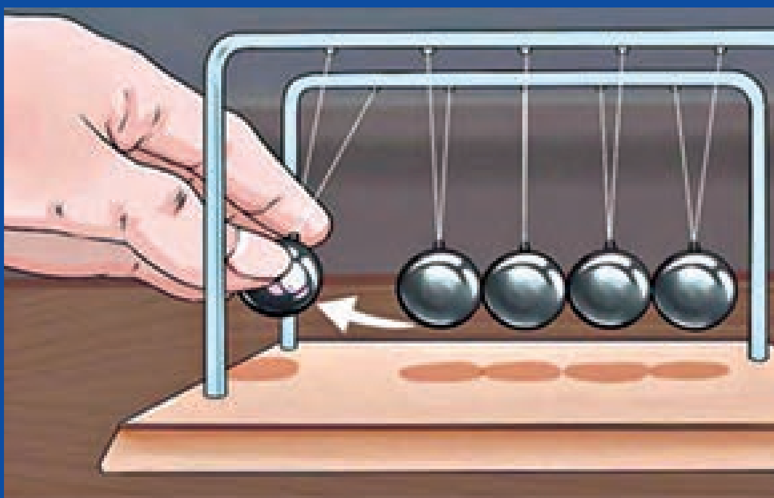
پودمان سوم

مقایسه حدهای یک‌طرفه و دوطرفه و پیوستگی تابع‌ها



اکثر تغییرات کمیت‌ها در طبیعت به‌صورت تدریجی و پیوسته انجام می‌شوند. اما در برخی موارد به نظر می‌رسد این تغییرات ناگهانی و ناپیوسته هستند. برای مثال، سرعت حرکت آونگی که در شکل بالا دیده می‌شود در برخی زمان‌ها به‌طور ناگهانی کم یا زیاد می‌شود. اگر آونگ سمت چپ را به بالا بریم و رها کنیم، سرعت آونگ به‌طور تدریجی و پیوسته افزایش می‌یابد، اما با برخورد با آونگ ساکن، به یکباره آونگ سمت چپ می‌ایستد و سرعت آونگ صفر می‌شود. پس از مدتی، مجدداً با برگشت انرژی، این آونگ سرعت می‌گیرد و این حرکت تکرار می‌شود.

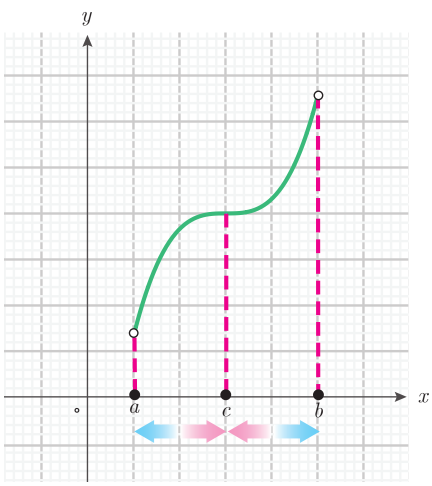
در این مثال، کمیت سرعت آونگ در برخی نقاط تغییرات دفعی و ناپیوسته دارد و در نقاط دیگر تغییرات تدریجی و پیوسته دارد.

۱ـ حدهای یک‌طرفه و دوطرفه

حمید به هنگام محاسبهٔ حد برخی تابع‌ها به نکتهٔ خاصی پی برد.

حمید پرسید: برای محاسبهٔ حد برخی تابع‌ها در یک نقطه مانند a، می‌توان متغیر x را هم با مقادیر بزرگ‌تر از a و هم با مقادیر کوچک‌تر از آن به a نزدیک کرد. وقتی در محاسبهٔ حد یکی از این تابع‌ها متغیر x را با مقادیر کوچک‌تر از a به آن نزدیک کردم، مقادیر تابع به عدد ۵ نزدیک شدند. ولی وقتی متغیر x را با مقادیر بزرگ‌تر از a به آن نزدیک کردم، مقادیر تابع به عدد ۲ نزدیک شدند. در چنین وضعیتی، حد تابع در a کدام مقدار خواهد بود؟

دبیر گفت: جواب سؤال شما را خواهم داد؛ ولی قبل از صحبت کردن دربارهٔ این وضعیت‌ها، بهتر است این حالت‌ها را نام‌گذاری کنیم. وضعیت نقطهٔ حدگیری نسبت به دامنهٔ یک تابع سه حالت می‌تواند داشته باشد. فرض کنید تابعی در بازهٔ $(a\ ,\ b)$ تعریف شده باشد و c نقطه‌ای از دامنهٔ تابع باشد.



حالت (۱): اگر نقطهٔ حدگیری a باشد، از نقاط دامنهٔ تابع، فقط با مقادیر بزرگ‌تر از a می‌توان به a نزدیک شد.
در این حالت، مقادیر متغیر، فقط سمت راست a خواهند بود. به همین دلیل برای مشخص کردن نوع حدگیری، این نوع حدگیری را **حد یک‌طرفهٔ راست** می‌نامند.

حالت (۲): اگر نقطهٔ حدگیری b باشد، از نقاط دامنهٔ تابع، فقط با مقادیر کوچک‌تر از b می‌توان به b نزدیک شد.
در این حالت، مقادیر متغیر، فقط سمت چپ b خواهند بود. به همین دلیل برای مشخص کردن نوع حدگیری، این نوع حدگیری را **حد یک‌طرفهٔ چپ** می‌نامند.

حالت (۳): اگر نقطهٔ حدگیری c باشد، از نقاط دامنهٔ تابع، هم با مقادیر بزرگ‌تر و هم با مقادیر کوچک‌تر از c می‌توان به c نزدیک شد. یعنی دامنهٔ تابع دو طرف نقطهٔ c را در بردارد.
در این حالت، مقادیر متغیر در دو طرف c خواهند بود. به همین دلیل برای مشخص کردن نوع حدگیری، این نوع حدگیری را **حد دوطرفه** می‌نامند.

