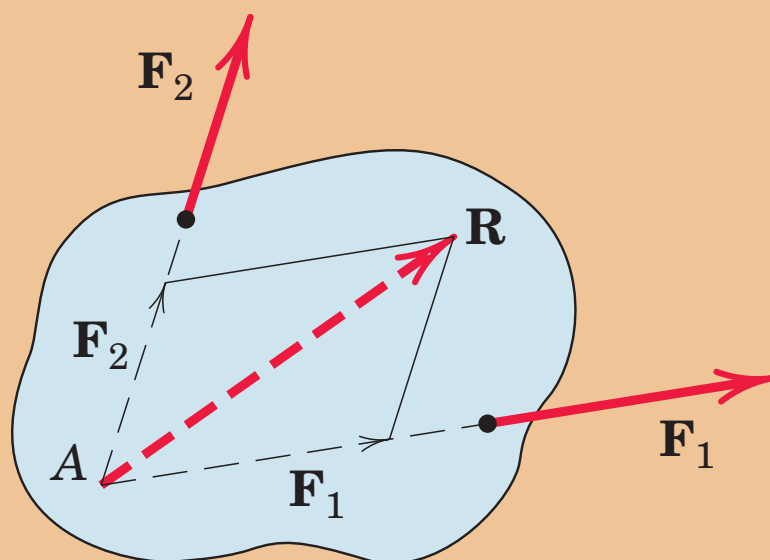


## پودمان ۱

# تحلیل مکانیک بُرداری



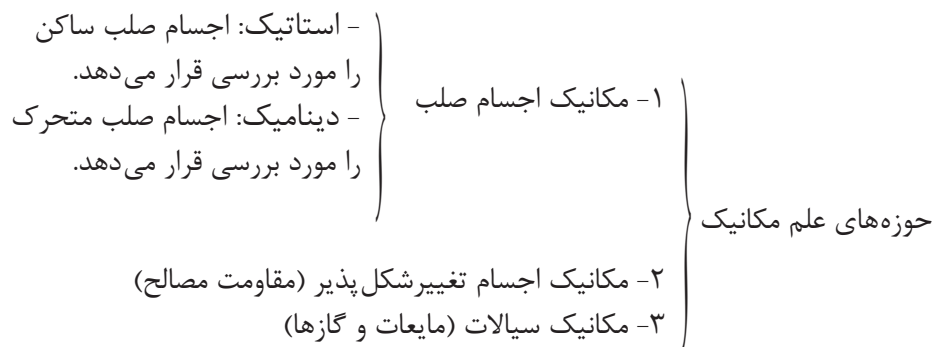
کاربرد جمع بردارها

واحد یادگیری ۱



## ۱-۱- تعریف علم مکانیک

علم مکانیک علمی است که شرایط سکون و حرکت اجسام تحت تأثیر نیرو را بررسی می‌کند.



در این کتاب از حوزه‌های فوق، با مکانیک اجسام صلب ساکن (استاتیک) آشنا می‌شویم.

محمد کرجی از نوایغ مهندسی ایران در بیش از هزار سال پیش بوده است. کرجی در کتاب «استخراج آب‌های زیرزمینی» به‌وضوح از کرویت زمین و قوه جاذبه و قوانین تعادل و حرکت، که برخی از آن‌ها چندین قرن بعد توسط دانشمندان اروپایی مطرح شد سخن می‌گوید.

بیشتر  
بدانیم



## ۱-۲- مفاهیم اصلی در علم مکانیک

مفاهیم اصلی و مورد استفاده در علم مکانیک و معرفی یکاهای اندازه‌گیری آن‌ها در سامانه بین‌المللی یکاها (SI) به شرح زیر می‌باشد.

۱- فضا (Space):

ناحیه هندسی است که رویدادهای فیزیکی در آن رخ می‌دهد. موقعیت هر نقطه در فضا را مکان می‌نامیم که نسبت به یک نقطه مرجع تعیین می‌شود و واحد اندازه‌گیری آن در سامانه SI، متر (m) می‌باشد.

۲- زمان (Time):

فاصله بین وقوع دو رویداد فیزیکی زمان نام دارد و واحد اندازه‌گیری آن ثانیه (s) می‌باشد.

۳- جرم (Mass):

هر چیزی که فضا را اشغال نماید ماده نام دارد و جسم ماده‌ای است که به‌وسیله یک سطح بسته محدود شده است. مقدار ماده تشکیل دهنده هر جسم را جرم آن جسم می‌نامیم و واحد اندازه‌گیری آن کیلوگرم (kg) است.

۴- نیرو (Force):

تأثیر یک جسم بر جسم دیگر را نیرو می‌نامیم و واحد اندازه‌گیری آن نیوتن (N) است. این تأثیر می‌تواند تغییر در حرکت، تغییر شکل و یا چرخش اجسام باشد.

## ۱-۳- فرضیات

در علم مکانیک به منظور ساده‌تر شدن حل مسائل، فرضیاتی به شرح زیر در نظر گرفته می‌شود.

### ۱- جسم صلب (Rigid Body):

جسمی است که در اثر اعمال نیرو تغییر شکل ندهد.

### ۲- نقطه مادی (Particle):

جسمی است که از ابعاد آن صرف‌نظر می‌شود؛ به عنوان مثال می‌توان کره زمین را در فضا به صورت یک نقطه مادی در نظر گرفت.

## ۱-۴- قوانین نیوتن

مکانیک اجسام صلب بر اساس قوانین نیوتن به شرح زیر استوار است:

### ۱- قانون اول نیوتن:

هرگاه مجموع نیروهای وارد بر یک جسم صفر باشد:

{ اگر جسم ساکن باشد تا ابد ساکن باقی می‌ماند.  
اگر در حال حرکت باشد به حرکت یکنواخت و مستقیم‌الخط خود ادامه می‌دهد.

### ۲- قانون دوم نیوتن:

هرگاه مجموع نیروهای وارد بر یک جسم صفر نباشد، آن جسم شتابی متناسب با مجموع نیروها و در راستای آن می‌گیرد. قانون دوم نیوتن با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$F = m.a \quad (1)$$

در این رابطه:

**F** مجموع نیروهای وارد بر جسم بر حسب **N**

**m** جرم جسم بر حسب **kg**

**a** شتاب ایجاد شده در جسم بر حسب  $\frac{m}{s^2}$  می‌باشد.

یک مورد خاص و بسیار مهم این قانون وزن اجسام است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

### تعریف وزن (Weight):

وزن نیرویی است که از طرف زمین به اجسام وارد می‌شود و با رابطه (۲) بیان می‌گردد که شباهت زیادی با رابطه (۱) دارد.

$$W = m.g \quad (2)$$

**W** : وزن جسم بر حسب نیوتن

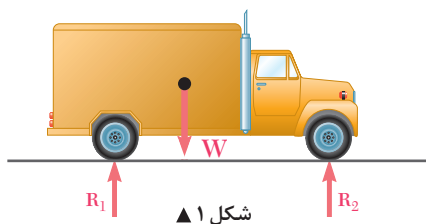
**m** : جرم جسم بر حسب **kg**

**g** : شتاب جاذبه زمین معادل  $(g = 9.81 \sim 10 \frac{m}{s^2})$  می‌باشد.

تذکر:

واحد دیگر وزن، کیلوگرم نیرو (**kgf**) می‌باشد که معادل  $10$  نیوتن است یعنی:

$$1 \text{ kgf} \sim 10 \text{ N}$$



شکل ۱ ▲

### ۳- قانون سوم نیوتن:

هر عملی را عکس‌العملی است مساوی با آن و در جهت خلاف آن. (شکل ۱)

در این کتاب از سامانه بین‌المللی واحدهای اندازه‌گیری (SI) استفاده می‌کنیم که در اکثر کشورها نیز پذیرفته شده است.

نکته



### پیشوندهای واحدهای اندازه‌گیری:

منظور از پیشوند، یک مقدار عددی است که با حروف الفبای یونانی تعریف شده (مطابق جدول ۱) و قبل از واحدهای اندازه‌گیری قرار می‌گیرد.

مزیت استفاده از پیشوندها این است که از نوشتن اعداد خیلی بزرگ و خیلی کوچک اجتناب می‌شود. به عنوان مثال می‌توان  $247500 \text{ N}$  را به صورت  $247/5 \text{ kN}$  و یا  $0/00546 \text{ m}$  را به شکل  $5/46 \text{ mm}$  نوشت.

نکته



• بین پیشوند و واحد اندازه‌گیری مورد نظر از هیچ علامتی استفاده نمی‌شود اما بین دو واحد اندازه‌گیری مختلف هر علامتی نظیر  $\times$  و  $/$  می‌تواند وجود داشته باشد به طور مثال:  $\text{N.m}$  یعنی نیوتن متر و  $\text{nm}$  یعنی نانومتر که معادل  $(10^{-9} \text{ m})$  می‌باشد.  
مثال:  $7/5 \times 10^{-5} \text{ MN}$  چند نیوتن است؟

$$7/5 \times 10^{-5} \times 10^6 = 75 \text{ N}$$

نکته



جدول (۱) پیشوندهای آحاد اندازه‌گیری

نام پیشوند	علامت اختصاری	مقدار عددی	شکل توانی
پیکو	p	0/000000000001	$10^{-12}$
نانو	n	0/000000001	$10^{-9}$
میکرو	$\mu$	0/0000001	$10^{-6}$
میلی	m	0/001	$10^{-3}$
کیلو	K	1,000	$10^3$
مگا	M	1,000,000	$10^6$
گیگا	G	1,000,000,000	$10^9$
ترا	T	1,000,000,000,000	$10^{12}$

## ۱- ۵- کمیت‌های فیزیکی

به طور کلی کمیت‌های فیزیکی به دو دسته اصلی و فرعی تقسیم‌بندی می‌شوند.

**کمیت‌های اصلی:** به کمیت‌هایی گفته می‌شود که مستقل‌اند و در این پودمان عبارت‌اند از طول (L)، جرم (M) و زمان (T).

**کمیت‌های فرعی:** به کمیت‌هایی گفته می‌شود که وابسته به کمیت‌های اصلی هستند و از آنها ناشی می‌شوند. مانند نیرو، گشتاور نیرو، سرعت، کار، انرژی و ...

در یک تقسیم‌بندی دیگر کمیت‌های فیزیکی به دو دسته اسکالر و برداری تقسیم می‌شوند.

**کمیت‌های عددی یا اسکالر:** کمیت‌هایی هستند که فقط دارای اندازه یا مقدار می‌باشند؛ مانند طول، جرم، زمان، کار و انرژی.

**کمیت‌های برداری:** کمیت‌هایی هستند که علاوه بر مقدار دارای جهت و راستا نیز می‌باشند. مانند: بردارهای نیرو، گشتاور، سرعت، شتاب و جابه‌جایی.

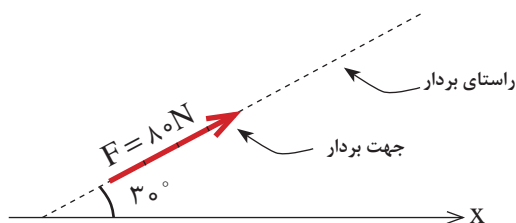
### دیمانسیون

به رابطه کمیت‌های اصلی و فرعی دیمانسیون یا معادله ابعادی گفته می‌شود. در این معادله کمیت‌های فرعی بر حسب دیمانسیون کمیت‌های اصلی تعریف می‌گردند.

دیمانسیون طول را به L و دیمانسیون جرم را با M و دیمانسیون زمان را با T نشان می‌دهند.

به طور مثال دیمانسیون نیرو که یک کمیت فرعی است را با توجه به قانون دوم نیوتن یعنی  $F=ma$  به صورت  $F = MLT^{-2}$  نمایش می‌دهند.

## ۱- ۶- بردارها (Vector)



شکل ۲ ▲

هر بردار به صورت یک پیکان با طولی متناسب با مقدار آن ترسیم می‌شود

به عنوان مثال در شکل (۲)، بردار نیروی ( $\vec{F}$ ) با مقدار ۸۰ N و با زاویه  $30^\circ$  نسبت به محور X و در جهت و راستای نشان داده شده ترسیم شده است.

زاویه امتداد هر بردار، با یک امتداد مبنا که معمولاً امتدادهای X یا Y است، مشخص می‌شود.

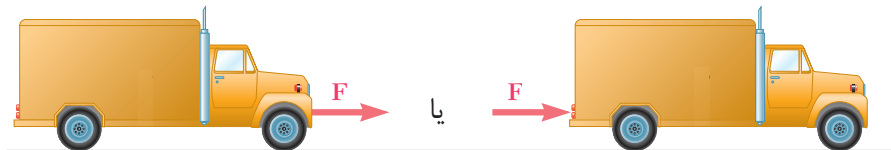
نکته



## ۱-۷- انواع بردارها

### ۱- بردار لغزان

برداری است که اگر در راستای خود جابه‌جا شود، اثر آن بر جسم تغییر ننماید. همانند نیروی  $\vec{F}$  در شکل (۳)



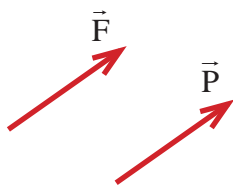
شکل ۳ ▲

### ۲- بردار ثابت

برداری است که مکان معینی را در فضا اشغال می‌کند و نمی‌توان آن را جابه‌جا نمود. یعنی با جابه‌جا کردن آن، اثر آن بر جسم تغییر می‌نماید. مثلاً ضربه‌ای که به سر انسان وارد می‌شود با ضربه‌ای که با همان مقدار و همان جهت به پای او وارد می‌آید متفاوت است.

