؟

با استفاده از رابطهٔ بین واحدهای درجه و رادیان داریم:

$$D=\frac{۱۸۰}{\pi}\times R=\frac{۱۸۰}{\pi}\times ۱\approx\frac{۱۸۰}{۳/۱۴}\approx ۵۷/۳$$

یعنی، ۱ رادیان تقریباً معادل ۵۷ درجه است.

مثال ۴

۱ درجه معادل چند رادیان است؟

با استفاده از رابطهٔ بین واحدهای درجه و رادیان داریم:

$$R=\frac{\pi}{۱۸۰}\times ۱\approx\frac{۳/۱۴}{۱۸۰}\approx ۰/۰۱۷$$

پس، هر درجه، تقریباً معادل ۰/۰۱۷ رادیان است.

حالا که دو واحد متفاوت برای اندازه‌گیری زاویه‌ها در اختیار داریم باید در بیان اندازهٔ زاویه‌ها، واحدِ به‌کار رفته ذکر شود؛ مثلاً زاویه ۴۰ درجه و زاویهٔ ۴۰ رادیان، دو زاویهٔ متفاوت هستند. ۴۰ رادیان برابر $۴۰\times\frac{۱۸۰}{\pi}$ درجه، یعنی تقریباً ۲۲۹۲ درجه است. همچنین π رادیان با π درجه متفاوت است؛ زیرا π رادیان معادل ۱۸۰ درجه است و π درجه تقریباً ۳/۱۴ درجه است.

معمولاً در زاویه‌هایی که برحسب رادیان بیان می‌شوند، نماد π به‌کار می‌رود؛ مثلاً زاویه ۳۰ درجه برحسب رادیان، $\frac{\pi}{۶}$ رادیان است. به‌همین دلیل در بیان اندازهٔ یک زاویه، اگر نماد π در آن باشد، منظور آن است که واحد زاویه، رادیان است؛ مگر آنکه صریحاً گفته شود که واحد زاویه درجه است.

مثال ۵

زاویهٔ $\frac{\pi}{۲}$ یعنی $\frac{\pi}{۲}$ رادیان که معادل ۹۰ درجه است. زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۶}$ یعنی $\frac{۵\pi}{۶}$ رادیان که معادل ۱۵۰ درجه است. زیرا:

$$\frac{۵\pi}{۶}\times\frac{۱۸۰}{\pi}=۱۵۰ \qquad \text{و} \qquad \frac{\pi}{۲}\times\frac{۱۸۰}{\pi}=۹۰$$

کار در کلاس ۲

۱ زاویه‌های ۳۰ و ۴۵ و ۶۰ و ۹۰ درجه را بر حسب رادیان بنویسید.

....

....

۲ در جدول زیر تعدادی زاویه بر حسب درجه و رادیان داده شده است. معادل آنها را بر حسب واحد دیگر بیابید و جدول را کامل کنید.

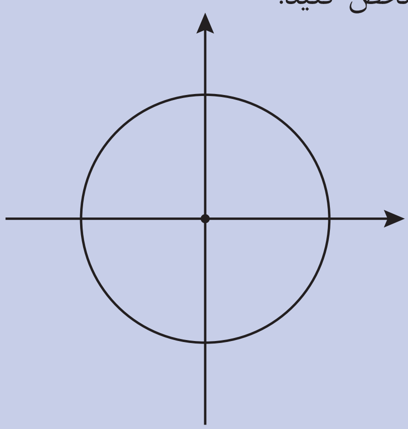
درجه	۵۵		-۲۷۰	۳۶۰۰	
رادیان		$\frac{۱۱\pi}{۳}$			$\frac{-۱۵\pi}{۴}$

....

....

....

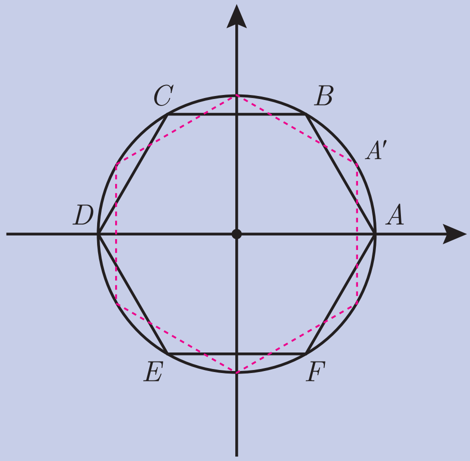
۳ نقاط متناظر زاویه‌های $\frac{۷\pi}{۳}$, ۰ , $\frac{-\pi}{۳}$, ۲π , $\frac{\pi}{۲}$, $\frac{۳\pi}{۲}$, $-\pi$, π , $\frac{-۵\pi}{۶}$, $\frac{\pi}{۶}$ را روی دایره زیر (بدون تبدیل به درجه) مشخص کنید.



۴ در شکل زیر یک شش ضلعی منتظم را داخل دایره رسم کرده‌ایم به گونه‌ای که یکی از رأس‌های آن روی نقطهٔ متناظر زاویهٔ صفر است (نقطهٔ A).

الف) بقیه رئوس این چندضلعی، متناظر چه زاویه‌هایی (بر حسب درجه) هستند؟

....



ب) اگر شش ضلعی بالا به اندازهٔ ۳۰ درجه در جهت مثبت دوران کند به طوری که رأس A به A' انتقال یابد، رئوس این چندضلعی جدید متناظر چه زاویه‌هایی هستند؟

....

....

خواندنی

واحد درجه برای اندازه‌گیری زاویه‌ها، یک واحد قراردادی است. اگر زاویهٔ راست را به ۹۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت را ۱ درجه می‌نامند. شاید این سؤال پیش بیاید که چرا به ۱۰۰ قسمت مساوی تقسیم نکنیم؟ البته این کار را می‌کنند و با تقسیم زاویهٔ راست به ۱۰۰ قسمت مساوی، هر قسمت را ۱ گراد می‌نامند که واحد دیگری برای اندازه‌گیری زاویه است؛ اما طول کمان طی شده در دایرهٔ واحد، مقداری طبیعی وابسته به زاویه است و به همین دلیل واحد مناسب‌تری است و در جایی که به رابطهٔ بین طول کمان دایره و زاویهٔ کمان نیاز داریم با این واحد جدید رابطهٔ بهتری به‌دست می‌آید.

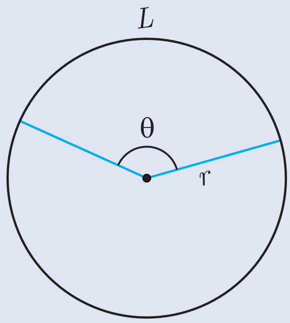
مسائل

۱ زاویه‌های ۱۵، ۱۹۰، ۵۳۰ ، و ۱۰۰۰- درجه را بر حسب رادیان بنویسید.