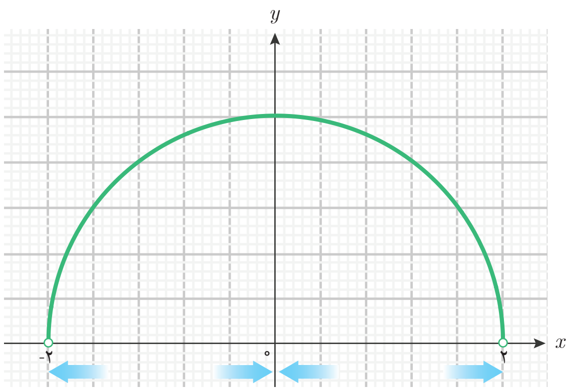
حمید گفت: پس، آن حدی که من بررسی کردم، یک حد دوطرفه بوده است. در حدهای دوطرفه، اگر یک‌بار متغیر را فقط از چپ و یک بار متغیر را فقط از راست به نقطهٔ حدگیری نزدیک کنیم، ممکن است مقادیر تابع به اعداد متفاوتی نزدیک شوند. دربارهٔ این اعداد چه باید بگوییم؟

دبیر گفت: در حدهای دوطرفه در یک نقطه، اگر متغیر را فقط از سمت چپ به آن نقطه نزدیک کنیم و حدی برای مقادیر تابع به‌دست آوریم، آن را حد چپ تابع در آن نقطه می‌نامند. به طور مشابه، اگر متغیر را فقط از سمت راست به آن نقطه نزدیک سازیم و حدی برای مقادیر تابع به‌دست آوریم، آن را حد راست تابع در آن نقطه می‌نامند. روشن است که اگر این دو مقدار مساوی نباشند، مقادیر تابع به عدد خاصی نزدیک نشده‌اند و باید بگوییم تابع در این نقطه حد ندارد. اما اگر این دو مقدار مساوی باشند، می توانیم بگوییم تابع در این نقطه حد دارد و حد آن همان مقدار یکسان حد چپ و حد راست در آن نقطه است.

مثال ۱

چگونگی حد تابع $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ با دامنهٔ (۲ , ۲-) را از لحاظ یک‌طرفهٔ چپ و یک‌طرفهٔ راست و دوطرفه بودن، در نقاط ۲ و ۲- و صفر بررسی کنید.

حد این تابع در نقطهٔ ۲-، یک حد یک‌طرفهٔ راست است، زیرا از نقاط دامنهٔ این تابع، فقط از راست می‌توان به ۲- نزدیک شد. اما حد این تابع در نقطهٔ ۲، یک حد یک‌طرفه چپ است. زیرا، از نقاط دامنهٔ این تابع، فقط از چپ می‌توان به ۲ نزدیک شد. حد این تابع در نقطهٔ صفر، یک حد دوطرفه است؛ زیرا از نقاط دامنهٔ این تابع، از دو طرف می‌توان به صفر نزدیک شد.



فرض کنید حدگیری یک تابع f در یک نقطهٔ a دوطرفه باشد. اگر با نزدیک شدن مقادیر x (در دامنهٔ f) از سمت چپ به a، مقادیر $f(x)$ به عدد $L_۱$ نزدیک شوند، عدد $L_۱$ را حد چپ f در a می‌نامند و با نماد $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ نشان می‌دهند. این نماد به‌صورت «حد چپ f در a» یا «حد $f(x)$ وقتی x از چپ به a میل می‌کند» خوانده می‌شود.

به‌طور مشابه، اگر با نزدیک شدن مقادیر x (در دامنهٔ f) از سمت راست به a، مقادیر $f(x)$ به عدد $L_۲$ نزدیک شوند، عدد $L_۲$ را حد راست f در a می‌نامند و با نماد $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ نشان می‌دهند. این نماد نیز به صورت «حد راست f در a» یا «حد $f(x)$ وقتی x از راست به a میل می‌کند» خوانده می‌شود.

شرط وجود حد دوطرفه در یک نقطه، وجود حد چپ و حد راست در آن نقطه و تساوی این حدهاست. مقدار یکسان این حدها، همان حد تابع در آن نقطه است.

رابطهٔ حدهای دوطرفه با حد چپ و حد راست در یک نقطه

فرض کنید حدگیری f در نقطهٔ a یک حد دوطرفه باشد. وجود حد f در a معادل با آن است که حد چپ و حد راست f در a موجود و مساوی هستند، یعنی:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

مقدار L، همان حد دوطرفهٔ f در a است.

مثال ۲

حد چپ و حد راست تابع زیر را (در صورت وجود) در نقطهٔ ۴ به‌دست آورید. آیا این تابع در ۴ حد دارد؟

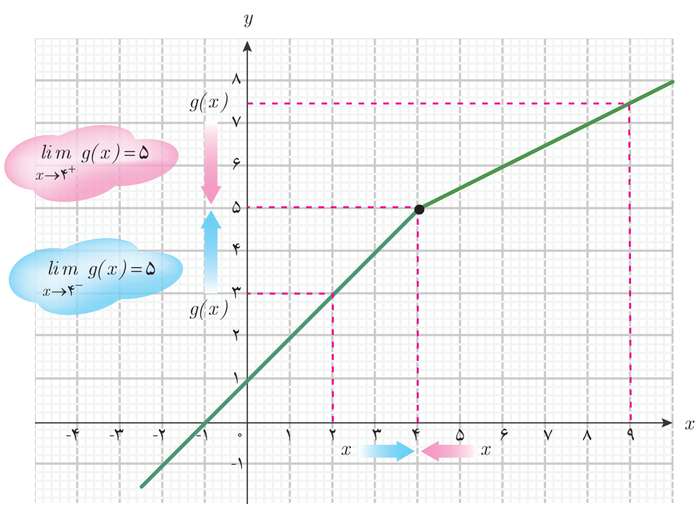
$$g(x) = \begin{cases} x+۱ & x \leq ۴ \\ \frac{x}{۲}+۳ & ۴ < x \end{cases}$$

با توجه به اینکه قانون تابع در دو طرف ۴ با هم متفاوت است، حد چپ و حد راست در ۴ را جداگانه محاسبه می‌کنیم. قانون این تابع در سمت چپ ۴ به صورت $x+۱$ و در سمت راست ۴ به صورت $\frac{x}{۲}+۳$ است. بنابراین:

$$\lim_{x\to ۴^-} g(x) = \lim_{x\to ۴^-} (x+۱) = ۵$$

$$\lim_{x\to ۴^+} g(x) = \lim_{x\to ۴^+} (\frac{x}{۲}+۳) = ۵$$

ملاحظه می‌شود حد چپ و حد راست در ۴ مساوی هستند، این تابع در ۴ حد دارد و حد آن عدد ۵ است. نمودار این تابع نیز نشان می‌دهد که با نزدیک شدن متغیر از چپ و از راست به ۴ ، مقادیر تابع به ۵ نزدیک می‌شوند.



