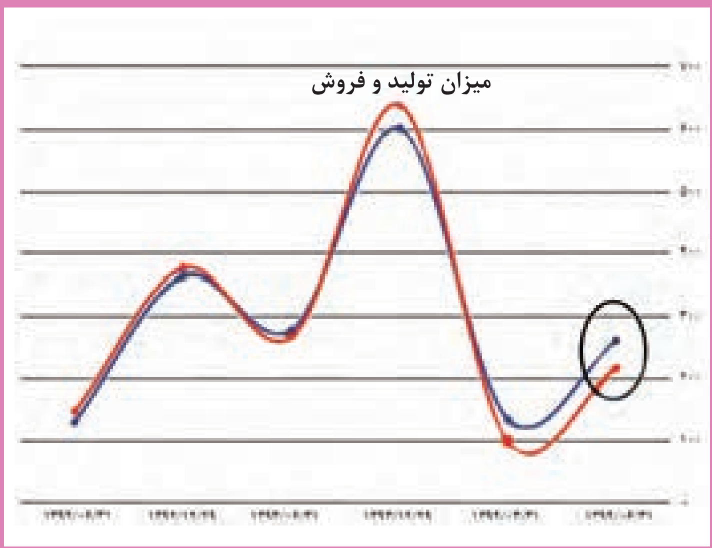
پودمان پنجم

محاسبات مشتق و کاربردها



پیش‌بینی تحولات اقتصادی مانند پیش‌بینی تحولات بازار و قیمت‌ها و سود و زیان کارخانجات و رشد اقتصادی از طریق مدل‌سازی ریاضی اقتصاد با تابع‌ها و مشتق تابع‌ها انجام می‌شود. شاید مهم‌ترین هدف برای هر بنگاه اقتصادی یافتن بیشترین سود و کمترین زیان باشد که عموماً در ارتباط با یافتن مشتق یک تابع و جایی است که مشتق آن تابع صفر می‌شود.

در اقتصاد کمیت‌های بسیاری وجود دارند که سلامت در اقتصاد معادل با آن است که برخی از آنها در طی زمان در حال افزایش و برخی دیگر در حال کاهش باشند. برای مثال، میزان تولیدات یک کشور کمیت مهمی است که انتظار داریم در طول زمان در حال افزایش باشد. میزان بیکاری و فقر نیز کمیت‌هایی هستند که امیدواریم در طی زمان در حال کاهش باشند.

گفتگو

۱ــ محاسبهٔ مشتق تابع‌ها

حمید در ایام تعطیلات با قطار به مسافرت رفته بود. در طول راه، وقتی از پنجرهٔ قطار به بیرون نگاه می‌کرد، با خود فکر کرد: اگر قطار با سرعت ثابتی در حال حرکت باشد و من نیز در راهروی قطار با سرعت ثابتی حرکت کنم، سرعت من نسبت به زمین چقدر خواهد بود؟ بعد از تعطیلات، حمید سؤال خود را در کلاس درس ریاضی مطرح کرد.

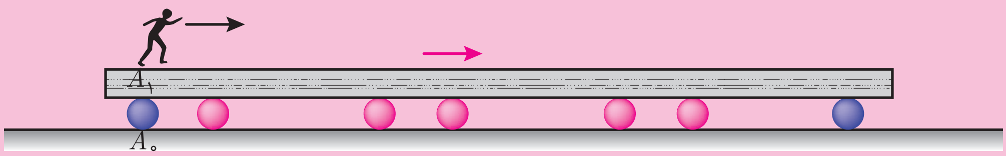
دبیر گفت: می‌دانید که سرعت یک متحرک در هر لحظه با محاسبهٔ مشتق تابع حرکت در آن لحظه به‌دست می‌آید. بنابراین برای یافتن سرعت حرکت یک متحرک نسبت به زمین باید تابع حرکت آن متحرک را نسبت به زمین به‌دست آوریم.