۲ زاویه‌های $\frac{\pi}{۷}$، $\frac{۴\pi}{۳}$ ، $\frac{-۸\pi}{۳}$ ، $\frac{-۱۴\pi}{۵}$ را بر حسب درجه بنویسید.

۳ اگر یک نیم‌خط بعد از چرخش روی حالت اول خود منطبق شود، توضیح دهید زاویهٔ چرخش آن بر حسب رادیان چه مقادیری می‌تواند باشد؟

۴ در یک دایره به شعاع r، اگر زاویهٔ یک کمان بر حسب رادیان، θ باشد، طول این کمان برحسب r و θ چقدر است؟



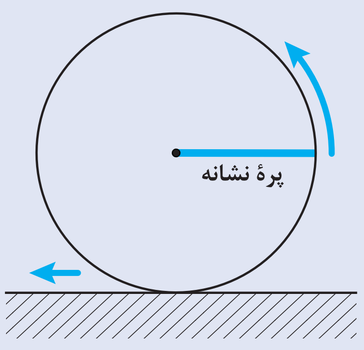
۵ در یک چرخ و فلک به شعاع ۱۰ متر، اگر یک کابین نسبت به حالت اولیهٔ خود، به اندازهٔ ۱ رادیان چرخیده باشد، چه مسافتی را طی کرده است؟ اگر مسافت طی شده توسط کابین ۷۰ متر باشد، زاویهٔ چرخش کابین برحسب رادیان و درجه چقدر است؟

۶ طول پره‌های یک چرخ، ۰/۵ متر است. این چرخ را روی زمین بدون لغزش می‌چرخانیم. با مثبت درنظرگرفتن جهت چرخش،

الف) پس از طی ۱۰۰ متر مسافت، زاویهٔ چرخش پرهٔ نشانه نسبت به حالت اولیه‌اش (برحسب درجه و رادیان) چقدر است؟

ب) اگر یکی از پره‌ها ۳۰۰۰ درجه چرخش کرده باشد، چرخ چند متر طی کرده است؟

پ) تحقیق کنید که کیلومترشمار ماشین، مسافت طی شده را چگونه نشان می‌دهد؟

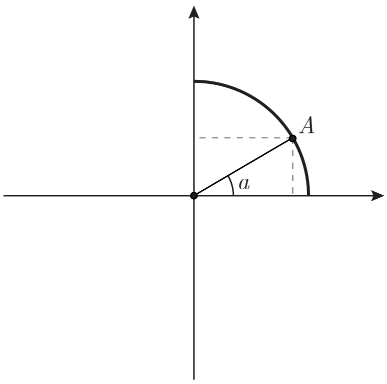


نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های دلخواه

گفتگو

با یادگیری مفهوم زاویهٔ چرخش، برای مونا سؤالی پیش آمد.

مونا گفت: سال گذشته، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های تند به کمک مثلث‌های قائم‌الزاویه تعریف شدند. آیا نسبت‌های مثلثاتی سینوس، کسینوس و تانژانت زاویه‌های دلخواه هم قابل تعریف هستند؟ برای زاویهٔ باز که نمی‌توان مثلث قائم‌الزاویه رسم کرد، در این حالت، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های باز چگونه قابل تعریف است و چه معنایی خواهند داشت؟

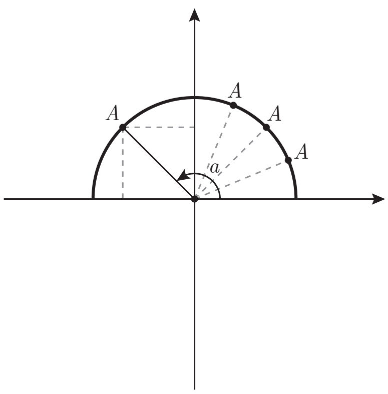


دبیر گفت: سال گذشته، تعبیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های تند را در یک ربع دایره بررسی کردیم. شاید از طریق تعبیر نسبت‌های مثلثاتی در یک ربع دایره، بتوانید برای این پرسش جوابی بیابید. بهتر است مجدداً مفهوم نسبت‌های مثلثاتی زاویه تند را در یک ربع دایره بررسی کنید. در صفحهٔ مختصات، یک ربع دایرهٔ واحد مانند شکل روبه‌رو رسم کنید و روی آن نقطهٔ A و زاویهٔ تند α را در نظر بگیرید.

آیا می‌توانید بین نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ تند α و مختصات نقطهٔ متناظر آن (A)، رابطه‌ای بیابید؟

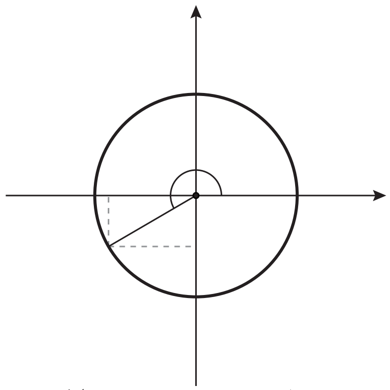
مونا گفت: با توجه به مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که در شکل دیده می‌شوند، طول نقطهٔ A همان $\cos\alpha$ و عرض نقطهٔ A همان $\sin\alpha$ است.

دبیر گفت: حال فرض کنید به جای ربع دایرهٔ واحد، یک نیم‌دایرهٔ واحد داشته باشیم. اگر نقطهٔ A حرکت کند و از ربع اول دایره به ربع دوم برود، چه اتفاقی برای نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α و مختصات نقطهٔ A می‌افتد؟



سارا گفت: تا زمانی که در ربع اول دایره هستیم، کسینوس و سینوس زاویهٔ α به ترتیب، همان طول و عرض نقطهٔ A هستند. اما، وقتی وارد ربع دوم می‌شویم، برای نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های باز، هنوز

تعریفی نداریم، ولی مختصات نقاط متناظر این زاویه‌ها را می‌توانیم حساب کنیم. آیا می‌شود همانند زاویه‌های تند در ربع اول، مختصات نقاط متناظر زاویه‌های باز را به عنوان کسینوس و سینوس این زاویه‌ها تعریف کنیم؟



مونا گفت: ولی طول نقاط متناظر زاویه‌های باز، منفی است. آیا کسینوس یک زاویه می‌تواند منفی باشد؟

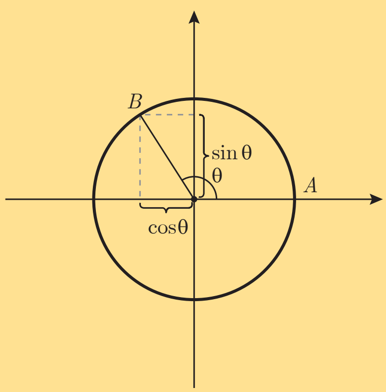
دبیر گفت: بله، حدس سارا درست است و ریاضی‌دان‌ها، سینوس و کسینوس زاویه‌های باز را به همین شکل تعریف می‌کنند و منفی شدن سینوس یا کسینوس زاویه‌ها مشکلی ندارد.