مثال ۳

حد چپ و حد راست تابع زیر را (در صورت وجود) در نقطهٔ ۳ به‌دست آورید. آیا تابع در ۳ حد دارد؟

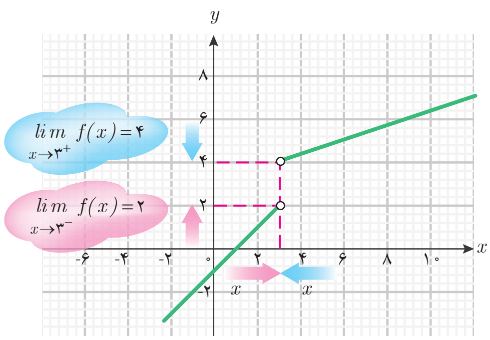
$$f(x)=\begin{cases} x-۱ & x<۳ \\ \dfrac{x}{۳}+۳ & ۳<x \end{cases}$$

قانون این تابع در سمت چپ ۳ به صورت $x-۱$ و در سمت راست ۳ به صورت $\frac{x}{۳}+۳$ است. بنابراین:

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x)=\lim_{x\to ۳^-}(x-۱)=۲$$

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x)=\lim_{x\to ۳^+}(\frac{x}{۳}+۳)=۴$$

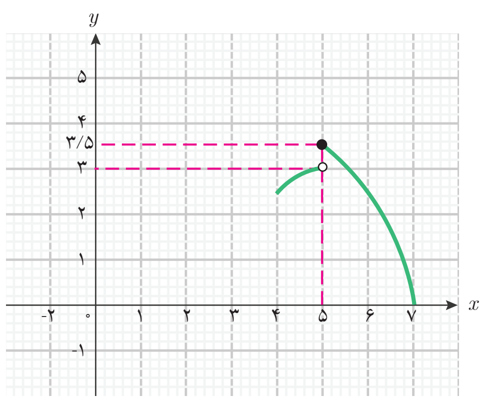
با توجه به اینکه حد چپ و حد راست در ۳ مساوی نیستند، این تابع در ۳ حد ندارد. نمودار تابع، تفاوت حد چپ و حد راست در نقطهٔ ۳ را نشان می‌دهد.



مثال ۴

تابع f را با نمودار روبه‌رو در نظر بگیرید. حد چپ و حد راست و وجود حد این تابع را در نقطهٔ $x=۵$ بررسی کنید.

نمودار نشان می‌دهد که وقتی از سمت راست روی محور طول‌ها به ۵ نزدیک می‌شویم، مقدار تابع روی محور عرض‌ها به ۳/۵ نزدیک می‌شود. اما، وقتی از سمت چپ روی محور طول‌ها به ۵ نزدیک می‌شویم،



مقدار تابع روی محور عرض‌ها به ۳ نزدیک می‌شود. بنابراین، این تابع در ۵ حد ندارد ولی حد چپ و حد راست دارد.

$$\lim_{x\to ۵^-} f(x) = ۳$$

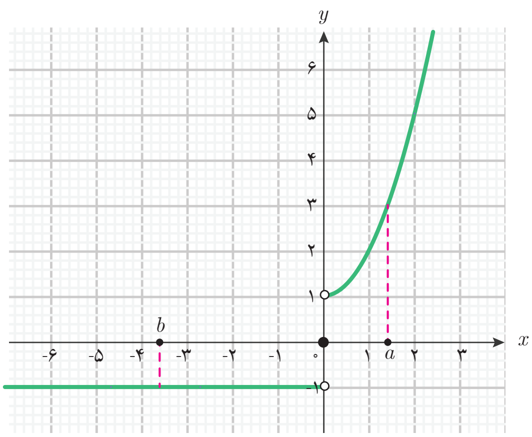
$$\lim_{x\to ۵^+} f(x) = ۳/۵$$

مثال ۵

تابع S را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و قانون زیر در نظر بگیرید.

$$S(x) = \begin{cases} -۱ & x < ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ x^۲ + ۱ & ۰ < x \end{cases}$$

وضعیت حد این تابع را در نقاط ۲، صفر و ۲- تعیین کنید و بیان کنید این تابع در چه نقاطی حد دارد و در چه نقاطی حد ندارد؟



نمودار این تابع مانند شکل روبه‌رو است. اعداد نزدیک نقطهٔ ۲ مثبت هستند و قانون تابع در نزدیک ۲ به صورت $x^۲ + ۱$ است. بنابراین:

$$\lim_{x\to ۲} S(x) = \lim_{x\to ۲} (x^۲ + ۱) = ۵$$

به طور کلی، اگر a یک عدد مثبت باشد، اعداد نزدیک a نیز مثبت خواهند بود و قانون تابع S در نزدیک a به صورت $x^۲ + ۱$ است. پس تابع S در a حد دارد و حد آن برابر $a^۲ + ۱$ است.

اعداد نزدیک نقطهٔ ۲- منفی هستند و قانون تابع در نزدیک ۲- به صورت $S(x) = -۱$ است. بنابراین:

$$\lim_{x\to -۲} S(x) = \lim_{x\to -۲} (-۱) = -۱$$

به طور کلی، اگر b یک عدد منفی باشد، اعداد نزدیک b نیز منفی خواهند بود و تابع S در نزدیک b به صورت تابع ثابت $S(x) = -۱$ است. پس تابع S در b حد دارد و حد آن برابر ۱- است.

اما قانون تابع S در دو طرف صفر با هم متفاوت است. حد چپ و حد راست این تابع را در صفر بررسی

می‌کنیم. در سمت چپ صفر، S تابع ثابت ۱- است. اما، در سمت راست صفر، قانون S به‌صورت $x^۲+۱$ است. پس:

$$\lim_{x\to ۰^-} S(x) = \lim_{x\to ۰^-} (-۱) = -۱$$

$$\lim_{x\to ۰^+} S(x) = \lim_{x\to ۰^+} (x^۲+۱) = ۱$$

با توجه به مساوی نبودن حد چپ و حد راست در صفر، تابع S در صفر حد ندارد.

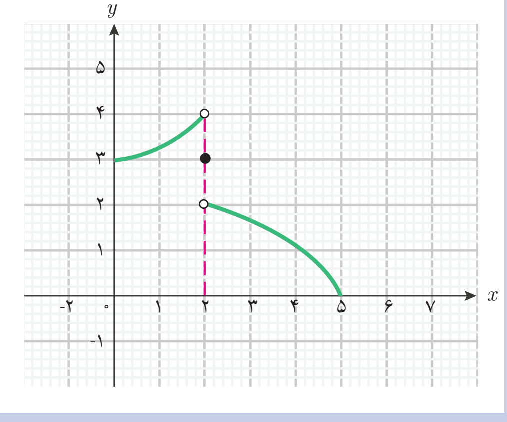
کار در کلاس ۱

تابع‌های زیر را در نظر بگیرید. با بررسی حد چپ و حد راست در نقاط داده شده، وجود حد در این نقاط را بررسی کنید.