### ۳- بردارهای هم‌سنگ

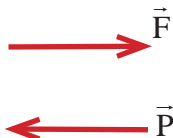
دو بردار مساوی، موازی و هم‌جهت را بردارهای هم‌سنگ می‌نامیم. در شکل (۴) بردارهای  $\vec{F}$  و  $\vec{P}$  هم‌سنگ اند.



شکل ۴ ▲

### ۴- بردارهای زوج

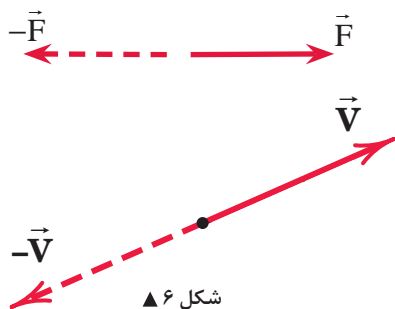
دو بردار مساوی، موازی و مختلف‌الجهت را بردارهای زوج می‌نامیم. در شکل (۵) بردارهای  $\vec{F}$  و  $\vec{P}$  زوج‌اند.



شکل ۵ ▲

### ۵- بردارهای مخالف

دو بردار مساوی، هم‌راستا و مختلف‌الجهت را بردارهای مخالف گویند. (شکل ۶)

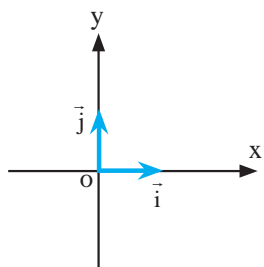


شکل ۶ ▲

### ۶- بردار یکه (واحد)

برداری که مقدار (اندازه) آن برابر واحد است را بردار یکه یا واحد می‌نامیم.

بردار واحد روی محور  $x$  ها را با  $\vec{i}$  و روی محور  $y$  ها را با  $\vec{j}$  نمایش می‌دهند. (شکل ۷)

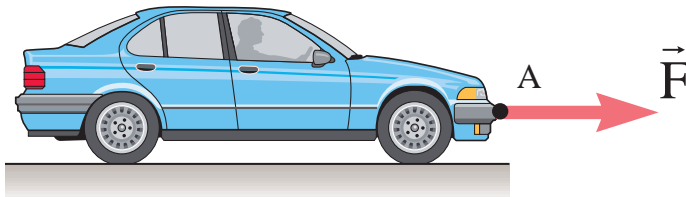


شکل ۷ ▲

## ۷- بردار نیرو

بردارى است که علاوه بر مقدار، جهت و راستا داراى نقطه اثر نیز می‌باشد. در شکل (۸) نقطه  $A$ ، نقطه‌اثر بردار نیرو  $\vec{F}$  می‌باشد.

و واحد اندازه‌گیری نیرو، نیوتن (N) است و مطابق قانون دوم نیوتن به صورت زیر تعریف می‌شود:



شکل ۸ ▲

$$F = m.a$$

$$1N = 1kg \times 1 \frac{m}{s^2}$$

تعریف نیوتن با استفاده از قانون دوم نیوتن  
یک نیوتن مقدار نیرویی است که اگر به جرم یک کیلوگرم وارد شود،  
در آن شتابی معادل یک متر بر مجذور ثانیه و در جهت اعمال نیرو  
ایجاد نماید.

## ۸-۱- جمع و تفریق بردارها

عملیات جمع و تفریق کمیت‌های برداری با جمع و تفریق کمیت‌های عددی (اسکالر) متفاوت است. یعنی نمی‌توان مقادیر عددی دو یا چند بردار، به غیر از بردارهای هم‌راستا، و موازی را با یکدیگر جمع و یا تفریق نمود. در این کتاب برای نشان دادن یک بردار مانند  $\vec{V}$  از علامت  $(\rightarrow)$  در بالای آن استفاده می‌شود و برای نشان دادن مقدار (اندازه) آن بردار علامت  $(\rightarrow)$  بالای آن برداشته می‌شود.

$$\begin{array}{l} \vec{V} : \text{ بردار} \\ V : \text{ اندازه یا مقدار بردار } V \end{array}$$

### ۱-۸-۱- روش‌های جمع و تفریق بردارها

جمع و تفریق بردارها به دو روش ۱- ترسیمی ۲- محاسباتی انجام می‌شود.

#### ۱-۸-۱-۱ روش ترسیمی

در این روش با استفاده از وسایل ترسیم و مقیاس مناسب جمع و تفریق بردارها انجام می‌شود. روش‌های ترسیمی جمع و تفریق بردارها شامل سه روش زیر می‌باشد:

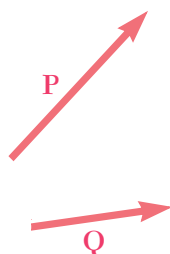
(الف) روش مثلث

(ب) روش متوازی‌الاضلاع

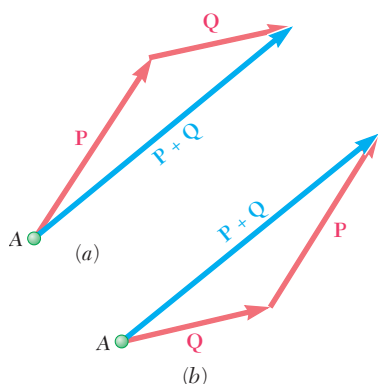
(ج) روش چندضلعی

لازم به ذکر است که روش‌های مثلث و متوازی‌الاضلاع برای مجموع یا تفاضل دو بردار و روش چندضلعی برای مجموع یا تفاضل بیش از دو بردار مناسب می‌باشند.

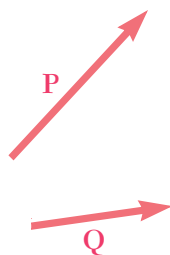




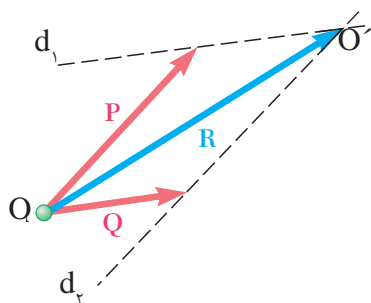
شکل ۹ ▲



شکل ۱۰ ▲



شکل ۱۱ ▲



شکل ۱۲ ▲

### الف) روش مثلث

دو بردار  $\vec{P}$  و  $\vec{Q}$  مطابق شکل (۹) مفروض است. برای به دست آوردن مجموع آن‌ها یعنی  $\vec{P} + \vec{Q}$  به صورت زیر عمل می‌کنیم:

(۱) از نقطه دلخواه مانند A هم‌سنگ یکی از بردارها ترسیم می‌شود  
(۲) از انتهای بردار اول هم‌سنگ بردار دوم ترسیم می‌شود

(۳) برداری که از ابتدای بردار اول به انتهای بردار دوم وصل می‌شود مجموع دو بردار خواهد بود که مقدار آن به وسیله خط کش مقیاس اندازه‌گیری می‌شود: شکل (۱۰)

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} \quad (۳)$$

### ب) روش متوازی‌الاضلاع

دو بردار  $\vec{P}$  و  $\vec{Q}$  مطابق شکل (۱۱) مفروض است و مجموع آن‌ها یعنی  $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$  مدنظر می‌باشد. طبق قانون متوازی‌الاضلاع به شرح زیر عمل می‌نمائیم: شکل (۱۲)

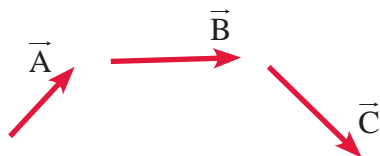
(۱) از نقطه دلخواه مانند O هم‌سنگ بردارهای  $\vec{P}$  و  $\vec{Q}$  را ترسیم می‌نمائیم  
(۲) از انتهای بردار  $\vec{P}$  به موازات بردار  $\vec{Q}$  خطی ترسیم می‌شود (خط  $d_1$ )  
(۳) از انتهای بردار  $\vec{Q}$  به موازات بردار  $\vec{P}$  خطی ترسیم می‌شود (خط  $d_2$ ) تا خط  $d_1$  را در نقطه  $O'$  قطع نماید.

(۴) برداری که از O به  $O'$  ترسیم می‌شود همان مجموع دو بردار  $\vec{P}$  و  $\vec{Q}$  یعنی  $\vec{R}$  خواهد بود که مقدار آن با رابطه (۴) محاسبه می‌شود:

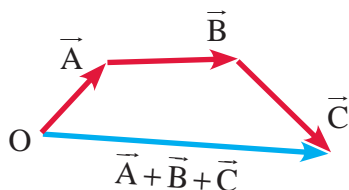
$$\begin{aligned} R^2 &= P^2 + Q^2 + 2PQ \cos O \\ R &= \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos O} \end{aligned} \quad (۴)$$

### ج) روش چندضلعی

در این روش به منظور ترسیم مجموع چند بردار مانند شکل (۱۳) از یک نقطه دلخواه مانند **O** هم‌سنگ بردار اول را رسم می‌کنیم و از انتهای بردار رسم شده هم‌سنگ بردار دوم ترسیم می‌شود. این روند تا ترسیم تمامی بردارها ادامه می‌یابد؛ برداری که از ابتدای بردار اول به انتهای بردار آخر رسم می‌شود، مجموع بردارها خواهد بود. شکل (۱۴)



▲ شکل ۱۳



▲ شکل ۱۴

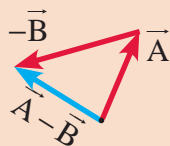
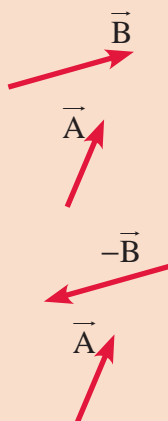
- هر گاه انتهای آخرین بردار بر ابتدای بردار اول منطبق گردد (یک چندضلعی بسته تشکیل شود)، مجموع بردارها صفر خواهد بود.
- در حالتی که بردارها موازی یا هم‌راستا باشند، برای جمع و تفریق آن‌ها کافی است با در نظر گرفتن جهت بردارها، آن‌ها را روی یک محور ترسیم نمود.

نکته

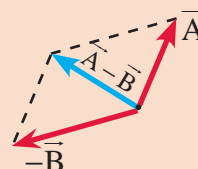


عملیات تفریق دو یا چند بردار به روش‌های فوق با استفاده از تعریف بردار مخالف مطابق شکل (۱۵) امکان‌پذیر است. یعنی:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \quad (۵)$$



تفاضل بردارهای  $\vec{A}$  و  $\vec{B}$   
به روش مثلث



تفاضل بردارهای  $\vec{A}$  و  $\vec{B}$   
به روش متوازی‌الاضلاع

▲ شکل ۱۵

در این حالت چنانچه بخواهیم به روش محاسباتی عمل نمائیم کافیست که بردارهای موجود را دوبه‌دو با هم جمع یا تفریق نموده و حاصل هر دو بردار را با بردار بعد، جمع یا تفریق کرده و این روند را تا آخرین بردار ادامه داد.