مونا گفت: آیا برای بقیهٔ زاویه‌های چرخش هم می‌توان همین تعریف را به‌کار برد؟

معلم گفت: بله، برای هر زاویهٔ چرخش در دایره واحد، طول نقطهٔ متناظر آن را کسینوس آن زاویه و عرض آن را سینوس آن زاویه، تعریف می‌کنند.

تعریف

در صفحهٔ مختصات، دایرهٔ واحد به مرکز مبدأ مختصات را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ A به مختصات $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ را به‌عنوان مبدأ برای اندازه‌گیری زاویه در نظر می‌گیریم. اگر B نقطهٔ متناظر زاویه چرخش θ باشد، طول B را $\cos\theta$ و عرض B را $\sin\theta$ می‌نامند.



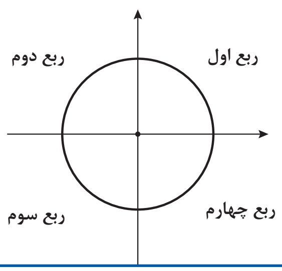
از آنجا که کسینوس یک زاویه، طول نقطهٔ متناظر آن زاویه و سینوس یک زاویه، عرض نقطه متناظر آن زاویه است، محور افقی را **محور کسینوس‌ها** و محور عمودی را **محور سینوس‌ها** می‌نامند. در این حالت در شکل بالا، دایرهٔ واحد به مرکز مبدأ مختصات را **دایرهٔ مثلثاتی** می‌نامند و نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ مبدأ اندازه‌گیری زاویه‌ها است.

مثال ۶

برای زاویه‌های خاص ۰، ۹۰، ۱۸۰ و ۲۷۰ درجه که به ترتیب نقاط متناظر آنها دارای مختصات $\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}-۱\\۰\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۰\\-۱\end{bmatrix}$ هستند، نتیجه می‌شود:

θ / نسبت مثلثاتی	۰°	۹۰° یا $\frac{\pi}{۲}$ رادیان	۱۸۰° یا π رادیان	۲۷۰° یا $\frac{۳\pi}{۲}$ رادیان
$\sin\theta$	۰	۱	۰	-۱
$\cos\theta$	۱	۰	-۱	۰

معمولاً دایره مثلثاتی را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند و طبق شکل مقابل این چهار قسمت را ربع‌های اول، دوم، سوم و چهارم دایره مثلثاتی می‌نامند.



مثال ۷

نقطهٔ متناظر با زاویهٔ ۲/۲۳ رادیان در کدام ربع قرار دارد؟

با توجه به آنکه $۱/۵۷ = \frac{۳/۱۴}{۲} \approx \frac{\pi}{۲}$ و $\pi \approx ۳/۱۴$، داریم: $\frac{\pi}{۲} < ۲/۲۳ < \pi$ و نقطهٔ متناظر این زاویه در ربع دوم است.

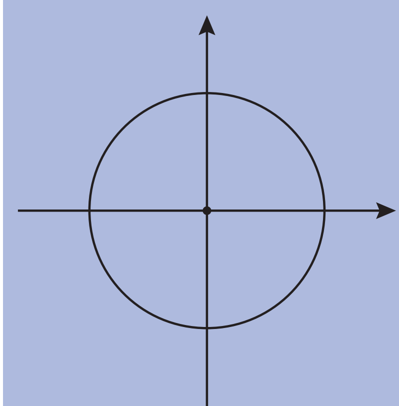
گفتگو

مونا پرسید: سال گذشته، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های تند را با رسم مثلث‌های قائم‌الزاویه به‌دست می‌آوردیم. اما، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های باز را چگونه حساب کنیم؟

دبیر گفت: با انجام فعالیت زیر می‌توانید سینوس و کسینوس زاویه‌های باز را حساب کنید.

فعالیت ۲

۱ فرض کنید θ یک زاویهٔ تند بر حسب رادیان باشد، $\pi-\theta$ چه نوع زاویه‌ای است؟



۲ با رسم شکل، وضعیت نقاط متناظر دو زاویه θ و $\pi-\theta$ روی دایرهٔ مثلثاتی را نسبت به هم و محور سینوس‌ها مشخص کنید.

۳ سینوس این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۴ کسینوس این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

برای هر زاویهٔ تند θ (برحسب رادیان)، زاویهٔ $\pi - \theta$ باز است و نقاط متناظر آنها روی دایرهٔ مثلثاتی نسبت به محور سینوس‌ها قرینه یکدیگرند. بنابر این:

نکته

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \ , \ \sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$

البته این تساوی‌ها برای هر زاویهٔ دلخواه θ نیز برقرارند. به کمک این تساوی‌ها، می‌توانید سینوس و کسینوس زاویه‌های باز را حساب کنید.

توجه داشته باشید که در محاسبات با زاویه‌ها، همواره از یک واحد استفاده کنید؛ یا همهٔ زاویه‌ها باید برحسب درجه باشند، یا همهٔ زاویه‌ها باید بر حسب رادیان باشند.

مثال ۸

سینوس و کسینوس زاویهٔ ۱۵۰ درجه را حساب کنید.

این زاویه باز به صورت $۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ = ۱۵۰^\circ$ است، پس

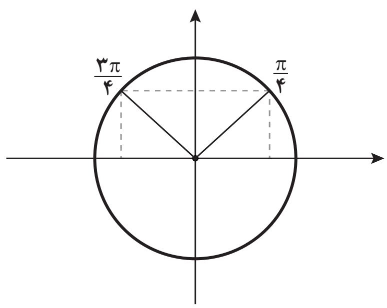
$$\sin ۱۵۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ) = \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۱۵۰^\circ = \cos(۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ) = -\cos ۳۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

مثال ۹

سینوس و کسینوس زاویه $\frac{۳\pi}{۴}$ را حساب کنید.