سعید گفت: تابع حرکت حمید نسبت به زمین را چگونه می‌توان به‌دست آورد؟

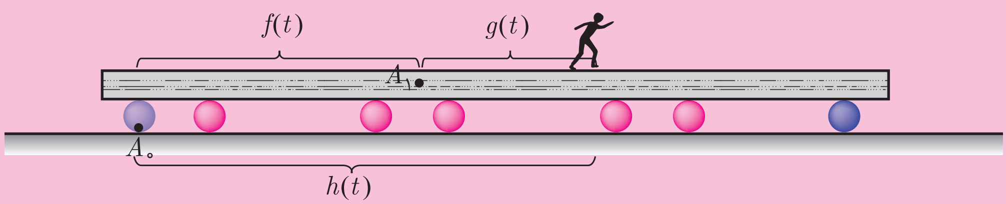
دبیر گفت: بهتر است در یک مثال ساده‌تر این مسئله را بررسی کنیم. در برخی فرودگاه‌ها و اماکن عمومی، پیاده‌روهای متحرکی ساخته‌اند که افراد روی تسمهٔ آنها می‌ایستند و جابه‌جا می‌شوند. در فعالیت زیر با بررسی سرعت فردی که روی چنین تسمه‌ای در حال حرکت است، مسئلهٔ حمید را می‌توانید حل کنید.

فعالیت ۱

فرض کنید تسمهٔ یک پیاده‌روی متحرک، با سرعت ثابت ۳ متر بر ثانیه در حال حرکت باشد و فردی در لحظهٔ $t=0$ در نقطهٔ ثابت A_1 روی تسمه قرار گرفته و با سرعت ثابت ۵۰ سانتی‌متر بر ثانیه در حال راه رفتن باشد. نقطهٔ A_0 محل نصب پایهٔ پیاده‌روی متحرک روی زمین است. در لحظهٔ $t=0$ نقطهٔ A_1 (روی تسمه) و نقطهٔ A_0 (روی زمین) در یک مکان قرار دارند.



تابع حرکت تسمه نسبت به زمین (فاصله A_1 تا A_0) به‌صورت $f(t)=3t$ و تابع حرکت فرد نسبت به پیاده‌روی متحرک (فاصلهٔ فرد تا A_1) به‌صورت $g(t)=\frac{1}{2}t$ است (زمان t برحسب ثانیه و فاصله‌ها برحسب متر هستند). فرض کنید دامنهٔ این دو تابع، بازهٔ زمانی $[0,10]$ باشد. پس از گذشت t ثانیه، وضعیت فرد و تسمه به شکل زیر خواهد بود:



۱ مقادیر $f(0)$ و $g(0)$ چه چیزی را نشان می‌دهند؟

۲ مقادیر $f(1)$ و $g(1)$ و $f(1)+g(1)$ چه چیزی را نشان می‌دهند؟

۳ قانون تابع $h(t)=f(t)+g(t)$ را در بازهٔ $[0,10]$ به‌دست آورید. این تابع چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۴ مقدارهای $f'(t)$ و $g'(t)$ و $h'(t)$ نشان‌دهندهٔ چه چیزی هستند؟

۵ $f'(t)$ و $g'(t)$ و $h'(t)$ را به‌دست آورید. چه رابطه‌ای بین آنها وجود دارد؟

وقتی که فرد روی پیاده‌روی متحرک شروع به راه رفتن می‌کند، مسافتی که فرد نسبت به زمین طی می‌کند (فاصلهٔ فرد تا A_0) برابر است با مجموع مسافت طی شده توسط تسمه (فاصلهٔ A_1 تا A_0) با مسافت طی شده توسط فرد روی تسمه (فاصلهٔ فرد تا A_1). بنابراین تابع حرکت این فرد نسبت به زمین به‌صورت مجموع دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ خواهد بود. یعنی در زمان t، فاصلهٔ فرد از A_0 به‌صورت $h(t) = f(t) + g(t)$ می‌باشد. سرعت حرکت این فرد نسبت به تسمه با مشتق‌گیری از تابع حرکت $g(t)$ به‌دست می‌آید، یعنی $g'(t) = \frac{1}{2}$. همچنین سرعت حرکت تسمه نسبت به زمین به‌صورت $f'(t) = 3$ است. سرعت حرکت فرد نسبت به زمین به‌صورت $h'(t) = 3 + \frac{1}{2}$ است. با مقایسهٔ سرعت‌ها (مشتق سه تابع) می‌توان دید سرعت فرد نسبت به زمین برابر است با مجموع سرعت فرد نسبت به تسمه و سرعت تسمه نسبت به زمین؛ یعنی **مشتق مجموع این دو تابع با مجموع مشتق‌های آنها برابر است.**