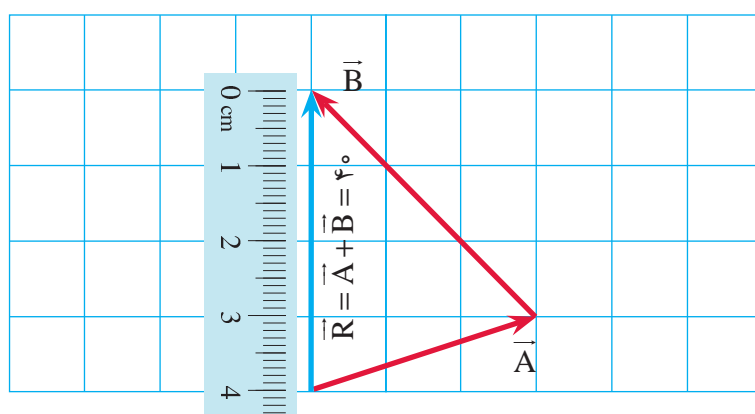
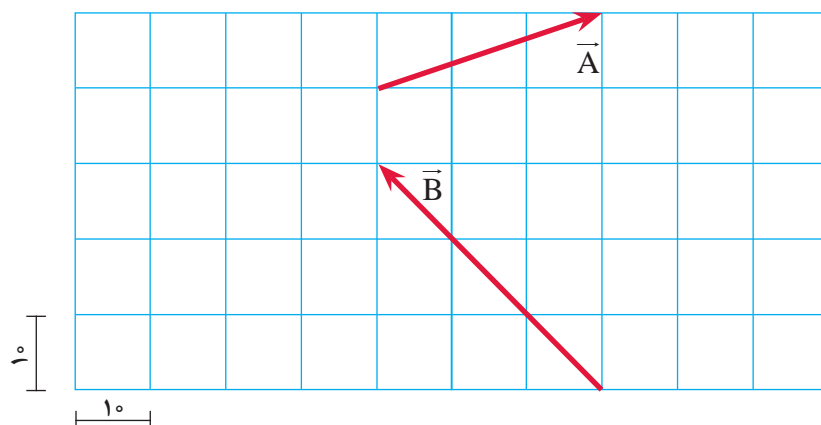
نکته



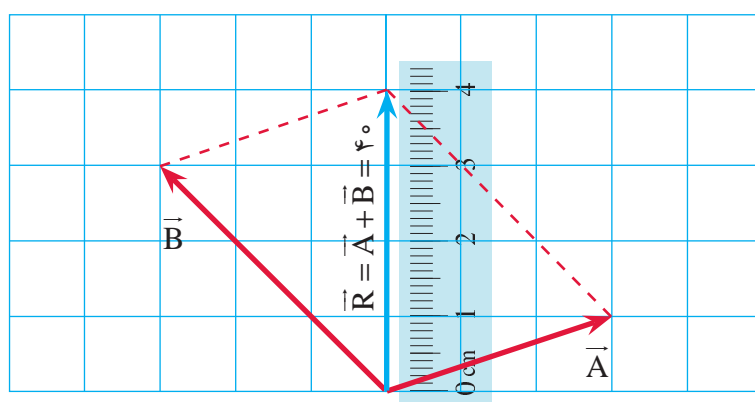
مثال ۱



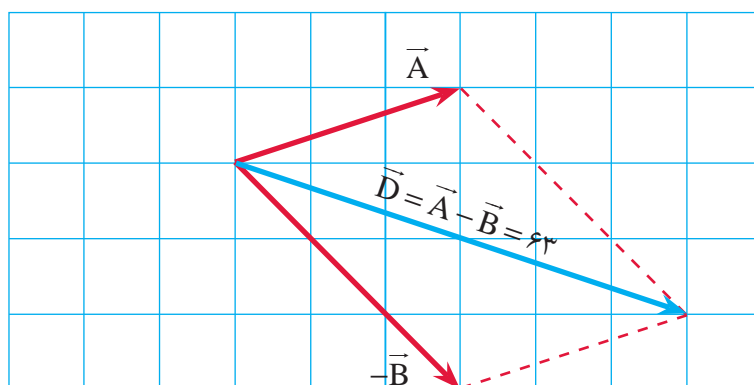
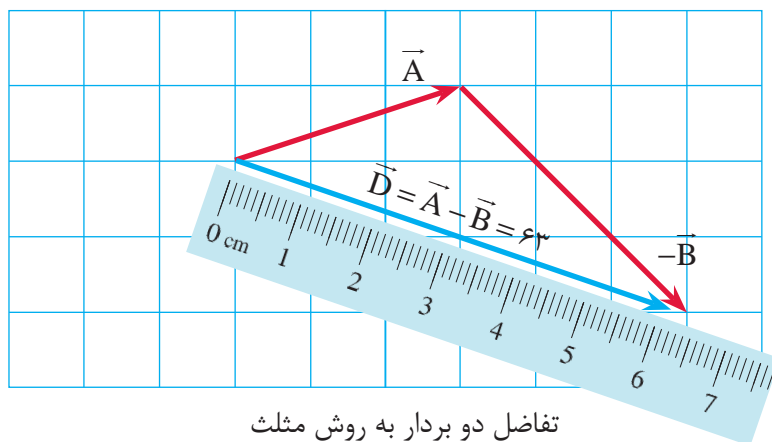
در شکل زیر حاصل بردارهای  $\vec{A} + \vec{B}$  و  $\vec{A} - \vec{B}$  را محاسبه نمایید.  
(ابعاد شبکه برابر  $10^\circ$  واحد است)



مجموع دو بردار به روش مثلث



مجموع دو بردار به روش متوازی الاضلاع

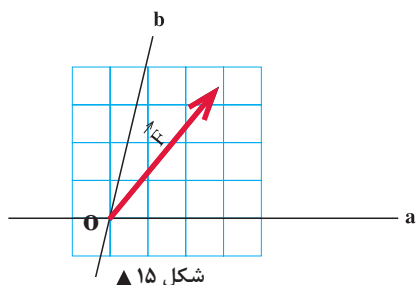


## ۹-۱- تجزیه یک بردار به مؤلفه‌های آن به روش ترسیمی

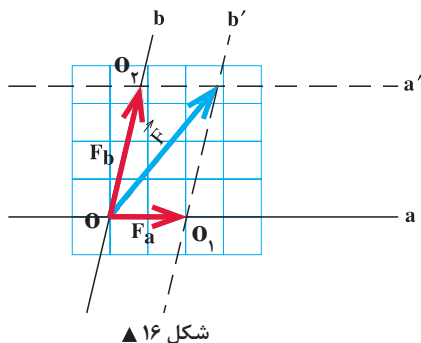
همان گونه که در قسمت قبل دیدیم دو بردار با امتداد و مقادیر مشخص را می‌توان با استفاده از روش‌های مثلث یا متوازی‌الاضلاع با یکدیگر جمع نمود و مجموع آن‌ها را به دست آورد؛ که این بردار مجموع را برآیند دو بردار اولیه نیز می‌نامند. حال چنانچه دو امتداد دلخواه در صفحه داشته باشیم و برداری به نام  $\vec{F}$  نیز داده شده باشد می‌توان آن را بر روی دو امتداد مورد نظر به شرح ذیل تجزیه نمود که عکس عمل جمع دو بردار می‌باشد. (شکل‌های ۱۵ و ۱۶)

(۱) از انتهای بردار  $\vec{F}$  دو خط به موازات محورهای  $\mathbf{a}$  و  $\mathbf{b}$  ترسیم نموده (خطوط  $\mathbf{a}'$  و  $\mathbf{b}'$ ) تا آن‌ها را در نقاط  $O_1$  و  $O_2$  قطع نماید.

(۲) بردار  $\vec{OO_1}$  مؤلفه  $\vec{F}$  روی امتداد  $\mathbf{a}$  خواهد بود که با  $\vec{F}_a$  نشان داده می‌شود.



شکل ۱۵ ▲

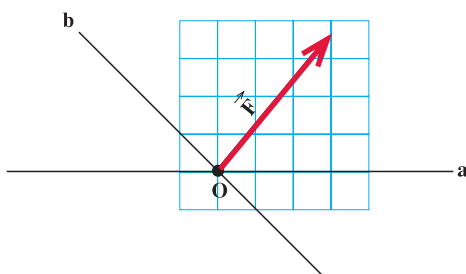


شکل ۱۶ ▲

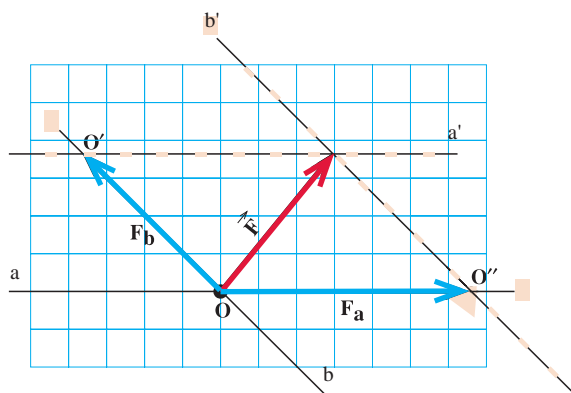
۳) بردار  $\overrightarrow{OO_p}$  مؤلفه  $\vec{F}$  روی امتداد  $b$  خواهد بود که با نماد  $\vec{F}_b$  نشان داده می‌شود.  
روش فوق، روش کلی برای تجزیه یک بردار است. حالت خاصی از آن تجزیه یک بردار روی دو محور متعامد (عمود بر هم) است که کاربرد زیادی در حل مسائل ایستایی دارد.

در شکل زیر بردار  $F$  را روی امتدادهای  $a$  و  $b$  تجزیه کنید.

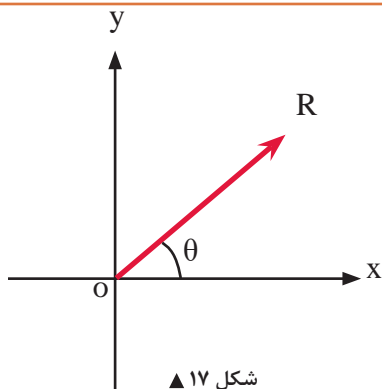
مثال ۲



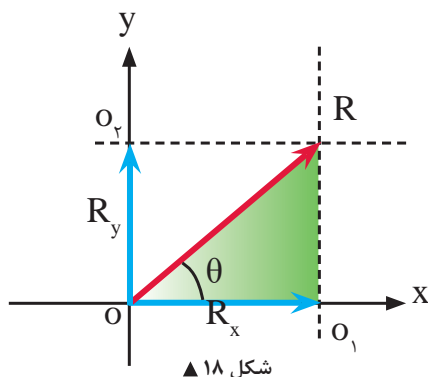
حل:



## ۱- ۱۰- تجزیه یک بردار به مؤلفه‌های متعامد آن در دستگاه مختصات دکارتی به روش ترسیمی و محاسباتی



شکل ۱۷ ▲



شکل ۱۸ ▲

مطابق شکل (۱۷) بردار  $\vec{R}$  با زاویه  $\theta$  نسبت به محور  $x$  مفروض است. می‌خواهیم آن را روی محورهای متعامد  $x$  و  $y$  تجزیه نمائیم. چنانچه مطابق مراحل سه‌گانه در بخش (۹-۱) عمل کنیم، به شکل (۱۸) خواهیم رسید.

اندازه یا مقدار مؤلفه‌های  $R_x$  و  $R_y$  با استفاده از روابط مثلثاتی در مثلث رنگ شده شکل (۱۸) به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

$$\cos \theta = \frac{R_x}{R} \Rightarrow R_x = R \cdot \cos \theta$$

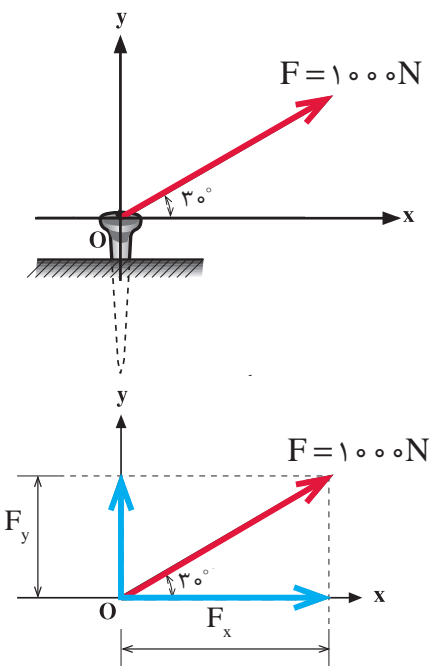
$$\sin \theta = \frac{R_y}{R} \Rightarrow R_y = R \cdot \sin \theta$$

(۶)

مثال ۳



نیروی  $F$  مطابق شکل بر میخی وارد می‌شود. مطلوب است تجزیه این نیرو روی محورهای  $x$  و  $y$  و محاسبه مقادیر مؤلفه‌ها.



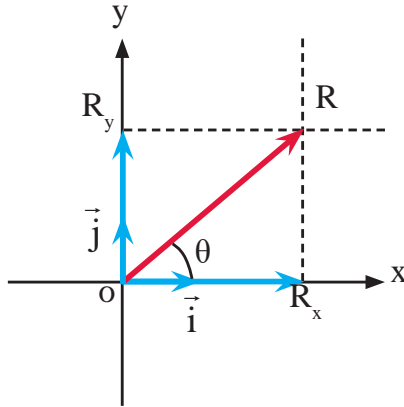
حل:

نیروی  $F$  را به مؤلفه‌های متعامد تجزیه می‌کنیم.

$$F_x = F \cos \theta = 1000 \times \cos 30^\circ \Rightarrow F_x = 866.02 \text{ N}$$

$$F_y = F \sin \theta = 1000 \times \sin 30^\circ \Rightarrow F_y = 500 \text{ N}$$

## ۱۱-۱- نمایش برداری یک بردار در دستگاه مختصات دکارتی



شکل ۱۹ ▲

در دستگاه مختصات دکارتی محورهای  $ox$  و  $oy$  بر یکدیگر عمود بوده و بردارهای واحد (یکه) روی آن‌ها به ترتیب با  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  نمایش داده می‌شوند و برداری مانند بردار  $\vec{R}$  مطابق شکل (۱۹) در این دستگاه با رابطه (۵) تعریف می‌شود:

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} \quad (۷)$$

که در رابطه فوق  $R_x$  مؤلفه  $\vec{R}$  روی محور  $x$  و  $R_y$  مؤلفه  $\vec{R}$  روی محور  $y$  می‌باشد.