این زاویه، یک زاویهٔ باز است و نقطهٔ متناظر آن در ربع دوم قرار دارد و داریم $\frac{۳\pi}{۴} = \pi - \frac{\pi}{۴}$. پس نقطهٔ متناظر با این زاویه، قرینهٔ نقطه متناظر با زاویهٔ $\frac{\pi}{۴}$ نسبت به محور عمودی (محور سینوس‌ها) است. بنابراین:

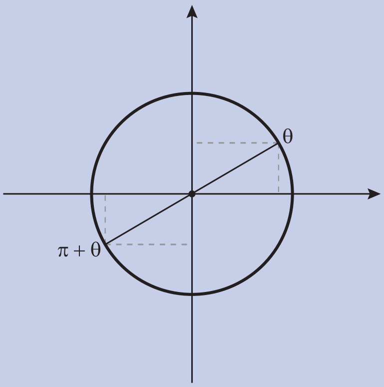


$$\sin \frac{۳\pi}{۴} = \sin(\pi - \frac{\pi}{۴}) = \sin \frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos \frac{۳\pi}{۴} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\cos \frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

برای محاسبهٔ سینوس و کسینوس زاویه‌های دیگر نیز می‌توان تساوی‌های مشابهی را به‌دست آورد.

کار در کلاس ۳



۱ اگر θ زاویه‌ای در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی باشد، نقطه متناظر زاویهٔ $\pi+\theta$ در کدام ربع قرار دارد؟

....

۲ وضعیت نقاط متناظر زاویه‌های θ و $\pi+\theta$ نسبت به هم چگونه است؟

....

۳ طول و عرض این نقاط چه رابطه‌ای با هم دارند؟

....

۴ نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

....

از پاسخ به سؤال‌های بالا نتیجه می‌شود که برای یک زاویهٔ تند مانند θ داریم:

نکته

$$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta \ , \ \cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$$

البته این تساوی‌ها برای هر زاویهٔ دلخواه θ نیز برقرارند.

مثال ۱۰

سینوس و کسینوس زاویهٔ $\frac{7\pi}{6}$ را به دست آورید.

داریم: $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$، پس نقطهٔ متناظر این زاویه در ربع سوم قرار دارد. بنابراین:

$$\sin\frac{7\pi}{6} = \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{7\pi}{6} = \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال ۱۱

سینوس و کسینوس زاویهٔ ۲۴۰ درجه را حساب کنید.

داریم: $240^\circ = 180^\circ + 60^\circ$، پس نقطهٔ متناظر این زاویه در ربع سوم است.

$$\sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

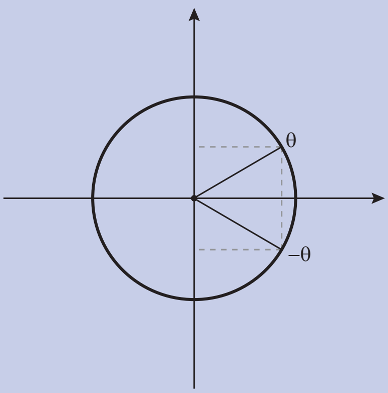
$$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

گفتگو

مونا پرسید: سینوس و کسینوس زاویه‌های منفی را چگونه حساب کنیم؟

دبیر گفت: کافی است ببینیم نقاط متناظر زاویه‌های θ و $-\theta$ در یک دایره مثلثاتی، چه وضعیتی نسبت به هم دارند.

کار درکلاس ۴



۱ اگر θ زاویه‌ای در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی باشد، نقطهٔ متناظر زاویه $-\theta$ در کدام ربع قرار دارد؟

۲ وضعیت نقاط متناظر زاویه‌های θ و $-\theta$ نسبت به هم چگونه است؟

....

۳ طول و عرض این نقاط چه رابطه‌ای با هم دارند؟

....

۴ نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

....

از پاسخ به سؤال‌های بالا نتیجه می‌شود که برای یک زاویه تند θ، $\cos\theta$ و $\cos(-\theta)$ با هم مساوی‌اند ولی سینوس آنها قرینهٔ یکدیگرند و داریم:

نکته

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \ , \ \cos(-\theta) = \cos\theta$$

البته این تساوی‌ها برای هر زاویهٔ دلخواه θ نیز برقرارند.

مثال ۱۲

سینوس و کسینوس زاویهٔ ۳۰ـ درجه را حساب کنید.

داریم:

$$\sin(-۳۰^\circ) = -\sin ۳۰^\circ = -\frac{۱}{۲} \ , \ \cos(-۳۰^\circ) = \cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

مثال ۱۳

سینوس و کسینوس زاویهٔ $\frac{-۵\pi}{۶}$ را حساب کنید. داریم:

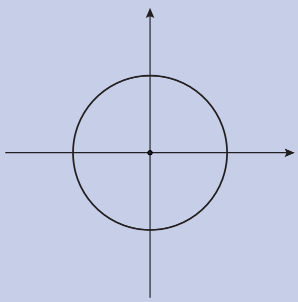
$$\sin\frac{-۵\pi}{۶} = -\sin\frac{۵\pi}{۶} = -\sin(\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\sin\frac{\pi}{۶} = -\frac{۱}{۲}$$

همچنین،

$$\cos\frac{-۵\pi}{۶} = \cos\frac{۵\pi}{۶} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\cos\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

کار درکلاس ۵

۱ در شکل مقابل، نقاط متناظر زاویه‌های داده‌شده در جدول را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص کنید، سپس جدول را کامل کنید.



θ / نسبت مثلثاتی	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۳} + ۲\pi$	$\frac{\pi}{۳} + ۴\pi$	$\frac{\pi}{۳} - ۲\pi$	$\frac{\pi}{۳} - ۴\pi$
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					

۲ اگر به یک زاویه مانند θ (بر حسب رادیان)، مضرب صحیحی از ۲π را اضافه یا کم کنیم، نقطهٔ متناظر زاویهٔ جدید و θ چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟

....

۳ با ذکر دلیل، نتیجه بگیرید اگر به زاویه‌ای (بر حسب رادیان)، مضارب صحیح ۲π را اضافه یا کم کنیم، نسبت‌های مثلثاتی آن تغییر نمی‌کنند.

....

۴ سینوس و کسینوس زاویه‌های $\frac{۱۴\pi}{۳}$ و $\frac{-۲۵\pi}{۶}$ رادیان را حساب کنید.

....

اگر به یک زاویه (بر حسب رادیان)، مضرب صحیحی از ۲π را اضافه یا کم کنیم، نقاط متناظر این دو زاویه بر هم منطبق‌اند. به همین دلیل، نسبت‌های مثلثاتی آنها با هم برابرند، زیرا نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه، مختصات نقطهٔ متناظر آن است.

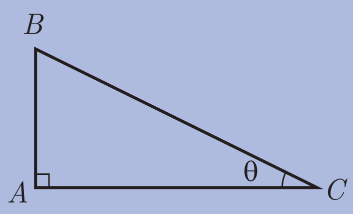
گفتگو

سارا پرسید: تا اینجا فقط نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس زاویه‌های دلخواه را تعریف کردیم و یاد گرفتیم چگونه مقدار آنها را پیدا کنیم. اما، تانژانت این زاویه‌ها چگونه تعریف می‌شود؟

دبیر گفت: فعالیت زیر به ما کمک می‌کند تانژانت زاویه‌های دلخواه را تعریف کنیم.