الف) $f(x) = \begin{cases} x^۲ + x & x < ۰ \\ ۱ - x & ۰ < x \end{cases}$ در $x = ۰$.

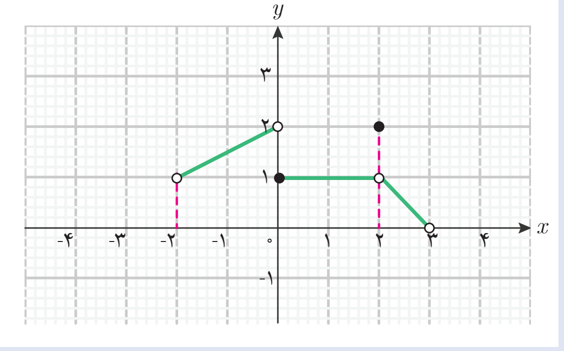
ب) $g(x) = \begin{cases} ۲x - x^۲ & x < ۱ \\ ۵ & x = ۱ \\ ۵x^۲ - ۴x & ۱ < x \end{cases}$ در $x = ۱$.

پ) تابع h با نمودار روبه‌رو در $x = ۲$.



مسائل

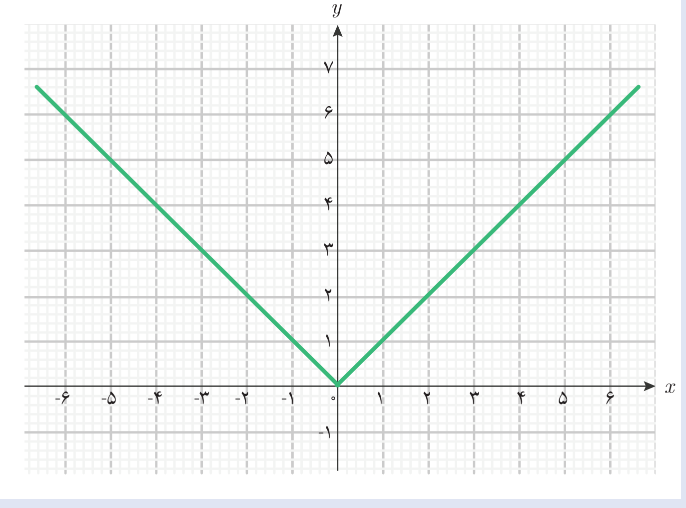
۱ نمودار یک تابع به‌صورت زیر داده شده است. وجود حد این تابع را در نقاط ۲- ، صفر، ۲ و ۳ بررسی کنید.



۲ آیا تابع زیر در $x = ۲$ حد دارد؟

$$g(x) = \begin{cases} ۲ - x^{۲} & x \leq ۲ \\ x - ۴ & ۲ < x \end{cases}$$

۳ نمودار تابع $f(x) = |x|$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ به شکل زیر است. آیا این تابع در صفر حد دارد؟ حد آن را در صورت وجود بیابید.



۴ تابع دو ضابطه‌ای زیر را در نظر بگیرید.

$$g(x)=\begin{cases} ax+۲ & x<-۱ \\ x^{۲}+a & -۱<x \end{cases}$$

الف) آیا این تابع در نقطهٔ $x=-۱$ حد چپ و حد راست دارد؟

ب) a را به گونه‌ای تعیین کنید که این تابع در نقطهٔ $x=-۱$ حد داشته باشد.

۵ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنهٔ آن بازهٔ $[۰ , ۵]$ باشد و حد چپ و حد راست در نقطهٔ $x=۴$ آن با هم متفاوت باشند.

۶ تابعی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ معرفی کنید که حد چپ آن در نقطهٔ ۲ برابر ۱- و حد راست آن در نقطهٔ ۲، برابر ۵ باشد.

۷ تابعی دو ضابطه‌ای بنویسید که در صفر حد راست داشته باشد، ولی در صفر حد چپ نداشته باشد.

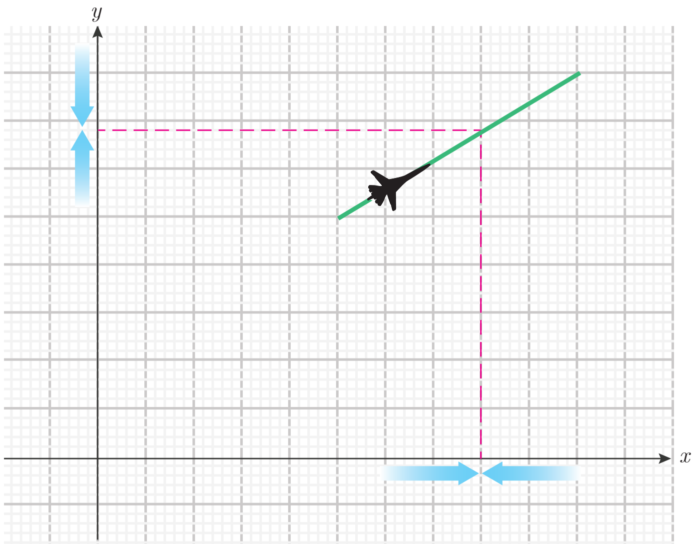
۲ـ پیوستگی تابع‌ها

امروز، حمید سؤال جالب توجهی را مطرح کرد.

حمید گفت: در مسئلهٔ یافتن ارتفاع هواپیما در لحظهٔ اصابت موشک، به دلیل آنکه آن لحظه در دامنهٔ تابع نبود ما ناچار بودیم از حدگیری استفاده کنیم. اما، در لحظه‌هایی که ارتفاع هواپیما را داریم، اگر از حدگیری استفاده کنیم، آیا همان ارتفاع هواپیما در آن لحظه‌ها به‌دست می‌آید؟

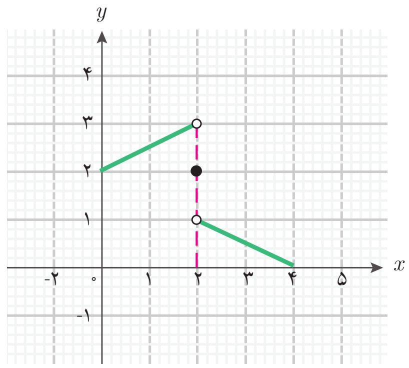
سعید گفت: من فکر می‌کنم، وقتی ارتفاع هواپیما را در یک لحظهٔ خاص بدانیم، به حدگیری نیازی نداریم. اما اگر از روش محاسبهٔ حد استفاده کنیم، مگر ممکن است عدد دیگری به‌دست آید؟

دبیر گفت: به‌دلیل پیوستگی حرکت هواپیما، حدِ تابع ارتفاعِ هواپیما در هر لحظه، همان ارتفاعِ هواپیما در همان لحظه (یعنی، مقدار تابع در آن نقطه) می‌باشد.