فرم برداری بردار  $\vec{F}$  در شکل (مثال ۳) را بنویسید.

حل:

فرم برداری بردار  $\vec{F}$  به صورت  $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$  می‌باشد. با توجه به نتایج مثال ۳ داریم:

$$F_x = ۸۶۶ / ۰.۲N$$

$$F_y = ۵۰۰N$$

$$\vec{F} = ۸۶۶ / ۰.۲ \vec{i} + ۵۰۰ \vec{j}$$

بنابراین:

مثال ۴



## ۱۲-۱- تعیین اندازه و زاویه امتداد یک بردار با استفاده از مؤلفه‌های متعامد آن

همان‌طور که یک بردار را می‌توان به دو مؤلفه روی امتدادهای مختلف تجزیه کرد می‌توان به کمک مؤلفه‌های یک بردار، اندازه بردار و زاویه آن را به کمک رابطه فیثاغورث و نسبت‌های مثلثاتی تعیین کرد. هر گاه برداری مانند  $\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$  داشته باشیم، می‌توان اندازه  $R$  و زاویه امتداد آن را با امتداد  $x$  به صورت زیر تعیین نمود:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (۸)$$

مقدار (اندازه) بردار  $R$

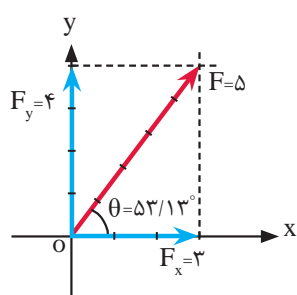
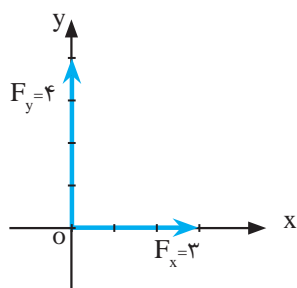
$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right| \quad (۹)$$

زاویه بردار  $R$  نسبت به محور  $x$  ها

مثال ۵



بردار  $\vec{F} = (3\vec{i} + 4\vec{j})$  را ترسیم نموده، مقدار و زاویه امتداد آن را با محور X ها به دست آورید.

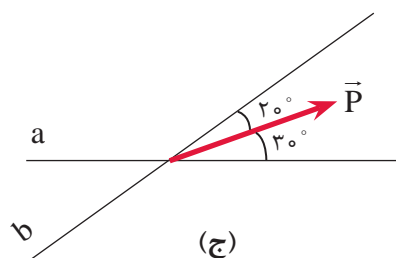
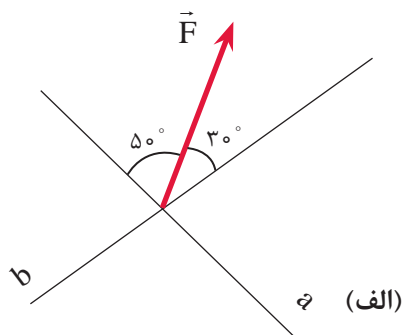
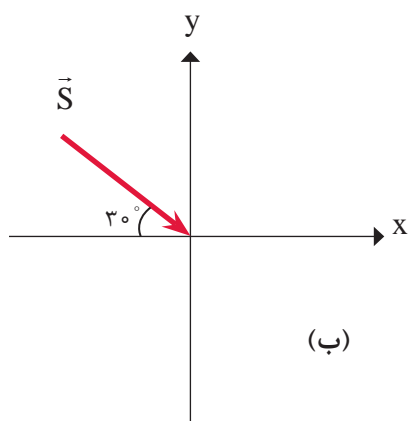


$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F = \sqrt{3^2 + 4^2} \Rightarrow \boxed{F = 5}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{F_y}{F_x} \right| \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left| \frac{4}{3} \right| \Rightarrow \boxed{\theta = 53/13^\circ}$$

بردارهای زیر را به روش ترسیمی روی محورهای داده شده تجزیه نمایید.

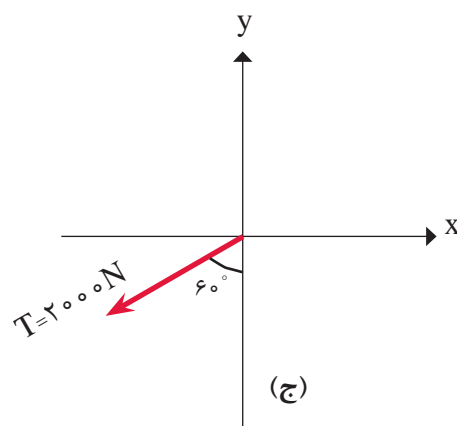
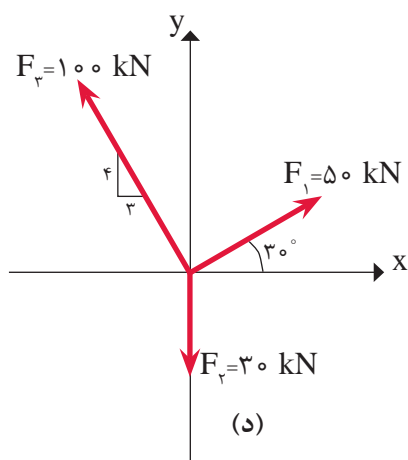
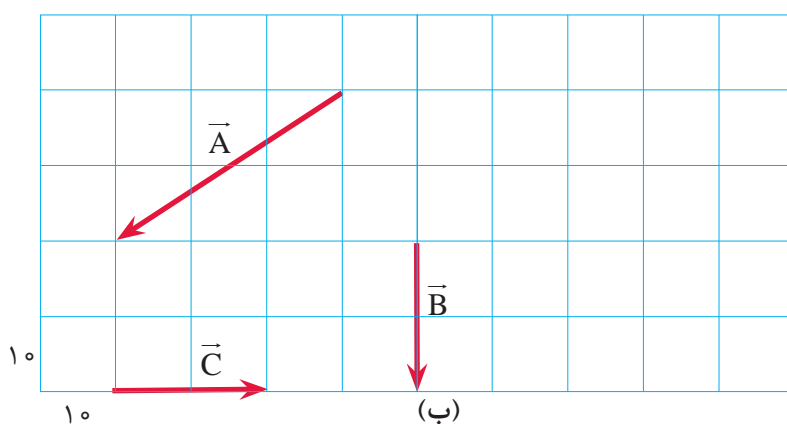
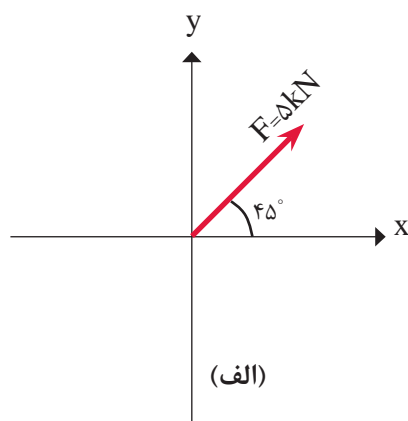
فعالیت  
کلاسی ۱







بردارهای زیر را به مؤلفه‌های متعامد آن تجزیه نمائید و فرم برداری آن‌ها را بنویسید.





بردارهای زیر را ترسیم نموده و اندازه و زاویه امتداد هر یک را نسبت به محورهای x و y تعیین کنید.

(الف)  $\vec{F} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$

(ب)  $\vec{P} = -5\vec{i}$

(ج)  $\vec{T} = 3/5\vec{j}$

(د)  $\vec{Q} = -3\vec{i} - 3\vec{j}$



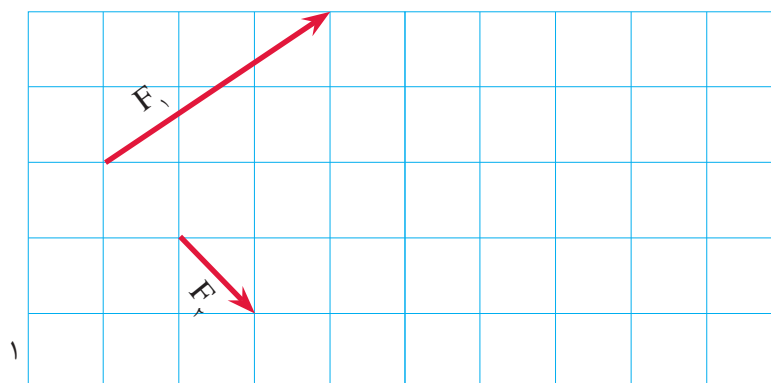
در شکل‌های زیر مطلوب است:

(الف) فرم برداری هر بردار.

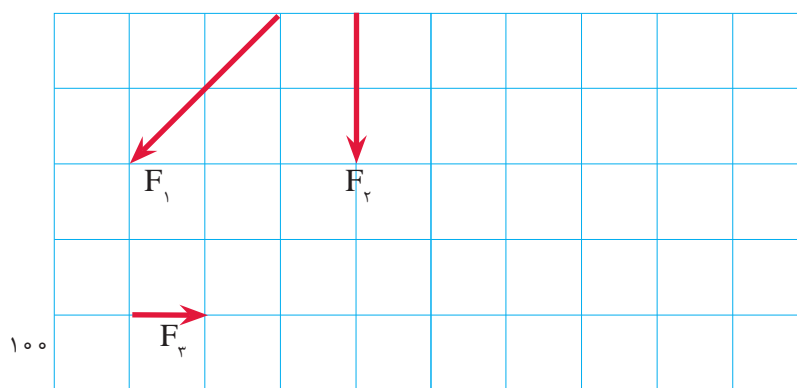
(ب) اندازه هر یک را به صورت ترسیمی (با خط کش) به دست آورید.

(ج) اندازه هر یک را به صورت محاسباتی به دست آورید.

(د) اندازه‌های محاسباتی و ترسیمی هر بردار را با هم مقایسه کنید.



(الف)



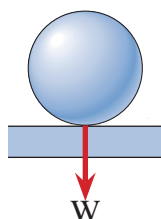
(ب)

## ۱-۱۳- نیرو

نیرو کمیتی است برداری که می‌تواند باعث تغییر در حرکت، تغییر شکل و یا چرخش در اجسام گردد.

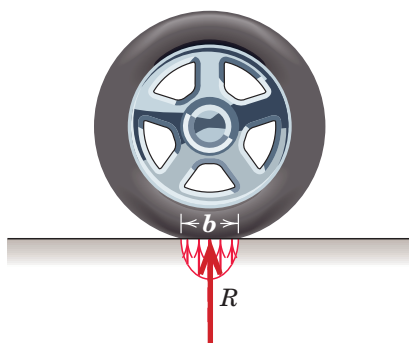
## ۱-۱۴- انواع نیرو

### ۱-۱۴-۱- نیروهای خارجی



شکل ۲۰ ▲

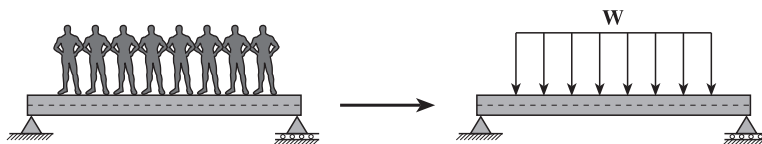
نیروهایی هستند که از محیط اطراف و در خارج از وجود جسم به آن وارد می‌شوند. مکانیک اجسام صلب (استاتیک) فقط به نیروهای خارجی توجه دارد؛ مانند: وزن گوی در شکل (۲۰) که به کف وارد می‌شود.



شکل ۲۱ ▲

الف) نیروهای متمرکز: اگر نیرو به طول کوچک و قابل اغماضی از جسم وارد گردد آن را نیروی متمرکز می‌نامند. شکل (۲۱)

ب) نیروهای گسترده: اگر نیرو در طول قابل توجهی از جسم پخش گردد آن را نیروی گسترده گویند. شکل (۲۲)



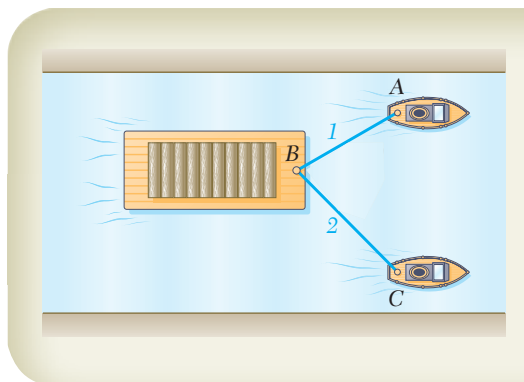
شکل ۲۲ ▲

### ۱-۱۴-۲- نیروهای داخلی

نیروهایی هستند که در داخل جسم و بین ذرات تشکیل‌دهنده آن ایجاد می‌شوند؛ مانند نیرویی که شخص هنگام اجرای بارفیکس در دستان خود احساس می‌کند؛ در مکانیک اجسام تغییرشکل‌پذیر (مقاومت مصالح) به نیروهای داخلی توجه می‌شود.