فعالیت ۳

مثلث قائم‌الزاویه ABC را با زاویهٔ تند θ در نظر بگیرید.



۱ طول ضلع AB را بر حسب $\sin\theta$ بنویسید.

....

۲ طول ضلع AC را بر حسب $\cos\theta$ بنویسید.

....

۳ در این مثلث، $\tan\theta$ را بر حسب $\sin\theta$ و $\cos\theta$ به دست آورید.

....

۴ به کمک رابطه‌ای که در (۳) به‌دست آوردید، برای تعریف تانژانت زاویه‌های دلخواه پیشنهادی ارائه کنید.

....

فعالیت (۳) نشان می‌دهد که برای زاویه‌های تند مانند θ داریم: $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$. این تساوی را برای زاویه‌های دلخواه تعمیم می‌دهند و تانژانت یک زاویه دلخواه α به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

از آنجا که سینوس و کسینوس زاویه‌های دلخواه قبلاً تعریف شده‌اند، تساوی بالا، تانژانت زاویه‌های دلخواه را تعریف می‌کند. فقط برای زاویه‌هایی که کسینوس آنها صفر است، تانژانت آن زاویه‌ها تعریف نمی‌شود؛ مثلاً برای زاویه‌های $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ (رادیان) که کسینوس آنها صفر است، تانژانت تعریف نمی‌شود.

تعریف

اگر α زاویه‌ای باشد که $\cos\alpha \neq ۰$ بنا به تعریف $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

مثال ۱۴

تانژانت زاویه‌های ۳۳۰ درجه و $\frac{۴\pi}{۳}$ رادیان را حساب کنید.

$$\tan ۳۳۰^\circ = \frac{\sin ۳۳۰^\circ}{\cos ۳۳۰^\circ} = \frac{\sin(۳۶۰^\circ - ۳۰^\circ)}{\cos(۳۶۰^\circ - ۳۰^\circ)} = \frac{\sin(-۳۰^\circ)}{\cos(-۳۰^\circ)} = \frac{-\sin ۳۰^\circ}{\cos ۳۰^\circ} = \frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\tan \frac{۴\pi}{۳} = \frac{\sin \frac{۴\pi}{۳}}{\cos \frac{۴\pi}{۳}} = \frac{\sin(\pi + \frac{\pi}{۳})}{\cos(\pi + \frac{\pi}{۳})} = \frac{-\sin(\frac{\pi}{۳})}{-\cos(\frac{\pi}{۳})} = \frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{-\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳}$$

گفتگو

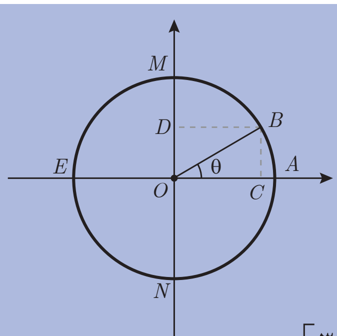
سارا پرسید: سینوس و کسینوس زاویه‌های دلخواه چه اعدادی می‌توانند باشند؟

مونا گفت: از سال گذشته یادم می‌آید که سینوس و کسینوس زاویه‌های تند، اعدادی در بازهٔ (۰ ,۱) بودند. اما سینوس و کسینوس زاویه‌های دلخواه، مختصات نقاط روی دایرهٔ واحد هستند، پس می‌توانند اعداد منفی نیز باشند.

دبیر گفت: برای پاسخ به سؤال سارا، بهتر است از طریق محور سینوس‌ها و محور کسینوس‌ها آن را بررسی کنیم.

فعالیت ۴

یک دایره مثلثاتی مانند شکل روبه‌رو را در نظر بگیرید. در این شکل B نقطهٔ متناظر زاویهٔ θ، BC عمود بر محور کسینوس‌ها و BD عمود بر محور سینوس‌ها است.



وقتی θ در بازه‌های $\left[۰, \frac{\pi}{۲}\right]$ و $\left[\frac{\pi}{۲}, \pi\right]$ و $\left[\pi, \frac{۳\pi}{۲}\right]$ و $\left[\frac{۳\pi}{۲}, ۲\pi\right]$ تغییر می‌کند، مکان نقطهٔ C روی محور کسینوس‌ها و نقطهٔ D روی محور سینوس‌ها را توصیف کنید.

مقدارهای $\cos\theta$ و $\sin\theta$ در چه بازه‌ای قرار دارند؟ جدول را مانند مثال کامل کنید.

مقدار زاویهٔ θ	در بازهٔ $\left[۰, \frac{\pi}{۲}\right]$	در بازهٔ $\left[\frac{\pi}{۲}, \pi\right]$	در بازهٔ $\left[\pi, \frac{۳\pi}{۲}\right]$	در بازهٔ $\left[\frac{۳\pi}{۲}, ۲\pi\right]$
مکان نقطهٔ C	روی پاره‌خط OA قرار دارد	روی پاره‌خط OE قرار دارد		
مقدار cos θ	در بازهٔ [۰,۱] قرار دارد	در بازهٔ [-۱,۰] قرار دارد		
مکان نقطهٔ D				
مقدار sin θ				

این فعالیت نشان می‌دهد سینوس و کسینوس زاویه‌های دلخواه، اعدادی در بازهٔ $[-1,1]$ هستند.

سال گذشته دیدیم که تانژانت زاویه‌های تند هر عدد مثبتی می‌تواند باشد. برای زاویه‌های دلخواه که در ربع دوم و چهارم قرار می‌گیرند، مقادیر تانژانت منفی است و می‌توانیم ببینیم که مقدار تانژانت این زاویه‌ها هر مقدار منفی می‌تواند باشد. بنابر این، هر عدد حقیقی (مثبت، منفی یا صفر) به‌صورت تانژانت یک زاویه خواهد بود.

در محاسبات با نسبت‌های مثلثاتی، گاهی نیازمند محاسبهٔ توان‌هایی از آنها هستیم. برای سادگی، عبارت $(\sin\theta)^2$ را به‌صورت $\sin^2\theta$ می‌نویسیم؛ به همین ترتیب برای توان‌های بالاتر نیز، عبارت‌هایی مانند $(\sin\theta)^5$ را به‌صورت $\sin^5\theta$ می‌نویسیم. برای سایر نسبت‌های مثلثاتی نیز از این قرارداد استفاده می‌کنیم؛ مثلاً منظور از عبارت $\tan^3\theta$، توان سوم $\tan\theta$ است.