گفتگو

سعید گفت: تابع‌های ارائه شده در فعالیت بالا همگی خطی بودند و مشتق هر کدام از آنها که سرعت را نشان می‌داد، مقدار ثابتی بود. آیا نتیجه‌ای که در این فعالیت گرفتیم، برای همهٔ تابع‌ها برقرار است؟

دبیر گفت: با توجه به اینکه برای محاسبهٔ مشتق باید از حدگیری استفاده شود و حد مجموع دو تابع با مجموع حدهای آنها برابر است، این ویژگی برای همهٔ تابع‌ها برقرار است.

برای هر دو تابع مشتق‌پذیر، ویژگی زیر برقرار است:

مشتق مجموع دو تابع

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع با دامنهٔ یکسان و در $x = a$ مشتق‌پذیر باشند. در این صورت تابع $h(x) = f(x) + g(x)$ در $x = a$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$h'(a) = f'(a) + g'(a)$$

قانون مشتق جمع دو تابع، برای مجموع بیشتر از دو تابع نیز برقرار است. از این قانون می‌توان برای پیدا کردن مشتق تابع‌های مختلف استفاده کرد.

مثال ۱

مشتق تابع $h(x) = x^2 + 4x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را به‌دست آورید.

این تابع را می‌توان مجموع تابع $f(x) = x^2$ و تابع خطی $g(x) = 4x$ در نظر گرفت. می‌دانیم $f'(x) = 2x$ و $g'(x) = 4$، بنابراین:

$$h'(x) = f'(x) + g'(x) = 2x + 4$$

امکان تعمیم قانون مشتق مجموع دو تابع، به مشتق حاصل‌ضرب دو تابع اولین سؤالی بود که توسط یکی دیگر از هنرجویان مطرح شد.

گفتگو

مسعود گفت: آیا برای به‌دست آوردن مشتق حاصل‌ضرب دو تابع، می‌توانیم مشتق آنها را در هم ضرب کنیم؟

سعید گفت: این سؤال برای من هم پیش آمده بود. برای بررسی درستی این حدس، یک مثال برای خودم زدم و درستی آن را بررسی کردم. تابع $f(x) = x^2$ را به‌صورت $f(x) = x.x$ نوشتم و این حدس را آزمایش کردم.

$$f'(x) = ۱\times۱=۱$$

اما دیده بودیم $f'(x) = ۲x$، پس تساوی بالا نادرست است و این حدس اشتباه بود.

دبیر گفت: بله. این مثال، حدس مسعود را رد می‌کند، یعنی یک مثال نقض برای آن است.

برای یافتن مشتق حاصل‌ضرب دو تابع می‌توان از تعریف مشتق استفاده کرد. در حالت کلی مشتق حاصل‌ضرب دو تابع به شکل زیر است.

مشتق حاصل ضرب دو تابع

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع با دامنهٔ یکسان و در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند. در این صورت تابع $h(x)=f(x).g(x)$ در $x=a$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$h'(a) = f'(a)\,.\,g(a) + f(a)\,.\,g'(a)$$

مثال ۲

به کمک مشتق حاصل‌ضرب دو تابع، مشتق تابع‌های $u(x)=x^۲$ و $v(x)=x^۳$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را به‌دست آورید.