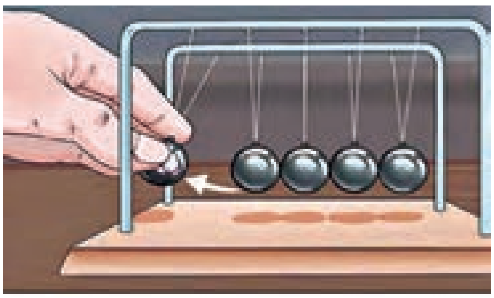


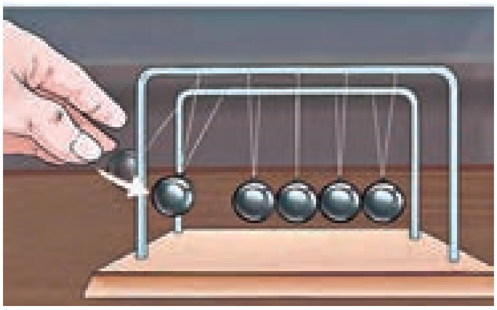
حمید گفت: آیا چنین وضعیتی برای همهٔ تابع‌ها برقرار است؟

دبیر گفت: خیر، در حالت کلی این طور نیست. تابع‌هایی که تغییرات آنها تدریجی نیست بلکه دفعی و ناگهانی است، این خاصیت را ندارند. برای مثال تابعی را با نمودار صفحهٔ بعد در نظر بگیرید.



این تابع در نقطهٔ $x = ۲$ حد ندارد ولی حد چپ و حد راست دارد که با هم متفاوت هستند. تابع در این نقطه تغییرات دفعی دارد و مقدار تابع برابر حد چپ یا حد راست نیست.





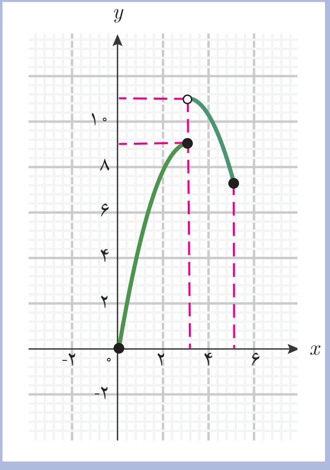
به عنوان مثال، آونگی را به شکل روبه‌رو در نظر بگیرید که از چند آونگی که با هم در تماس هستند، تشکیل شده است.

آونگ سمت چپ را بالا برده و رها می‌کنیم. سرعت این آونگ تابعی از زمان است. آونگ در ابتدا سرعت می‌گیرد ولی با برخورد به آونگ بعدی به یکباره می‌ایستد و تا مدتی ساکن می‌ماند. با انتقال حرکت، ناگهان مجدداً سرعت می‌گیرد و به بالاترین ارتفاع می‌رسد. در آنجا توقف لحظه‌ای می‌کند و دوباره به‌سمت پایین سرعت می‌گیرد و مجدداً در برخورد با آونگ بعدی به یکباره می‌ایستد. این حرکت به تعداد زیاد تکرار می‌شود. سرعت آونگ در لحظات برخورد با آونگ بعدی تغییرات دفعی دارد و سرعت آونگ به یکباره صفر می‌شود.

برای دیدن وضعیت تابع‌هایی که تغییرات دفعی دارند و نمودار آنها گسستگی دارد و وضعیت تابع‌هایی که تغییرات تدریجی دارند و نمودار آنها پیوستگی دارد، فعالیت صفحه بعد را انجام دهید.

فعالیت ۱

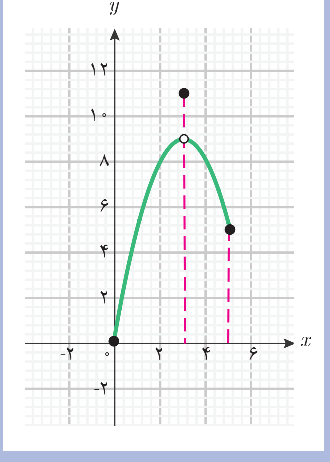
۱ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-x^{2}+6x & 0\le x\le 3\\ -x^{2}+6x+2 & 3<x\le 5\end{cases}$ با دامنهٔ $[0\ ,5]$ در زیر رسم شده است.



الف) از روی نمودار تابع، حد چپ، حد راست و حد این تابع را در نقطهٔ $x=3$ بررسی کنید.

ب) وضعیت پیوستگی نمودار این تابع در نقطهٔ $x=3$ چگونه است؟

۲ نمودار تابع $g(x)=\begin{cases}-x^{2}+6x & x\neq 3\\ 11 & x=3\end{cases}$ با دامنهٔ $[0\ ,5]$ در زیر رسم شده است.

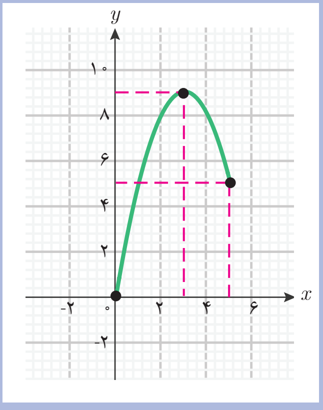


الف) از روی نمودار تابع، حد این تابع را در نقطهٔ $x=3$ بررسی کنید.

ب) آیا حد تابع در این نقطه با مقدار تابع در این نقطه، مساوی است؟

پ) وضعیت پیوستگی نمودار این تابع در نقطهٔ $x=3$ چگونه است؟

$\boxed{۳}$ نمودار تابع $h(x) = -x^۲ + ۶x$ با دامنهٔ $[۰ , ۵]$ در زیر رسم شده است.



الف) از روی نمودار تابع، حد این تابع در نقطهٔ $x = ۳$ را بررسی کنید.

ب) آیا حد تابع در این نقطه با مقدار تابع در این نقطه، مساوی است؟

پ) وضعیت پیوستگی نمودار این تابع در نقطهٔ $x = ۳$ چگونه است؟

در این فعالیت، وضعیت سه تابع را از لحاظ پیوستگی نمودار و حد تابع در یک نقطه بررسی کردید. مشاهده می‌کنیم که وقتی حد تابع در یک نقطه وجود ندارد (وضعیت ۱) یا اگر وجود دارد، مقدار حد با مقدار تابع در آن نقطه مساوی نیست (وضعیت ۲)، نمودار تابع در آن نقطه دارای گسستگی است. اما در وضعیتی که حد تابع در یک نقطه موجود است و با مقدار تابع در آن نقطه مساوی است (وضعیت ۳)، نمودار تابع در آن نقطه گسستگی ندارد. در چنین وضعیتی می‌گویند تابع **در آن نقطه پیوسته** است. به طور کلی، تعریف پیوستگی یک تابع به شکل زیر است.