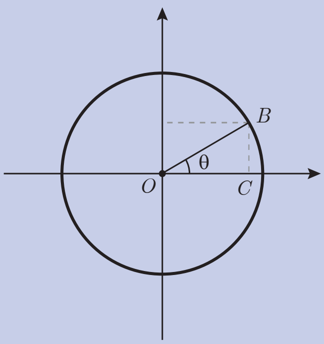
مثال ۱۵

$$\sin^2 30^\circ = (\sin 30^\circ)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{ولی} \quad \sin 30^{\circ 2} = \sin 900^\circ$$

توجه داشته باشید که عبارت $\sin\theta^2$ با عبارت $\sin^2\theta$ فرق دارد. منظور از $\sin\theta^2$ ، سینوس زاویه θ^2 است و منظور از $\sin^2\theta$ ، توان دوم $\sin\theta$ است.

کار در کلاس ۶

۱ زاویهٔ تند θ را در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی در شکل روبه‌رو در نظر بگیرید.



با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه OCB، درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

....

۲ تساوی بالا برای سایر زاویه‌ها نیز برقرار است. درستی این تساوی را برای چند زاویه در ربع‌های دیگر بررسی کنید.

....

۳ اگر θ زاویه‌ای در ربع دوم باشد به‌طوری که $\sin\theta = \frac{3}{5}$، سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را به‌دست آورید.

....

مسائل

۱ در جدول‌های زیر مشخص کنید که هر کدام از زاویه‌های داده شده در کدام ربع از دایرهٔ مثلثاتی قرار دارند.

زاویهٔ θ بر حسب درجه	-۸۰	۱۴۰	۲۸۰	۳۶۳
مکان زاویهٔ θ				

زاویهٔ θ بر حسب رادیان	$-\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۲\pi}{۵}$	$\frac{۷\pi}{۳}$	$\frac{۱۲\pi}{۵}$
مکان زاویهٔ θ				

۲ با تعیین مکان زاویهٔ $-\frac{۵\pi}{۴}$ تعیین کنید کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است.

الف) $\sin(-\frac{۵\pi}{۴}) > ۰$ و $\cos(-\frac{۵\pi}{۴}) > ۰$.

ب) $\sin(-\frac{۵\pi}{۴}) > ۰$ و $\cos(-\frac{۵\pi}{۴}) < ۰$

پ) $\sin(-\frac{۵\pi}{۴}) < ۰$ و $\cos(-\frac{۵\pi}{۴}) > ۰$

ت) $\sin(-\frac{۵\pi}{۴}) < ۰$ و $\cos(-\frac{۵\pi}{۴}) < ۰$

۳ جدول زیر را با مشخص‌کردن علامت نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ها کامل کنید. در هر مورد مثالی بزنید.

θ / علامت نسبت مثلثاتی	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
sin θ				
cos θ				
tan θ				

۴ مقادیر زیر را حساب کنید.

الف) $\sin^{۲} ۶۰^\circ$

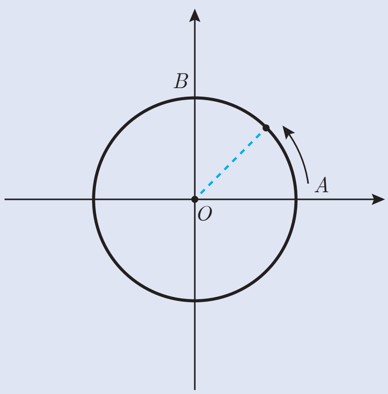
ب) $\tan^{۴} ۳۰^\circ$

پ) $(\sin ۱۵ + \cos ۱۵)^{۲}$

ت) $\cos ۱۵^{۲} + \sin ۱۵^{۲}$

۵ دوچرخه‌سواری روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع ۵۰ متر از نقطهٔ A شروع به حرکت می‌کند و در هر ثانیه ۲ متر طی می‌کند.

الف) زاویهٔ چرخش این دوچرخه سوار در هر ثانیه چند رادیان است؟



ب) اگر دوچرخه‌سوار پس از ۳۰ دقیقه حرکت بایستد، در کدام ربع از دایره ایستاده است؟

۶ زاویهٔ θ در ربع سوم است و $\cos\theta = -\frac{۱}{۵}$ ، سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را به‌دست آورید.

۷ اگر برای زاویهٔ θ داشته باشیم $\sin\theta = \frac{-۲}{۳}$، آیا می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را به‌دست آورد؟ چرا؟ چه اطلاعات دیگری را هم باید بدانیم؟

۸ نشان دهید برای زاویهٔ دلخواه θ تساوی‌های زیر برقرارند.

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta \ , \ \tan(\pi + \theta) = \tan\theta \ , \ \tan(-\theta) = -\tan\theta$$

۹ دو زاویه مشخص کنید که تانژانت آنها ۱- است.

شیب خط و تانژانت زاویه‌ها

گفتگو

سعید به تازگی از سفر به یکی از مناطق کوهستانی کشور بازگشته بود. او گفت جاده سربالایی و سرازیری‌های بسیاری داشت و در کنار جاده میزان سربالایی و سرازیری جاده با علامتی مانند روبه‌رو نشان داده شده بود.

سعید در کلاس ریاضی پرسید: عددهای روی این تابلو چه چیزی را نشان می‌دهند؟

دبیر گفت: این علامت به معنای نسبت ۱ به ۱۰ است و در اینجا یعنی به ازای هر ۱۰ واحد حرکت افقی، ارتفاع از سطح زمین ۱ واحد افزایش می‌یابد. پس می‌توانیم وضعیت سربالایی جاده را با شکل زیر مدل‌سازی می‌کنیم.

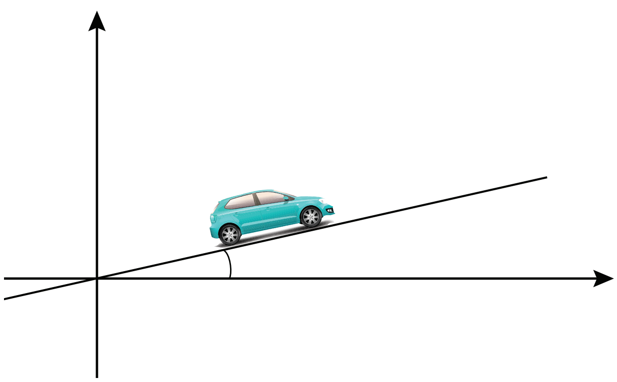
دبیر ادامه داد: در این حالت می‌گویند: شیب این جاده $\frac{۱}{۱۰}$ است.

سعید گفت: اما $\frac{۱}{۱۰}$ همان تانژانت زاویه‌ای است که جاده با خط افق می‌سازد. بنابراین شیب جاده همان تانژانت زاویه‌ای است که جاده با خط افق می‌سازد.