## ۱-۱۵- برآیند سامانه‌های نیرویی وارد بر نقطه مادی به روش محاسباتی

منظور از برآیند دو یا چند نیرو عبارت است از جمع برداری آن نیروها، به طوری که بردار برآیند به تنهایی اثر همه نیروهای وارد به جسم را دارا باشد. به عنوان مثال در شکل (۲۳) شناور B در مسیری به حرکت در می‌آید که در واقع امتداد بردار برآیند دو نیروی وارده از طرف قایق‌های A و C خواهد بود. این بدان معناست که می‌توان به جای دو نیروی مذکور نیروی برآیند آن‌ها را در امتداد مسیر حرکت شناور قرار داده و آن را به حرکت درآورد.



شکل ۲۳ ▲

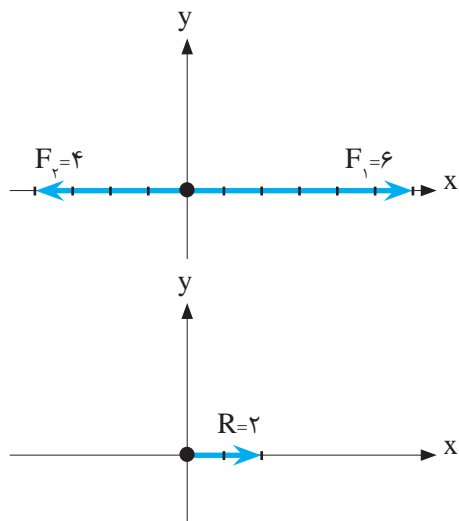
## ۱-۱۵-۱- برآیند نیروهای هم‌راستا و موازی

برای محاسبه برآیند نیروهای هم‌راستا کافی است مقادیر آن‌ها را با یکدیگر جمع جبری نماییم.

مثال ۶



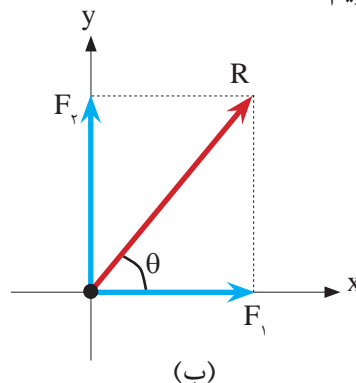
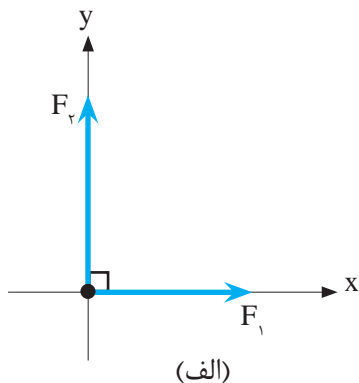
دو نیروی  $F_1 = 6\vec{i}$  و  $F_2 = -4\vec{i}$  را روی محورهای مختصات ترسیم نموده و برآیند آن‌ها را محاسبه و ترسیم نمایید.



$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ \vec{R} &= 6\vec{i} - 4\vec{i} \Rightarrow \vec{R} = 2\vec{i}\end{aligned}$$

## ۱-۱۵-۲- برآیند دو نیروی متعامد

برای محاسبه مقدار برآیند دو نیروی متعامد مطابق شکل (۲۴-الف) با استفاده از رابطه فیثاغورث و شکل (۲۴-ب) داریم:



شکل ۲۴ ▲

$$R^2 = F_x^2 + F_y^2 \Rightarrow R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (10)$$

و برای محاسبه زاویه برآیند با  $F_x$  می‌توان از رابطه تانژانت استفاده نمود:

$$\tan \theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left( \frac{F_y}{F_x} \right) \quad (11)$$

مثال ۷

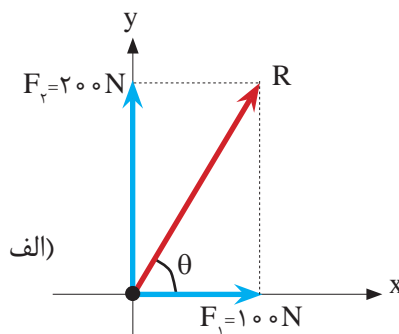
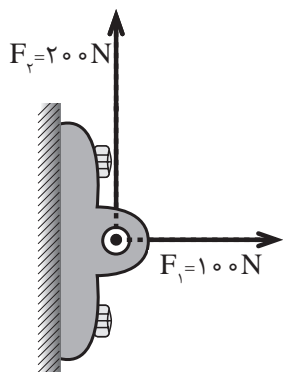


در شکل زیر مطلوب است:

الف) ترسیم برآیند ( $R$ )

ب) تعیین مقدار برآیند

ج) تعیین زاویه برآیند با افق یا امتداد  $F_x$

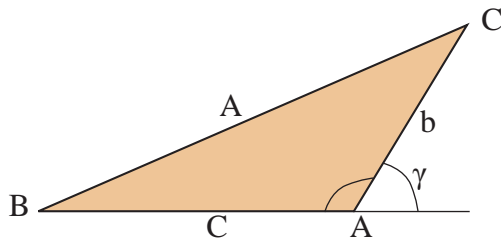


ب)  $R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{100^2 + 200^2} = \sqrt{50000} \Rightarrow R = 223.61 \text{ N}$

ج)  $\theta = \tan^{-1} \left( \frac{F_y}{F_x} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{200}{100} \right) \Rightarrow \theta = 63.43^\circ$

### ۱-۱۵-۳- برآیند دو نیروی غیر متعامد

در این سیستم شرط لازم بسته شدن سه ضلعی نیروهاست، اما تفاوتی که این حالت با حالت متعامد دارد غیر مشخص بودن سه ضلعی (مثلث) نیروهاست. به همین دلیل استفاده از قانون متوازی الاضلاع برای حل ترسیمی و استفاده از قانون سینوس ها و کسینوس ها برای حل مثلثاتی کارآمد خواهد بود.



شکل ۲۵ ▲

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \gamma$$

#### قانون کسینوس ها در مثلث

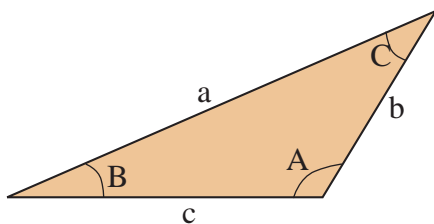
علائم:

a؛ ضلع روبروی زاویه A یا برآیند اضلاع دیگر،

c و b؛ اضلاع مجاور زاویه A،

A؛ زاویه داخلی مثلث نیروها،

$\gamma$ ؛ زاویه خارجی مثلث نیروها یا زاویه بین ضلع b و امتداد ضلع c.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

شکل ۲۶ ▲

#### قانون سینوس ها در مثلث

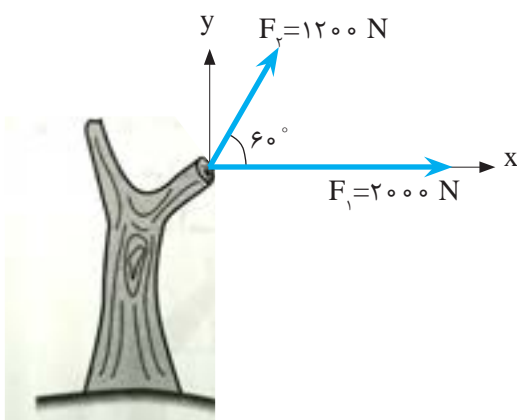
علائم:

A و B و C؛ زوایای داخلی مثلث نیروها،

a؛ ضلع مقابل زاویه A،

b؛ ضلع مقابل زاویه B،

c؛ ضلع مقابل زاویه C.



دو نیروی غیر متعامد بر تنه درختی مطابق شکل وارد می شوند. مطلوب است:

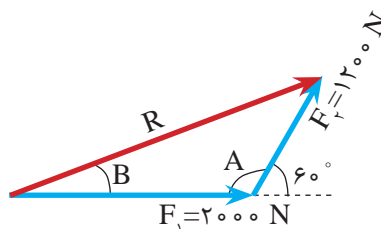
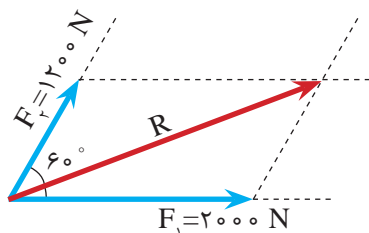
الف) محاسبه مقدار برآیند.

ب) محاسبه زاویه برآیند با افق.

مثال ۸



**حل:** ابتدا با استفاده از قانون متوازی الاضلاع مقدار و جهت برآیند را به صورت ترسیمی تعیین می‌کنیم و سپس با استفاده از قانون کسینوس‌ها و یا سینوس‌ها مقدار دقیق برآیند و زاویه آن را با افق محاسبه می‌کنیم.



الف- با استفاده از قانون کسینوس‌ها داریم:

$$A = 180 - 60 = 120^\circ$$

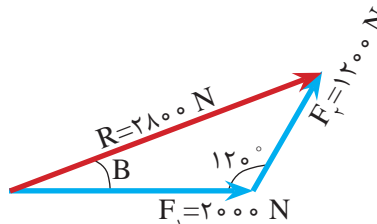
$$R^2 = 2000^2 + 1200^2 - 2 \times 2000 \times 1200 \times \cos 120 = 7840000$$

$$R = \sqrt{7840000} = 2800 \text{ N}$$

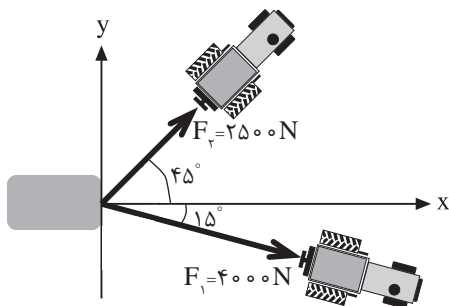
ب- با استفاده از قانون سینوس‌ها داریم:

$$\frac{2800}{\sin 120} = \frac{1200}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{1200}{2800} \times \sin 120$$

$$\sin B = 0.371 \Rightarrow B = \sin^{-1}(0.371) = 21.787^\circ$$



زاویه برآیند با  $F_1$  یا افق  $B = \sin^{-1}(0.371) = 21.787^\circ$



دو نیرو مطابق شکل توسط دو کابل بر یک سنگ معدنی وارد می‌شود. مطلوب است:

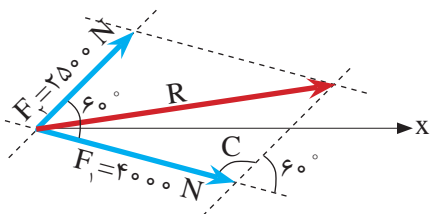
- نمایش برداری برآیند
- نمایش ترسیمی بردار برآیند
- محاسبه اندازه بردار برآیند
- محاسبه زاویه برآیند با افق
- ترسیم مسیر جابه‌جایی سنگ

مثال ۹



حل:

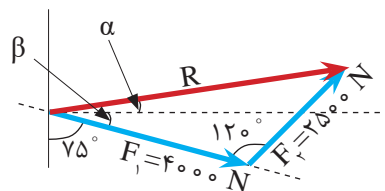
الف) با استفاده از قانون کسینوس ها داریم:



$$C = 180 - 60 = 120^\circ$$

$$R^2 = 4000^2 + 2500^2 - 2 \times 4000 \times 2500 \times \cos 120 = 32250000$$

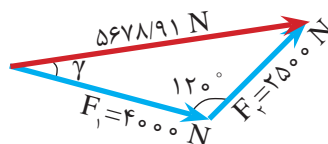
$$R = 5678/91 \text{ N}$$



ب) با استفاده از قانون سینوس ها داریم:

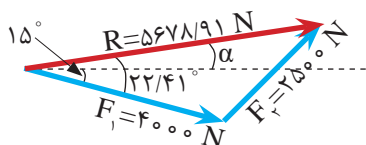
$$\frac{5678/91}{\sin 120} = \frac{2500}{\sin \gamma}$$

$$\Rightarrow \sin \gamma = \frac{2500}{5678/91} \times \sin 120 = 0/381$$



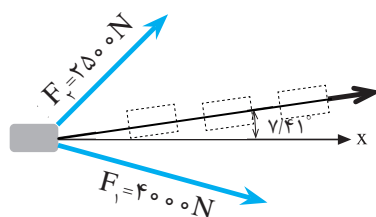
زاویه نیروی  $F_1$  با برآیند  $\gamma = 22/411^\circ$

زاویه برآیند با افق به طریق زیر به دست می آید.



$$\alpha = 22/411 - 15 = 7/41^\circ$$

ج)