تعریف

پیوستگی تابع

تابع f و یک نقطهٔ a از دامنهٔ آن را در نظر بگیرید. می‌گوییم تابع f در نقطهٔ a پیوسته است، هرگاه حد f در a موجود باشد و $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. در غیر این صورت می‌گوییم تابع f در نقطهٔ a **ناپیوسته** است.

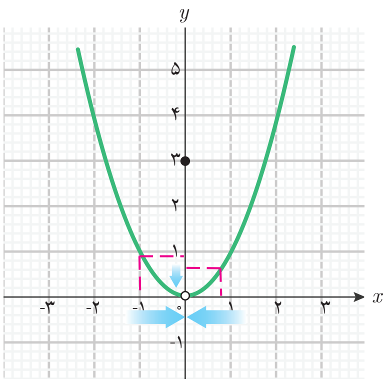
اگر تابعی در همهٔ نقاط دامنهٔ خود پیوسته باشد، آن را تابعی **پیوسته** می‌نامند.

اکثر پدیده‌های طبیعی پیوستگی دارند و تابع‌هایی که برای توصیف آنها به‌کار می‌بریم پیوسته می‌باشند.

مثال ۶

تابع f را با قانون زیر و دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید و پیوستگی آن را در نقاط $x=۰$ و $x=۲$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\neq ۰ \\ ۳ & x=۰ \end{cases}$$



حد این تابع در $x=۰$ برابر صفر است، اما $f(۰)=۳$.
بنابراین، این تابع در صفر ناپیوسته است.
نقاط نزدیک ۲ ناصفر هستند و قانون تابع f برای نقاط نزدیک ۲ همان $x^{۲}$ است؛ بنابراین:

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=\lim_{x\to ۲} x^{۲}=۲^{۲}=۴$$

از طرف دیگر $f(۲)=۲^{۲}=۴$، بنابراین

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=f(۲)$$

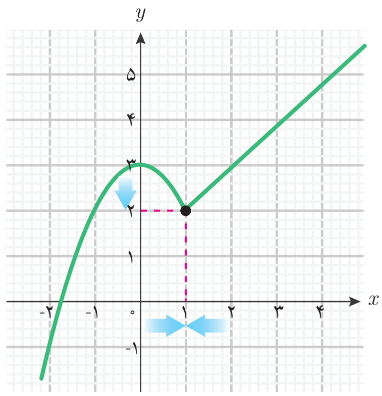
یعنی تابع f در نقطهٔ ۲ پیوسته است.

مثال ۷

تابع g را با قانون زیر و دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. پیوستگی تابع را در نقطهٔ $x=۱$ بررسی کنید.

$$g(x)=\begin{cases} ۳-x^{۲} & x\leq ۱ \\ x+۱ & ۱<x \end{cases}$$

مقدار این تابع در $x=۱$ برابر ۲ می‌باشد، زیرا $g(۱)=۳-۱^{۲}=۲$.
از آنجا که قانون تابع در دو طرف ۱ با هم متفاوت است، حد چپ و حد راست این تابع را در $x=۱$ جداگانه بررسی می‌کنیم.



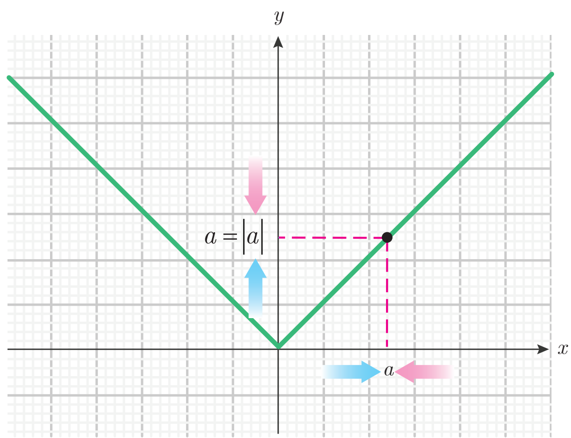
$$\lim_{x\to ۱^+} g(x) = \lim_{x\to ۱^+} (۱+x) = ۱+۱ = ۲$$

$$\lim_{x\to ۱^-} g(x) = \lim_{x\to ۱^-} (۳-x^۲) = ۳-۱^۲ = ۲$$

حد چپ و حد راست در نقطهٔ $x = ۱$ وجود دارند و با هم مساوی هستند، پس حد تابع در این نقطه موجود است و همان عدد ۲ است. مقدار تابع در این نقطه نیز ۲ می‌باشد. بنابراین، تابع در این نقطه پیوسته است.

مثال ۸

آیا تابع $f(x) = |x|$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ پیوسته است؟



باید برابری حد این تابع و مقدار تابع را در همهٔ نقاط بررسی کنیم. در این مثال می‌توانیم در سه حالتِ مثبت و منفی و صفر بودنِ اعداد، پیوستگی را بررسی کنیم.

اگر a یک عدد مثبت باشد، xهای (به اندازه کافی) نزدیک a نیز مثبت هستند. بنابراین:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} |x| = \lim_{x\to a} x = a$$

با توجه به مثبت بودن a داریم: $f(a) = |a| = a$

در نتیجه $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

اگر a یک عدد منفی باشد، xهای (به اندازه کافی) نزدیک a نیز منفی هستند و در نتیجه مقادیر $f(x)$ برابر $-x$ هستند. بنابراین:

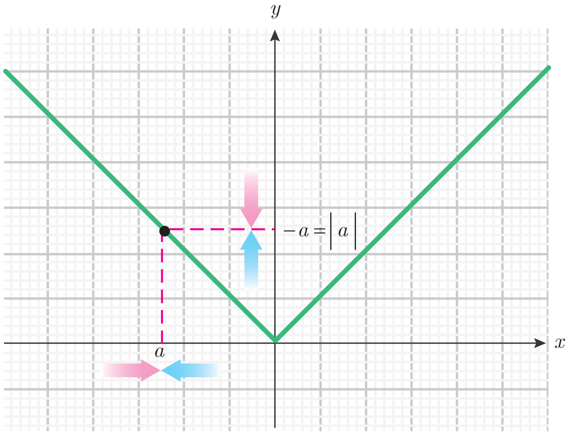
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} |x| = \lim_{x\to a} (-x) = -a$$

با توجه به منفی بودن a داریم $f(a)=|a|=-a$. بنابراین $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

اگر $a = ۰$، حد چپ و حد راست این تابع در صفر، برابر صفر است، بنابراین:

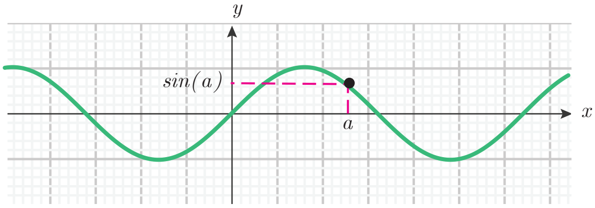
$$\lim_{x\to ۰} |x| = ۰ = |۰|$$

به این ترتیب، حد تابع $|x|$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در همهٔ نقاط مثبت و منفی و صفر برابر مقدار تابع در آن نقاط است و این تابع، پیوسته است.