سعید ادامه داد: در ریاضی برای خط‌هایی که در یک صفحهٔ مختصات رسم شده‌اند نیز مفهوم شیب تعریف شده است. آیا بین شیب جاده و شیب خط، رابطه‌ای وجود دارد؟

دبیر گفت: باید این دو مفهوم را بررسی کنیم تا ببینیم آیا رابطه‌ای بین آنها وجود دارد یا نه.

سعید گفت: شیب یک خط به معادلهٔ $y = ax + b$ ، عدد a است، اما شیب جاده، تانژانت یک زاویه است. این دو مقدار چه ارتباطی با هم می‌توانند داشته باشند؟



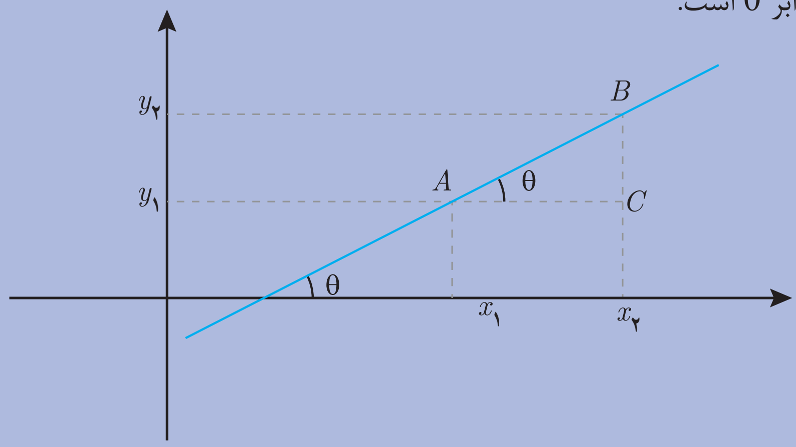
دبیر گفت: اگر مسیر یک جاده را همانند یک خط و خط افق را همانند محور افقی یک صفحهٔ مختصات درنظر بگیریم، وضعیت جاده و خط کاملاً مشابه هم خواهند بود.

سعید گفت: طبق این شکل، شیب جاده، تانژانت زاویهٔ بین خط و محور افقی است. آیا شیب خط نیز همین مقدار است؟

دبیر گفت: فعالیت صفحه بعد می‌تواند پاسخ سؤال سعید را مشخص کند.

فعالیت ۵

یک خط دلخواه به معادلهٔ $y = ax + b$ با شیب مثبت ($a > 0$) در نظر بگیرید. فرض کنید A با مختصات $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و B با مختصات $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$، دو نقطه از این خط هستند و زاویهٔ این خط با محور طول‌ها برابر θ است.



۱ شیب این خط را بر حسب مختصات نقاط A و B بنویسید.

....

۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC طول اضلاع AC و BC را بر حسب مختصات A و B به‌دست آورید.

....

۳ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، تانژانت زاویهٔ θ را بر حسب مختصات A و B به‌دست آورید.

....

۴ از (۱) و (۳) چه رابطه‌ای بین شیب این خط و زاویه آن با محور افقی به‌دست می‌آورید؟

....

این فعالیت نشان می‌دهد که برای یک خط با شیب مثبت، تانژانت زاویهٔ تند بین این خط و محور xها همان شیب خط است.

مثال ۱۶

خط به معادلهٔ $y = x + ۲$ با محور xها زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد زیرا، شیب این خط عدد ۱ است و زاویهٔ تندی که تانژانت آن ۱ است، ۴۵ درجه است.

مثال ۱۷

معادلهٔ خطی را بنویسید که با محور xها زاویهٔ ۶۰ درجه بسازد و محور yها را در نقطهٔ به عرض ۲ قطع کند.

شیب این خط برابر تانژانت ۶۰ درجه، یعنی $\sqrt{۳}$ است. می‌دانیم معادلهٔ خط با شیب m که از نقطهٔ

$\begin{bmatrix} ۰ \\ b \end{bmatrix}$ می‌گذرد به‌صورت $y = ax + b$ است. پس معادلهٔ این خط عبارت است از:

$$y = \sqrt{۳}x + ۲$$

پس از آنکه برای خط‌های با شیب مثبت، یکسان بودن شیب خط و تانژانت زاویهٔ بین خط و محور xها مشخص شد، نکتهٔ دیگری توجه سعید را جلب کرد.

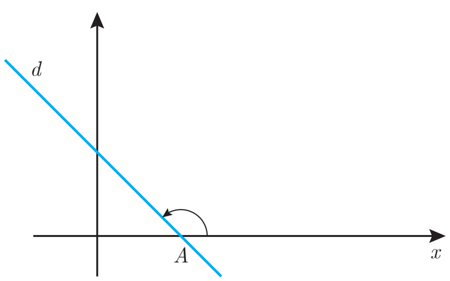
گفتگو

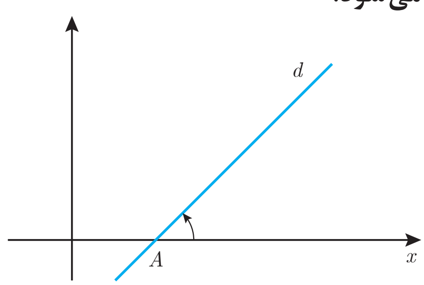
سعید گفت: برخی خط‌ها در صفحهٔ مختصات شیب منفی دارند. آیا در چنین وضعیتی هم می‌توانیم شیب این خط‌ها را برابر تانژانت یک زاویه بدانیم؟

حمید گفت: تانژانت زاویه‌های باز، منفی است. شاید بتوانیم برای یک خط با شیب منفی، یک زاویهٔ باز بیابیم که تانژانت آن برابر شیب آن خط باشد.

سعید گفت: آیا زاویهٔ بین خط‌های با شیب منفی و محور xها یک زاویه باز است؟

دبیر گفت: باید تعریف دقیق‌تری از زاویهٔ بین یک خط و محور طول‌ها داشته باشیم. در شکل زیر خط d محور طول‌ها را در نقطه‌ای مانند A قطع می‌کند. نیم‌خط Ax را در جهت مثبت، حول نقطهٔ A دوران می‌دهیم تا بر d منطبق شود. اندازهٔ چرخش Ax را زاویهٔ بین خط d و محور طول‌ها می‌نامند. در حالتی که خط d محور طول‌ها را قطع نکند، با آن موازی است و زاویهٔ بین خط d و محور طول‌ها، صفر در نظر گرفته می‌شود.