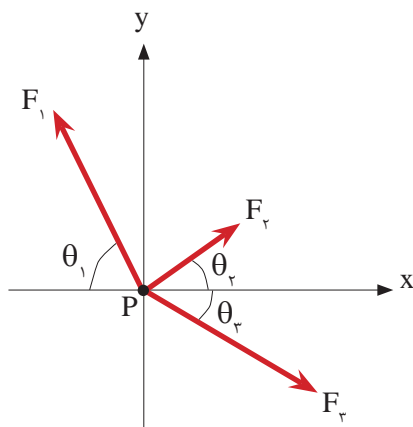


مسیر جابه جایی سنگ

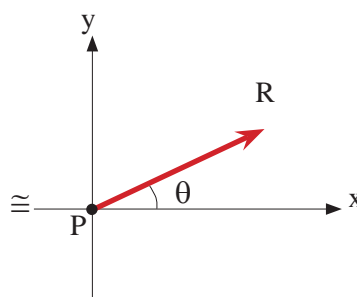


### ۱-۱۵-۴- محاسبه برآیند سامانه چندنیروی وارد به نقطه مادی

هر گاه بر یک نقطه مادی مانند P مطابق شکل (۲۷-الف) نیروهای  $F_1$  و  $F_2$  و  $F_3$  وارد شود، به کمک تجزیه به شرح زیر می توان اندازه برآیند این نیروها ( $R$ ) و راستای برآیند با محور  $x$  یعنی ( $\theta$ ) را تعیین نمود. شکل (۲۷-ب)



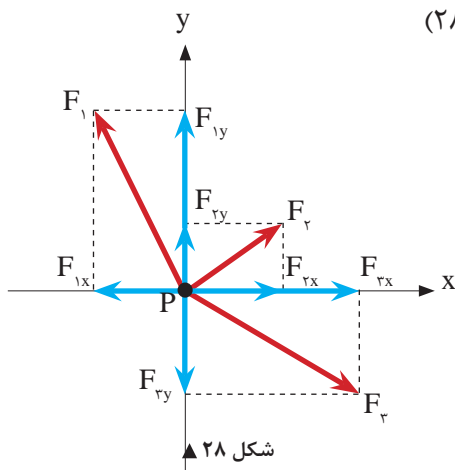
(الف)



(ب)

▲ شکل ۲۷

گام اول: تجزیه هر یک از نیروها روی محورهای  $x$  و  $y$ ; (شکل ۲۸)



▲ شکل ۲۸

گام دوم: نمایش برداری تمامی نیروها بر حسب بردارهای یکه  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$ ؛  
گام سوم: محاسبه جمع جبری نیروهای هم راستا روی محورهای  $x$  و  $y$

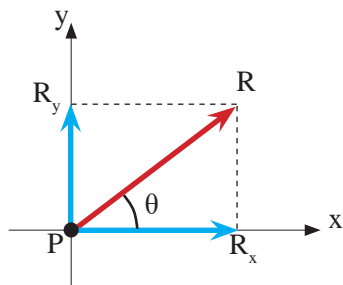
$$R_x = \sum F_x, \quad R_y = \sum F_y \quad (۱۲)$$

$\sum F_x$ : مجموع مؤلفه های هم راستا با محور  $x$  ( $\sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$ )

$\sum F_y$ : مجموع مؤلفه های هم راستا با محور  $y$  ( $\sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$ )

گام چهارم: نمایش برداری بردار برآیند ( $R$ ) مطابق رابطه (۱۱)

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} \quad (۱۳)$$



شکل ۲۹ ▲

گام پنجم: نمایش ترسیمی بردار برآیند مطابق شکل (۲۹)  
گام ششم: محاسبه اندازه (مقدار) برآیند با استفاده از رابطه فیثاغورث

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (۱۴)$$

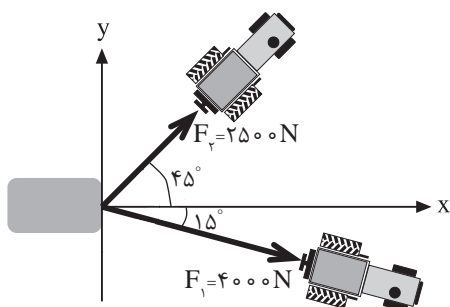
گام هفتم: محاسبه زاویه برآیند با امتداد محور  $x$  ها ( $\theta$ )  
با استفاده از رابطه تانژانت و با توجه به شکل ترسیم شده

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right| \quad (۱۵)$$

مثال ۱۰



دو نیرو مطابق شکل توسط دو کابل بر یک سنگ معدنی وارد می شود. مطلوب است:



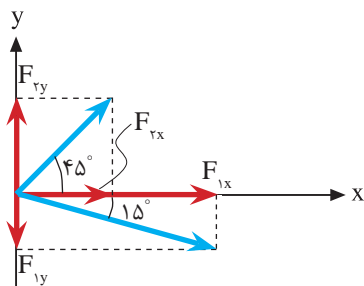
- الف) نمایش برداری برآیند
- ب) نمایش ترسیمی بردار برآیند
- ج) محاسبه اندازه بردار برآیند
- د) محاسبه زاویه برآیند با افق
- ه) ترسیم مسیر جابه جایی سنگ

حل:

الف)

گام اول:

- تجزیه نیروها با توجه به اندازه و زاویه هر نیرو

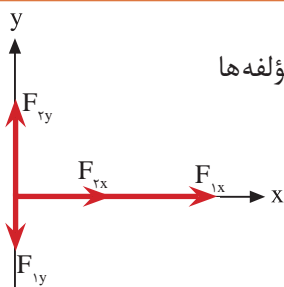


$$\text{مؤلفه های } F_1 \begin{cases} F_{1x} = F_1 \cos \theta_1 = 4000 \times \cos 15^\circ \Rightarrow F_{1x} = 3863/70 \text{ N} \\ F_{1y} = F_1 \sin \theta_1 = 4000 \times \sin 15^\circ \Rightarrow F_{1y} = 1035/28 \text{ N} \end{cases}$$

$$\text{مؤلفه های } F_2 \begin{cases} F_{2x} = F_2 \cos \theta_2 = 2500 \times \cos 45^\circ \Rightarrow F_{2x} = 1767/77 \text{ N} \\ F_{2y} = F_2 \sin \theta_2 = 2500 \times \sin 45^\circ \Rightarrow F_{2y} = 1767/77 \text{ N} \end{cases}$$

گام دوم:

- فرم برداری هر بردار با توجه به شکل مقابل و جهت هر یک از مؤلفه‌ها



$$\vec{F}_1 = 3863/70 \vec{i} - 1035/28 \vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = 1767/77 \vec{i} + 1767/77 \vec{j}$$

گام سوم:

- تعیین مجموع نیروهای هم‌راستا با محورهای  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{y}$  ( $\Sigma F_x$  و  $\Sigma F_y$ )

$$R_x = \Sigma F_x = 1767/77 + 3863/70 \Rightarrow R_x = 5631/47 \text{ N}$$

$$R_y = \Sigma F_y = 1767/77 - 1035/28 \Rightarrow R_y = 732/49 \text{ N}$$

گام چهارم:

- نمایش برداری بردار برآیند

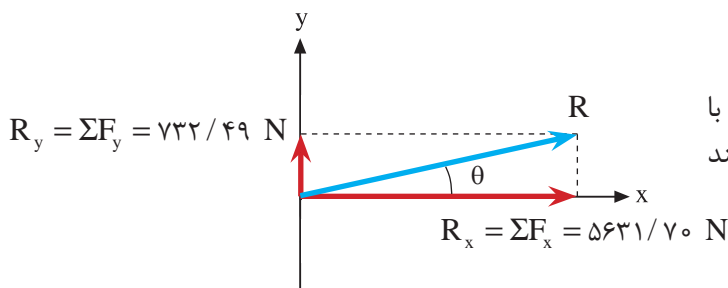
$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$$

$$\vec{R} = 5631/47 \vec{i} + 732/49 \vec{j}$$

(ب)

گام پنجم:

- نمایش ترسیمی بردار برآیند با توجه به فرم برداری بردار برآیند و روش متوازی‌الاضلاع



(ج)

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \Rightarrow R = \sqrt{5631/47^2 + 732/49^2}$$

گام ششم:

- محاسبه اندازه برآیند به کمک رابطه (۷-۳)

$$\Rightarrow R = 5678/91 \text{ N}$$

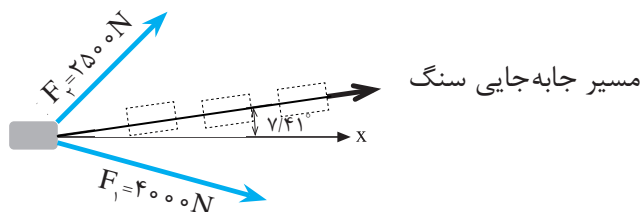
(د)

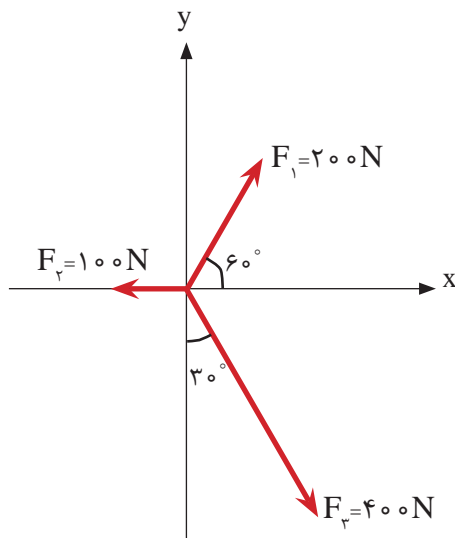
گام هفتم:

- محاسبه زاویه برآیند با محور  $\mathbf{x}$  ها به کمک رابطه (۸-۳)

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right| \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left| \frac{732/49}{5631/47} \right| \Rightarrow \theta = 7/41^\circ$$

(ه) مسیر جابه‌جایی سنگ در راستای بردار برآیند مطابق شکل زیر خواهد بود.





- در شکل روبه‌رو مطلوب‌است:
- الف - محاسبه مقدار برآیند نیروها
- ب - محاسبه زاویه برآیند با افق
- ج - ترسیم بردار برآیند
- د - نمایش برداری بردار برآیند

حل:

الف) تجزیه هر یک از نیروها با توجه به روابط  $F_x = F \cos \theta$  ,  $F_y = F \sin \theta$  و زاویه هر نیرو با محور  $x$  ها:

$$\vec{F}_1 = 200 \cos 60^\circ \vec{i} + 200 \sin 60^\circ \vec{j} = 100 \vec{i} + 173/2 \vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = -100 \vec{i}$$

$$\vec{F}_3 = 400 \cos 60^\circ \vec{i} - 400 \sin 60^\circ \vec{j} = 200 \vec{i} - 346/4 \vec{j}$$

$$R_x = \Sigma F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$

$$R_x = \Sigma F_x = 100 - 100 + 200 \Rightarrow R_x = 200 \text{ N}$$

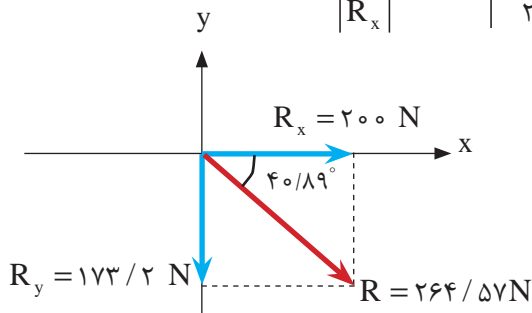
$$R_y = \Sigma F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$

$$R_y = \Sigma F_y = 173/2 + 0 - 346/4 \Rightarrow R_y = -173/2 \text{ N}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{200^2 + (-173/2)^2} \Rightarrow \boxed{R = 264/57 \text{ N}}$$

(ب)

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{-173/2}{200} \right| \Rightarrow \boxed{\theta = 40/89^\circ}$$