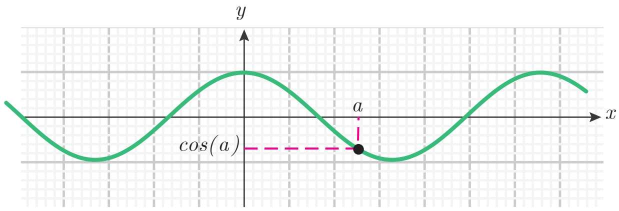


بسیاری از تابع‌هایی که می‌شناسیم پیوسته هستند. برای مثال، تابع‌های چندجمله‌ای، تابع‌های $\sin x$ و $\cos x$، تابع نمایی b^x و تابع $\sqrt{x}$ پیوسته هستند. برای هر نقطهٔ a از دامنهٔ این تابع‌ها داریم:

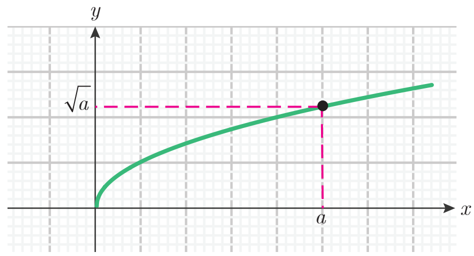
$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$$



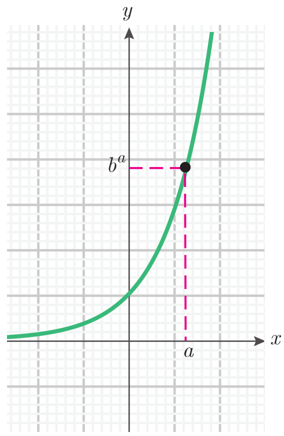
$$\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$$



$$\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$$



$$\lim_{x \to a} b^x = b^a$$



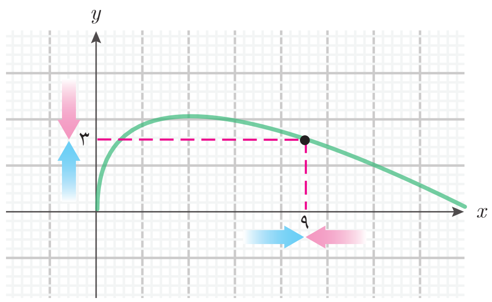
مثال ۹

آیا تابع $g(x) = ۴\sqrt{x} - x$ با دامنهٔ $[۰ , +\infty)$ در نقطهٔ $x = ۹$ پیوسته است؟

مقدار این تابع را در $x = ۹$ به‌دست می‌آوریم. داریم: $g(۹) = ۴\sqrt{۹} - ۹ = ۳$.

$$\lim_{x \to ۹} g(x) = \lim_{x \to ۹} (۴\sqrt{x} - x) = ۴ \lim_{x \to ۹} \sqrt{x} - \lim_{x \to ۹} x = ۴\sqrt{۹} - ۹ = ۳ = g(۹)$$

بنابراین، این تابع در نقطهٔ $x = ۹$ پیوسته است.
محاسبهٔ بالا در هر نقطهٔ دیگر از دامنهٔ این تابع، نتیجهٔ مشابهی دارد یعنی این تابع در همهٔ نقاط دامنهٔ خود پیوسته است.



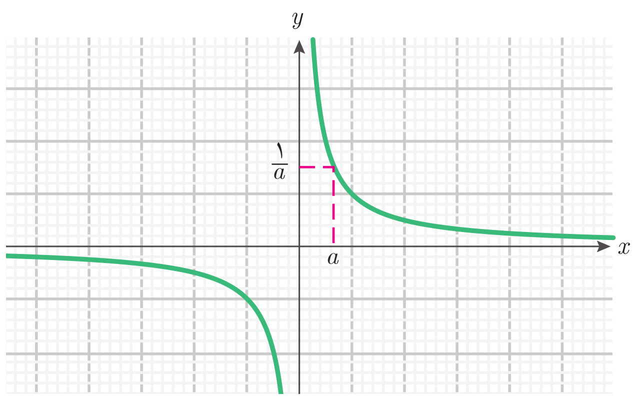
گفتگو

سعید گفت: در کتابی خوانده‌ام که تابع $\frac{۱}{x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R} - \{۰\}$ پیوسته است.

اگر a نقطه‌ای از دامنهٔ این تابع باشد، داریم $a \neq ۰$. با استفاده از حد تقسیم دو تابع داریم:

$$\lim_{x \to a} \frac{۱}{x} = \frac{\lim_{x \to a} ۱}{\lim_{x \to a} x} = \frac{۱}{a}$$

از طرفی مقدار تابع در نقطه a برابر $\frac{۱}{a}$ است. بنابراین، این تابع پیوسته است.



سعید ادامه داد: من فکر می‌کردم نمودار تابع‌های پیوسته نباید گسستگی داشته باشند، اما نمودار این تابع از دو قسمت جدا از هم تشکیل شده است. پس چرا آن را پیوسته می‌نامیم؟

دبیر گفت: ایدهٔ اولیه مفهوم پیوستگی همین است که نمودار تابع‌های پیوسته نباید گسستگی داشته باشند، ولی این ایده در جایی اعتبار دارد که دامنهٔ تابع یک بازه باشد. اگر دامنهٔ یک تابع از اجتماع چند بازهٔ جدا از هم تشکیل شده باشد (مانند تابع $\frac{1}{x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{0\}$)، نمودار تابع نیز از چند قسمت جدا از هم تشکیل خواهد شد. در این حالت گسستگی نمودار تابع به دلیل چند قسمت بودن دامنهٔ آن است. در مثال ذکر شده دامنه، مجموعهٔ $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ است.