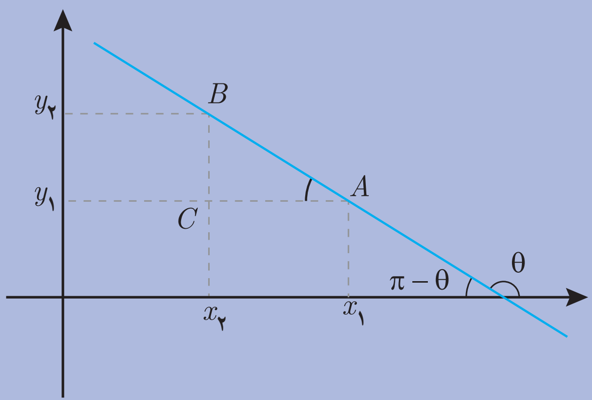


حمید گفت: با این تعریف، زاویهٔ خط‌های با شیب مثبت با محور طول‌ها، تند و زاویهٔ خط‌های با شیب منفی با محور طول‌ها، باز است. شاید تانژانت این زاویه نیز همان شیب خط باشد.

دبیر گفت: حدس خوبی زدی. با انجام فعالیت زیر می‌توانید درستی این حدس را بررسی کنید.

فعالیت ۶

یک خط دلخواه را به معادلهٔ $y = ax + b$ با شیب منفی $(a < 0)$ در نظر بگیرید. فرض کنید A با مختصات $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و B با مختصات $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$، دو نقطه از این خط هستند و زاویه این خط با محور طول‌ها برابر زاویه باز θ است.



۱ شیب این خط را بر حسب مختصات نقاط A و B بنویسید.

....

۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC طول اضلاع AC و BC را بر حسب مختصات A و B به‌دست آورید.

....

۳ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، تانژانت زاویه $\pi - \theta$ (زاویهٔ A) را بر حسب مختصات A و B به‌دست آورید.

....

۴ از (۱) و (۳) چه رابطه‌ای بین شیب این خط و $\tan(\pi - \theta)$ به‌دست می‌آورید؟

....

۵ با استفاده از (۴) چه رابطه‌ای بین شیب خط و تانژانت زاویهٔ بین خط و محور طول‌ها به‌دست می‌آورید؟

....

از فعالیت‌های (۵) و (۶) نتیجه می‌شود که شیب هر خطی (مثبت یا منفی)، برابر تانژانت زاویه آن خط با محور طول‌ها است.

نکته

برای هر خط d با شیب m که با محور طول‌ها زاویهٔ θ می‌سازد داریم: $\tan\theta = m$

مثال ۱۸

معادلهٔ خطی را که از مبدأ می‌گذرد و با محور طول‌ها زاویهٔ باز $\frac{5\pi}{6}$ می‌سازد، بنویسید.

ابتدا تانژانت این زاویه را که شیب این خط است محاسبه می‌کنیم. با استفاده از رابطهٔ $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$ داریم:

$$\tan\frac{5\pi}{6} = \tan(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

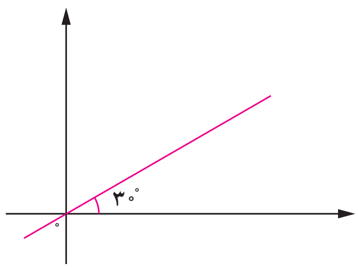
پس معادلهٔ این خط عبارت است از: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

مثال ۱۹

نمودار خط به معادلهٔ $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$ را بدون نقطه‌یابی رسم کنید.

می‌دانیم $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ پس ابتدا خطی رسم می‌کنیم که با محور xها زاویهٔ 30° بسازد.

با توجه به اینکه عرض از مبدأ این خط، ۲ است از نقطهٔ $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ خطی به موازات این خط رسم می‌کنیم.



مثال ۲۰

زاویهٔ خط به معادلهٔ $y = 2$ با محور طول‌ها چقدر است؟

این خط موازی محور طول‌ها است و زاویهٔ آن با محور طول‌ها صفر است. همچنین شیب آن صفر است و تانژانت زاویهٔ بین این خط و محور طول‌ها نیز صفر است.

کار در کلاس ۷

۱ زاویهٔ بین خط به معادلهٔ $y = \sqrt{3}x + \sqrt{2}$ و محور طول‌ها، چند رادیان است؟

....

۲ معادلهٔ خطی را بنویسید که با محور طول‌ها زاویهٔ ۱۵۰ درجه بسازد و از نقطهٔ $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ بگذرد.

....

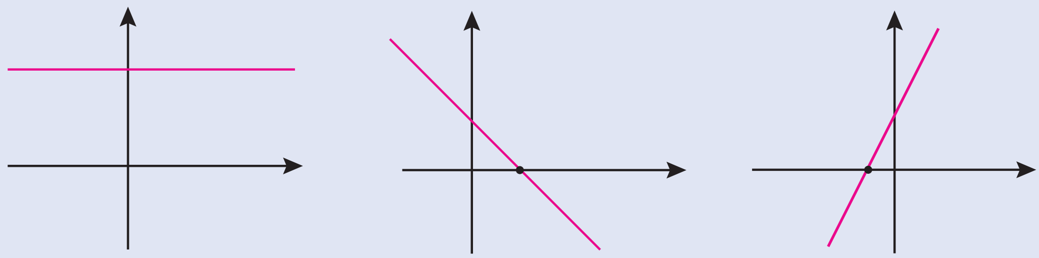
۳ شیب خط $y = -4$ چقدر است؟ زاویهٔ بین خط $y = -4$ و محور طول‌ها چقدر است؟

....

مسائل

برای حل مسائل این صفحه در صورت نیاز از نقاله و ماشین‌حساب استفاده کنید.

۱ در شکل‌های زیر زاویهٔ بین خط و محور طول‌ها و شیب خط را به‌دست آورید.



الف　　　ب　　　پ

۲ معادلهٔ خطی را بنویسید که با محور طول‌ها زاویهٔ ۲۰ درجه بسازد و از نقطهٔ $\begin{bmatrix} -۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$ بگذرد.

۳ خطی که از دو نقطهٔ $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۵ \end{bmatrix}$ می‌گذرد چه زاویه‌ای با محور طول‌ها می‌سازد؟

۴ خط به معادلهٔ $\sqrt{۳}x - ۳y = ۴$ در چه نقطه‌ای محور طول‌ها را قطع می‌کند و چه زاویه‌ای با آن می‌سازد؟

۵ از برخورد سه خط با معادله‌های $y = \sqrt{۳}x$ و $y = -x + ۵$ و $y = ۰$ (محور طول‌ها)، یک مثلث ساخته می‌شود. این مثلث را رسم کنید و زاویه‌های این مثلث را بر حسب رادیان به‌دست آورید.

۶ خط‌های به معادلهٔ $۳x - ۵y = c$ با هم (موازی‌اند/ متقاطع‌اند). زاویهٔ این خط‌ها با محور طول‌ها برحسب درجه و رادیان به‌طور تقریبی چقدر است؟