می‌توان تابع $u(x)$ را به صورت $u(x)=x\,.\,x$ در نظر گرفت. اگر قرار دهیم $f(x)=x$ و $g(x)=x$ داریم $u(x) = f(x)\,.\,g(x)$. می‌دانیم $f'(x) = ۱$ و $g'(x) = ۱$. بنابراین، مشتق تابع u در نقطهٔ دلخواه x طبق فرمول مشتق حاصل‌ضرب دو تابع عبارت است از :

$$u'(x) = f'(x)\,.\,g(x) + f(x)\,.\,g'(x) = ۱\times x + x\times ۱ = ۲x$$

همچنین تابع $v(x)$ را می‌توان به‌صورت $v(x)=x^۲.x$ در نظر گرفت، اگر قرار دهیم $f(x)=x^۲$ و $g(x)=x$ داریم $v(x)=f(x).g(x)$. می‌دانیم $f'(x) = ۲x$ و $g'(x) = ۱$. بنابراین مشتق تابع v در

نقطهٔ دلخواه x طبق فرمول مشتق حاصل‌ضرب دو تابع عبارت است از:

$$v'(x) = f'(x)\,.\,g(x) + f(x)\,.\,g'(x) = ۲x\,.\,x + x^۲ \times ۱ = ۳x^۲$$

مثال ۳

مشتق تابع $h(x)=\dfrac{۷}{x}$ با دامنه $\mathbb{R}-\{۰\}$ را به‌دست آورید.

می‌توان تابع $h(x)$ را به‌صورت $h(x)=۷\times\dfrac{۱}{x}$ در نظر گرفت. اگر قرار دهیم $f(x)=۷$ (تابع ثابت) و $g(x)=\dfrac{۱}{x}$ داریم: $u(x)=f(x)\ g(x)$. می‌دانیم $f'(x)=۰$ و $g'(x)=-\dfrac{۱}{x^۲}$. بنابراین مشتق تابع h در نقطهٔ دلخواه x طبق فرمول مشتق حاصل‌ضرب دو تابع عبارت است از:

$$h'(x)=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)=۰\times\frac{۱}{x}+۷\times\frac{-۱}{x^۲}=-\frac{۷}{x^۲}$$

به‌طور کلی، اگر g تابعی مشتق‌پذیر و a یک عدد حقیقی باشد، می‌توانیم تابع $h(x)=ag(x)$ را در نظر بگیریم. با در نظر گرفتن تابع ثابت $f(x)=a$ می‌توان تابع h را به‌صورت حاصل‌ضرب دو تابع f و g در نظر گرفت. بنابراین مشتق تابع h در نقطهٔ دلخواه x طبق فرمول مشتق حاصل‌ضرب دو تابع عبارت است از:

$$h'(x)=f'(x)\,.\,g(x)+f(x)\,.\,g'(x)=۰\times g(x)+ag'(x)=ag'(x)$$

مثال ۴

فرض کنید تابع $f(x)=\sqrt{x}$ با دامنهٔ $(۰,+\infty)$ در نقطهٔ دلخواه x مشتق‌پذیر باشد. مشتق f را به‌دست آورید.

می‌توان نوشت: $f(x).f(x)=\sqrt{x}\,.\,\sqrt{x}=x$ ؛ با مشتق‌گیری از دو طرف تساوی داریم[۱]:

$$\big(f(x).f(x)\big)'=۱$$

با استفاده از فرمول مشتق حاصل‌ضرب دو تابع خواهیم داشت:

$$f'(x)\,.f(x)+f(x)\,.f'(x)=۱$$

بنابراین: $۲f'(x)\,.f(x)=۱$

یعنی: $f'(x)=\dfrac{۱}{۲f(x)}=\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}$.

۱ـ توجه داشته باشید که دو تابع مساوی مشتق‌پذیر، مشتق مساوی دارند.

کار در کلاس ۱

۱ـ با استفاده از تساوی $x.\frac{۱}{x}=۱$ که در $\mathbb{R}-\{۰\}$ برقرار است و به کمک مشتق حاصل‌ضرب دو تابع، مشتق تابع $\frac{۱}{x}$ را در نقطهٔ دلخواه $x\neq ۰$ به‌دست آورید.