سعید پرسید: آیا از روی نمودار تابع‌ها می‌توان پیوستگی آنها را تشخیص داد؟

دبیر گفت: بله. تابع‌های پیوسته آنهایی هستند که نمودارشان در هر بازه از دامنه‌شان پیوستگی داشته باشند.

کار در کلاس ۱

۱) پیوستگی تابع‌های زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید.

الف) $g(t)=\sin t+\cos t$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در $t=\pi$.

ب) $f(x)=\begin{cases} x^2+x & x\leq 0 \\ 2^x-x & 0<x \end{cases}$ در $x=0$.

پ) $h(x)=\sqrt{1-x^2}$ با دامنهٔ $[-1\,,\,1]$ در $x=-1$.

۲) آیا تابع $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ با دامنهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ پیوسته است؟

مسائل

۱ آیا تابع زیر با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در $x = ۱$ پیوسته است؟ نمودار این تابع را رسم کنید.

$$h(x)=\begin{cases} ۱+x^{۲} & x<۱ \\ ۰ & x=۱ \\ ۲x & ۱<x \end{cases}$$

۲ آیا تابع زیر با دامنهٔ $\mathbb{R}$ پیوسته است؟

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x\neq ۰ \\ ۱ & x=۰ \end{cases}$$

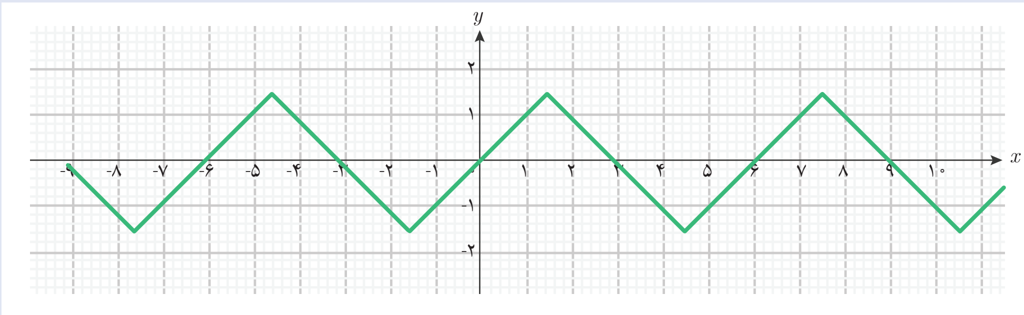
۳ تابع f را با قانون زیر و دامنهٔ $[۰\,,۳]$ در نظر بگیرید. نمودار این تابع را رسم کنید. در چه نقاطی این تابع ناپیوسته است؟ چرا؟

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & ۰\leq x<۱ \\ ۲ & ۱\leq x<۲ \\ ۱ & ۲\leq x\leq ۳ \end{cases}$$

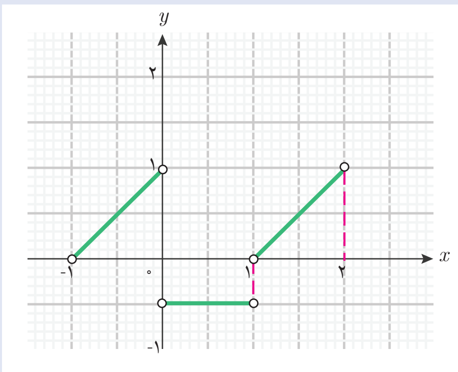
۴ آیا تابع $g(x)=\dfrac{\cos^{۲} x}{۱-\sin x}$ با دامنهٔ $\left(۰,\dfrac{\pi}{۲}\right)$ پیوسته است؟

۵ یک تابع با دامنهٔ $\mathbb{R}$ بنویسید که در صفر ناپیوسته باشد.

۶ نمودار یک تابع با دامنهٔ $\mathbb{R}$ به شکل زیر است. آیا این تابع پیوسته است؟



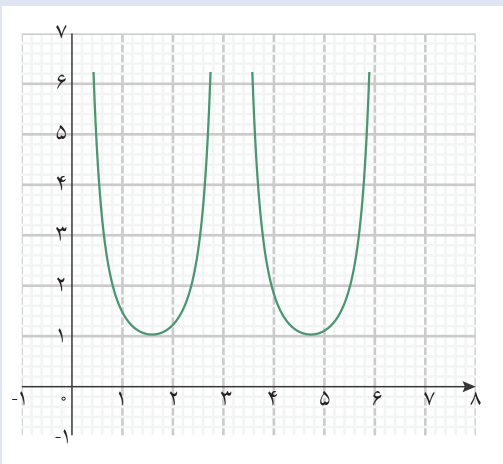
۷ نمودار یک تابع با دامنهٔ $(۱,۲)\cup(۰,۱)\cup(-۱,۰)$ به شکل زیر است. آیا این تابع پیوسته است؟



۸ تابع $f(x)=\dfrac{۱}{\sin^{۲}x}$ با دامنهٔ $(۰,\pi)\cup(\pi,۲\pi)$ را با نمودار روبه‌رو در نظر بگیرید.

الف) آیا f در دامنهٔ خود پیوسته است؟

ب) بدون محاسبه، مقدار حد تابع f در نقطهٔ $x=\dfrac{\pi}{۶}$ را روی شکل نشان دهید.



استانداردهای ارزشیابی پودمان سوم

عنوان پودمان	تکالیف عملکردی (واحدهای یادگیری)	استاندارد عملکردی (کیفیت)	سطوح انتظارات	شاخص تحقق	نمره
پودمان سوم: مقایسهٔ حدهای یک‌طرفه و دوطرفه و پیوستگی تابع‌ها	انجام محاسبهٔ حدهای یک‌طرفه و دوطرفه	حل مسائل مرتبط با تابع‌های پیوسته و ناپیوسته	بالاتر از حد انتظار	□ مدل‌سازی و حل مسائل زندگی واقعی (مسائل حل نشده در کلاس و کتاب درسی) مرتبط با حدهای یک‌طرفه و دوطرفه و پیوستگی تابع‌ها	۳
			حد انتظار	□ حل مسائل مشابه مسائل حل شده در کلاس و کتاب درسی مرتبط با تابع‌های پیوسته و ناپیوسته	۲
	مدل‌سازی وضعیت‌های مسئله‌ای به کمک تابع‌های پیوسته و ناپیوسته		پایین‌تر از حد انتظار	□ درک و کاربرد صحیح مفاهیم و روابط برای تعیین وضعیت و محاسبه حد توابع	۱
نمره مستمر از ۵:					
نمره واحد یادگیری از ۳:					
نمره واحد یادگیری از ۲۰:					