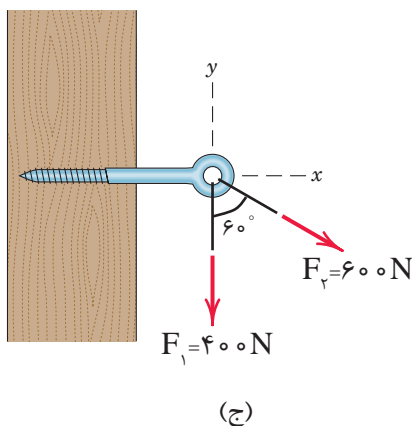
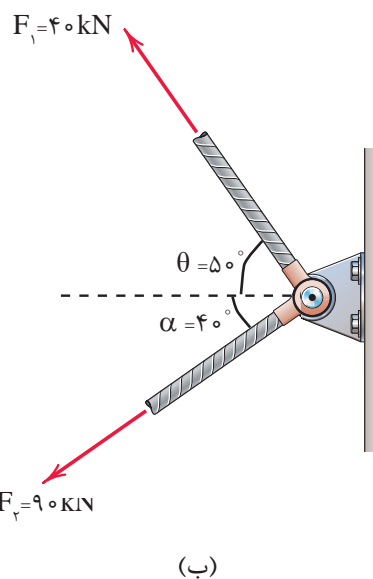
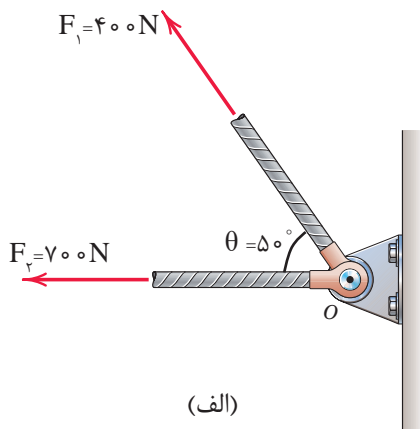
(ج)

$$\vec{R} = 200 \vec{i} - 173/2 \vec{j}$$

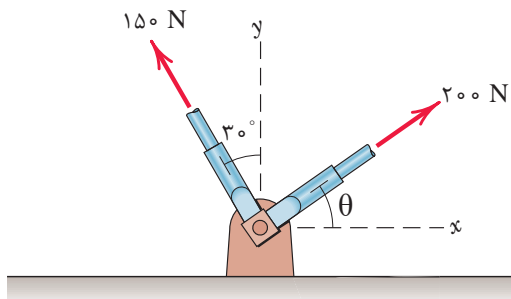
(د)



در شکل‌های زیر مطلوب‌است:  
الف) محاسبه مقدار برآیند دو نیرو  
ب) محاسبه زاویه برآیند با  $F_1$   
ج) محاسبه زاویه برآیند با امتداد افق

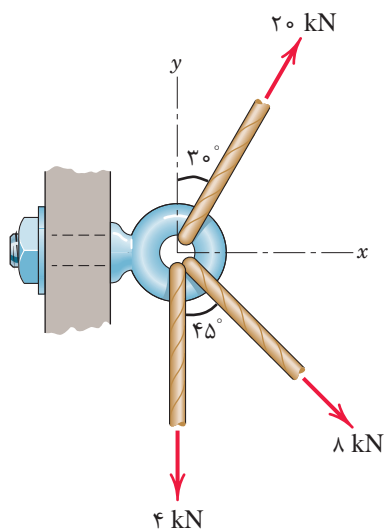


در شکل زیر مقدار زاویه  $\theta$  را چنان تعیین نمایید که برآیند دو نیرو بر محور  $y$  ها منطبق گردد. سپس در این حالت مقدار برآیند را محاسبه کنید.  
(راهنمایی: از روش تجزیه به مؤلفه‌های متعامد استفاده شود).

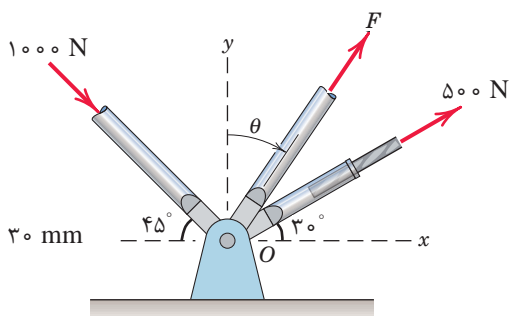




در شکل روبه‌رو مطلوب است:  
الف) محاسبه مقدار برآیند نیروها  
ب) محاسبه زاویه برآیند با افق  
ج) ترسیم بردار برآیند  
د) نمایش برداری بردار برآیند

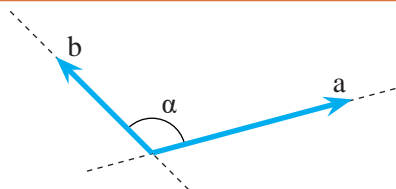


۴- در شکل زیر نیروی  $F$  و زاویه  $\theta$  را طوری تعیین نمایید که برآیند نیروها روی محور افق و مقدار آن برابر  $1500 \text{ N}$  در جهت مثبت باشد.



## واحد‌یادگیری ۲ کاربرد ضرب بردارها

### ۲-۱- ضرب بردارها



شکل ۱

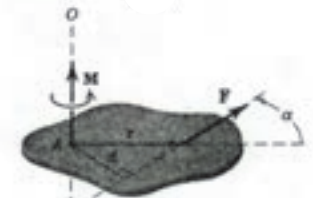
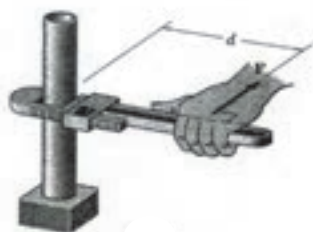
ضرب بردارها  $\left\{ \begin{array}{l} \text{ضرب نقطه‌ای (داخلی)} \\ \text{ضرب برداری (خارجی)} \end{array} \right.$

ضرب داخلی یا ضرب نقطه‌ای: در شکل مقابل دو بردار  $a$  و  $b$  با زاویه بین  $\alpha$  خواهیم داشت:

$$a \cdot b = |a| \times |b| \times \cos \alpha$$

منظور از  $|a|$  مقدار بردار  $\vec{a}$  می‌باشد.

حاصلضرب داخلی دو بردار، یک عدد می‌باشد.



شکل ۲

ضرب خارجی یا ضرب برداری:  $\vec{a} \times \vec{b}$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |a| \times |b| \times \sin \alpha$$

حاصلضرب برداری دو بردار، برداری است که عمود بر صفحه گذرنده از دو بردار بوده و جهت آن مطابق قانون دست راست تعریف می‌شود. (شکل ۲)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$

در ضرب داخلی یا نقطه‌ای خاصیت جابه‌جایی وجود دارد. یعنی:  
اما در ضرب خارجی یا برداری دو بردار، خاصیت جابه‌جایی وجود ندارد. یعنی:

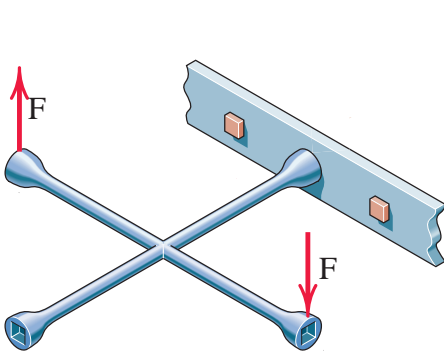
نکته



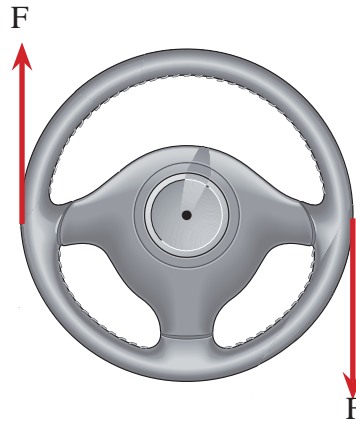
## ۲-۲- گشتاور، لنگر (مُمان)

یکی از اثرات نیرو بر اجسام تمایل به ایجاد چرخش در آن‌ها می‌باشد که به این پدیده گشتاور گفته می‌شود.

مطابق شکل‌های (۳) و (۴) نیرو باعث چرخش در اجسام می‌گردد.



شکل ۴ ▲



شکل ۳ ▲

### ۲-۲-۱- گشتاور نیرو

در شکل a-۵ گشتاور نیروی  $F$  که باعث چرخش میله می‌گردد، حاصلضرب برداری دو بردار  $\vec{r}$  (بردار مکان یا موقعیت) و بردار نیروی  $F$  می‌باشد. (شکل b-۵). یعنی:

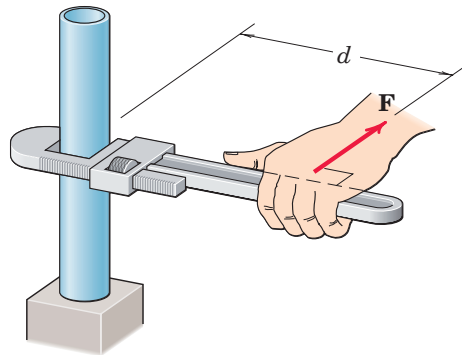
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

مطابق تعریف

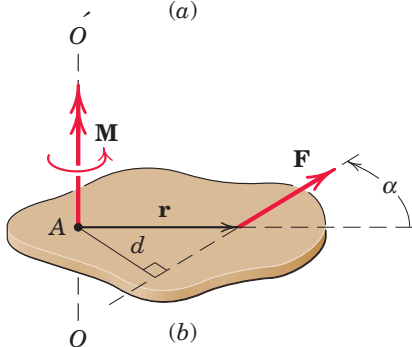
$$|M| = |F| \cdot |r| \cdot \sin \alpha$$

$$M = F \cdot d$$

در این رابطه  $F$  مقدار نیرو،  $d$  کوتاه‌ترین فاصله  $F$  تا نقطه‌ای که میله حول آن به چرخش درمی‌آید (فاصله عمود بر امتداد نیرو تا نقطه  $O$ ) می‌باشد. در این پودمان به دلیل بررسی نیروها در صفحه، گشتاور حول نقطه در نظر گرفته می‌شود لذا امتداد آن عمود بر صفحه و جهت چرخش آن در جهت عقربه‌های ساعت  $\curvearrowright$  و یا خلاف عقربه‌های ساعت  $\curvearrowleft$  خواهد بود.



(a)



(b)

شکل ۵ ▲

**قرارداد:** در این پودمان جهت چرخش عقربه‌های ساعت مثبت فرض می‌شود.

نکته

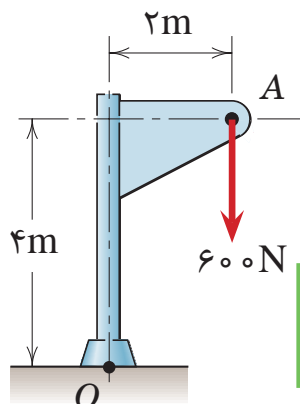




مثال ۱



گشتاور نیروی  $F$  حول نقطه  $O$  را محاسبه و جهت چرخش آن را بنویسید.



$$F = 600 \text{ N}$$

$$d = 2 \text{ m}$$

$$M_o = F \cdot d \Rightarrow M_o = 600 \times 2 \Rightarrow M_o = 1200 \text{ N.m} \quad \text{ساعت گرد}$$

حل:

## ۲-۳- گشتاور چند نیرو

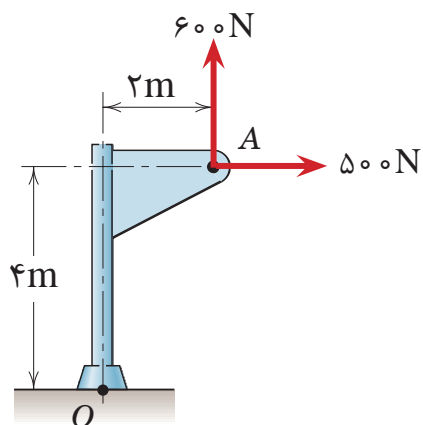
اگر به یک جسم چند نیرو اعمال شود گشتاور آن‌ها نسبت به یک نقطه برابر است با مجموع جبری گشتاور هر نیرو نسبت به آن نقطه یعنی:

$$M_o = \sum_{i=1}^n F_i d_i = F_1 d_1 + F_2 d_2 + \dots + F_n d_n$$

مثال ۲



در شکل زیر گشتاور نیروهای نشان داده شده را حول نقطه  $O$  محاسبه کنید و جهت آن را بنویسید.



$$F_1 = 500 \text{ N}$$

$$d_1 = 4 \text{ m}$$

$$F_2 = 600 \text{ N}$$

$$d_2 = 2 \text{ m}$$

$$M_o = F_1 d_1 + F_2 d_2$$

$$M_o = 500 \times 4 - 600 \times 2$$

$$M_o = +800 \text{ N.m} \quad \text{ساعت گرد}$$

حل:

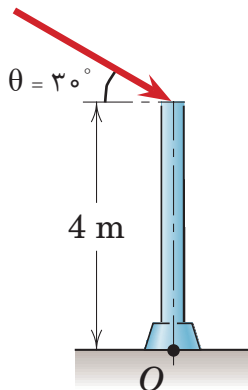
## ۲-۴- قضیه وارینون

گشتاور برآیند چند نیرو حول یک نقطه معین برابر است با مجموع گشتاورهای آن‌ها حول همان نقطه و یا گشتاور یک نیرو حول هر نقطه برابر است با مجموع گشتاورهای مؤلفه‌های آن نیرو حول همان نقطه. کاربرد این قضیه در مثال (۳) نشان داده شده است.

مثال ۳



$$F = 600 \text{ N}$$



گشتاور نیروی  $F$  را در شکل زیر به دو روش حساب کنید:

الف) با استفاده از تعریف گشتاور

ب) به کمک قضیه وارینون

حل:

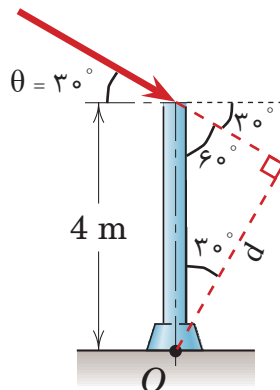
الف) با استفاده از تعریف:

ابتدا با استفاده از روابط مثلثاتی در مثلث

قائم‌الزاویه بازوی لنگر یعنی (d) را محاسبه

می‌نمائیم؛ داریم:

$$F = 600 \text{ N}$$



$$\cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{d}{4} \Rightarrow d = 4 \times \cos 30^\circ \Rightarrow d = 3.46 \text{ m}$$

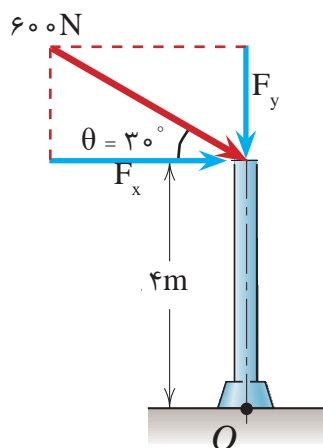
$$M_o = F \cdot d \Rightarrow M_o = 600 \times 3.464 \Rightarrow \boxed{M_o = 2078.4 \text{ N.m}}$$

ب) با استفاده از قضیه وارینون

در این روش ابتدا نیروی  $F$  را به دو مؤلفه متعامد تجزیه نموده و گشتاور آن‌ها را نسبت به نقطه  $O$  محاسبه و با یکدیگر جمع می‌نمائیم.

$$F_x = F \cdot \cos \theta \Rightarrow F_x = 600 \times \cos 30^\circ \Rightarrow F_x = 519.61 \text{ N}$$

$$F_y = F \cdot \sin \theta \Rightarrow F_y = 600 \times \sin 30^\circ \Rightarrow F_y = 300 \text{ N}$$



با توجه به شکل بازوی لنگر  $F_x$  برابر ۴ متر و چون امتداد مؤلفه  $F_y$  از نقطه  $O$  می‌گذرد، بازوی لنگر آن صفر است. بنابراین خواهیم داشت:

$$M_o = \sum_{i=1}^n F_i d_i \Rightarrow M_o = F_x d_x + F_y d_y$$

$$M_o = F_x \times 4 + F_y \times 0 = 519 / 61 \times 4$$

$$M_o = 2078 / 44 \text{ N.m}$$

هرگاه امتداد یک نیرو از یک نقطه بگذرد گشتاور آن نیرو نسبت به آن نقطه صفر است.

نکته



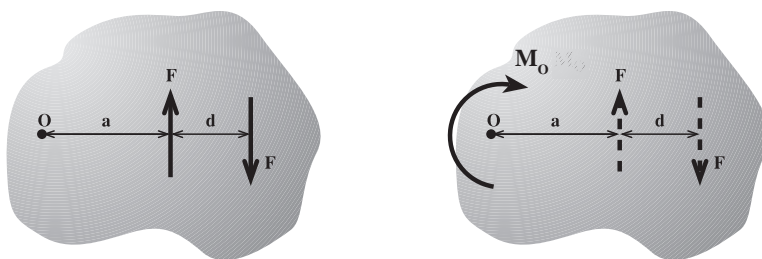
## ۲-۵- زوج نیرو

به دو نیروی مساوی - موازی و مختلف‌الجهت زوج نیرو گفته می‌شود.

### ۲-۵-۱- خصوصیات زوج نیرو

- ۱- برآیند زوج نیرو صفر است؛
- ۲- در اجسام ایجاد گشتاور (چرخش) می‌نماید؛
- ۳- گشتاور زوج نیرو نسبت به هر نقطه دلخواه مقداری است ثابت و برابر است با حاصل ضرب مقدار یک نیرو در فاصله بین آن‌ها. (شکل ۶)

$$M = F.d$$



شکل ۶ ▲

چگونه می‌توان به کمک گشتاورگیری نسبت به یک نقطه دلخواه مانند  $O$  در شکل (۶) خصوصیت سوم زوج نیرو را اثبات کرد.

تحقیق کنید



#### مثال ۴



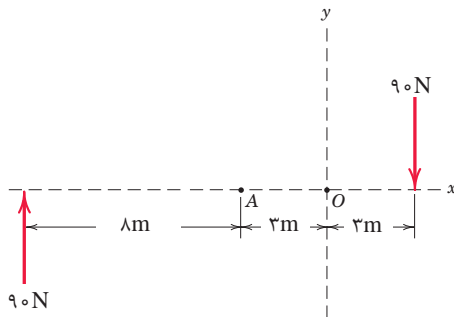
در شکل روبه‌رو مطلوب است محاسبه گشتاور دو نیروی ۹۰ نیوتنی:

الف) حول نقطه A

ب) حول نقطه O

ج) با استفاده از خاصیت زوج نیرو

حل:



$$M_A = 90 \times 8 + 90 \times 6 = 1260 \text{ N.m} \quad \text{الف)}$$

$$M_O = 90 \times 11 + 90 \times 3 = 1260 \text{ N.m} \quad \text{ب)}$$

$$M = F.d = 90 \times 14 = 1260 \text{ N.m} \quad \text{ج)}$$

#### نکته



#### جمع بندی نکات پودمان ۱ (تحلیل مکانیک برداری):

- نیرو کمیتی است برداری که باعث حرکت، تغییر شکل و یا چرخش اجسام می‌گردد.
- انواع نیرو عبارتند از: نیروهای خارجی، نیروهای داخلی.
- منظور از برآیند دو یا چند نیرو عبارت است از نیرویی که به تنهایی اثر همه نیروها را در خود داشته باشد.

- برای تعیین برآیند چند نیرو از روش تجزیه به مؤلفه‌های متعامد استفاده می‌شود و مقدار برآیند از رابطه

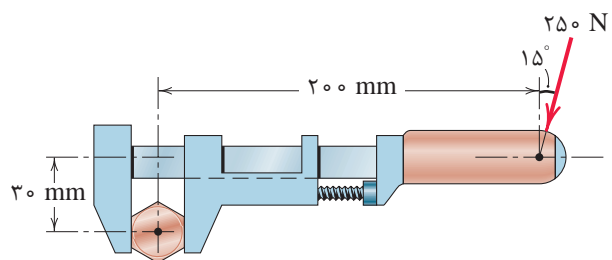
$$R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2}$$

و زاویه برآیند با محور x ها از رابطه  $\theta = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right|$  به دست می‌آید.

- گشتاور یک نیرو نسبت به یک محور عبارت است از حاصل ضرب نیرو (F) در کوتاه‌ترین فاصله نیرو تا آن محور (d). و از رابطه  $M = F.d$  به دست می‌آید.
- قضیه وارینون: گشتاور برآیند چند نیرو حول یک نقطه معین برابر است با مجموع گشتاورهای آنها حول همان نقطه.

- به دو نیروی مساوی، موازی و مختلف‌الجهت زوج نیرو گفته می‌شود.
- گشتاور زوج نیرو برابر است با حاصل ضرب یکی از نیروها در فاصله بین آنها.

فعالیت  
کلاسی ۱

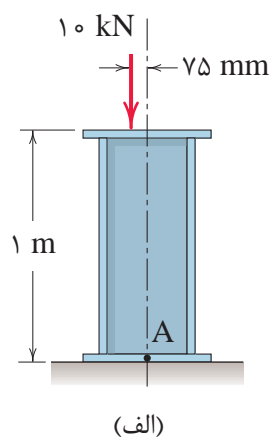
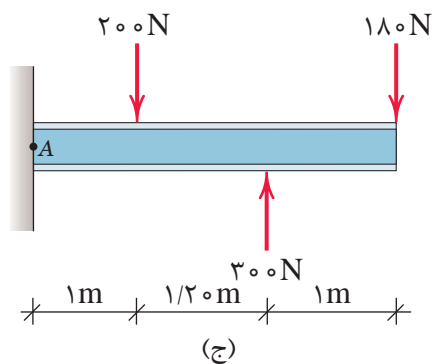
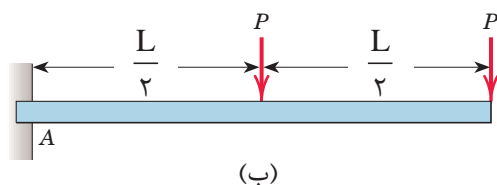


در شکل روبه‌رو گشتاور نیروی  $250^\circ$  نیوتنی را حول مرکز پیچ محاسبه نموده و جهت گشتاور را تعیین نمایید.

فعالیت  
کلاسی ۲



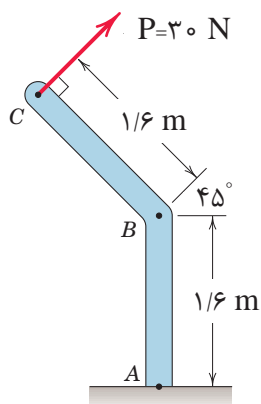
در شکل‌های زیر گشتاور نیرو را حول نقطه A محاسبه نمایید.

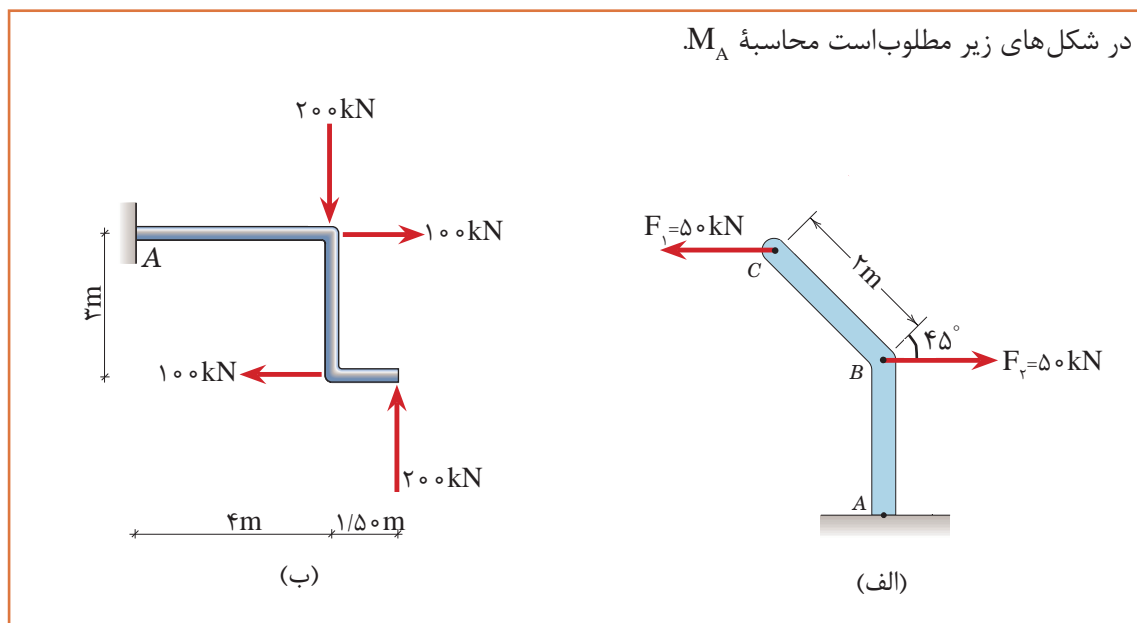


فعالیت  
کلاسی ۳



گشتاور نیروی P حول نقطه A و B را به دست آورید.





## ارزشیابی

ارزشیابی در این درس براساس شایستگی است. برای هر پودمان یک نمره مستمر (از ۵ نمره) و یک نمره شایستگی پودمان (نمرات ۱، ۲ یا ۳) با توجه به استانداردهای عملکرد جدول ذیل برای هر هنرجو ثبت می‌گردد. امکان جبران پودمان‌های در طول سال تحصیلی برای هنرجویان و بر اساس برنامه ریزی هنرستان وجود دارد.

### الگوی ارزشیابی پودمان تحلیل مکانیک برداری

نمره	استاندارد (شاخص‌ها، داوری، نمره‌دهی)	نتایج	استاندارد عملکرد	تکالیف عملکردی (شایستگی‌ها)
۳	تجزیه بردارها روی محورهای مختلف به روش ترسیمی و محاسباتی، محاسبه برآیند سیستم‌های چندنیروی و محاسبه گشتاور نیروها	بالاتر از حد انتظار	برآیند و گشتاور دو یا چند نیرو را به کمک ماشین حساب و روابط هندسی و مثلثاتی به‌دست آورد.	کاربرد جمع بردارها
۲	محاسبه جمع و ضرب بردارها به کمک روابط هندسی و مثلثاتی	در حد انتظار (کسب شایستگی)		کاربرد ضرب بردارها
۱	نمایش جمع و ضرب بردارها به صورت ترسیمی	پایین‌تر از حد انتظار (عدم احراز شایستگی)		
	نمره مستمر از ۵			
	نمره شایستگی پودمان از ۳			
	نمره پودمان از ۲۰			