به کمک مشتق حاصل‌ضرب دو تابع، مشتق بسیاری از تابع‌ها را می‌توان یافت. در فعالیت زیر مشتق تابع $f(x)=ax^n$ را که a یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی دلخواه است، به‌دست می‌آوریم.

فعالیت ۲

۱ جدول زیر را کامل کنید.

f(x)	x	$x^۲$	$x^۳$	$x^۴$	$x^۵$
f′(x)	۱	$۲x$	$۳x^۲$	...	...

۲ چه رابطه‌ای بین قانون $f(x)$ و ضریب و توان در $f'(x)$ وجود دارد؟

۳ اگر $n\in\mathbb{N}$ و $f(x)=x^n$ ، قاعده‌ای برای یافتن $f'(x)$ پیشنهاد دهید.

۴ اگر $n\in\mathbb{N}$ و a یک عدد حقیقی و $f(x)=ax^n$، قاعده‌ای برای یافتن $f'(x)$ پیشنهاد دهید.

در فعالیت بالا، با کامل کردن جدول می‌توان دید وقتی n برابر با ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ است، مشتق تابع $f(x)=x^n$ به‌صورت $f'(x)=nx^{n-۱}$ می‌باشد. این تساوی برای هر عدد طبیعی n نیز برقرار است.
برای تابع $f(x)=ax^n$ نیز داریم: $f'(x)=nax^{n-۱}$.
به کمک مشتق جمع تابع‌ها و مشتق تابع x^n می‌توان مشتق تابع چندجمله‌ای

$$f(x)=x^n+x^{n-۱}+\dots+x+۱$$

را به‌دست آورد. در واقع $f'(x)=nx^{n-۱}+(n-۱)x^{n-۲}+\dots+۱$.

همچنین مشتق تابع چندجمله‌ای

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\dots+a_۱x+a_۰$$

به‌صورت زیر است:

$$f'(x)=na_nx^{n-۱}+(n-۱)a_{n-۱}x^{n-۲}+\dots+a_۱$$

پس از آشنایی با روش محاسبهٔ مشتق مجموع و حاصل‌ضرب دو تابع، این سؤال پیش آمد که مشتق تقسیم دو تابع چگونه به‌دست می‌آید؟

گفتگو

حمید گفت: بسیاری از تابع‌ها به‌صورت تقسیم دو تابع هستند. مشتق این گونه تابع‌ها را چگونه محاسبه می‌کنیم؟

دبیر گفت: فرض کنید f و g دو تابع مشتق‌پذیر با دامنهٔ یکسان D باشند و $g(x)\neq 0$. می‌توانید تابع $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ را با همان دامنهٔ D در نظر بگیرید. اگر فرض کنیم تابع h مشتق‌پذیر باشد، با استفاده از تساوی $f(x)=h(x).g(x)$ و مشتق حاصل‌ضرب دو تابع، می‌توان مشتق تابع h را به‌دست آورد.

حمید گفت: من این مسئله را به شکل زیر حل کردم. برای سادگی محاسبه به جای $f(x)$ از f و به جای $f'(x)$ از f' استفاده کردم.

$$f=h\,.\,g$$
$$f'=h'\,.\,g+h\,.\,g'$$

به جای h معادل آن یعنی $\dfrac{f}{g}$ را قرار دادم:

$$f'=h'.g+\frac{f}{g}.g'$$

$$h'.g=f'-\frac{f.g'}{g}$$

$$h'.g=\frac{f'.g-f.g'}{g}$$

$$h'=\frac{f'.g-f.g'}{g^{2}}$$

دبیر گفت: محاسبهٔ شما درست است.

مشتق تقسیم دو تابع

فرض کنید f و g دو تابع با دامنهٔ یکسان و در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند و به ازای هر x از دامنه، $g(x)\neq 0$. در این صورت، تابع $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ نیز در $x=a$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$h'(a)=\frac{f'(a).g(a)-f(a).g'(a)}{(g(a))^{2}}$$

مثال ۵

مشتق تابع $u(x)=\frac{1}{x-1}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{1\}$ را در یک نقطهٔ دلخواه از دامنهٔ آن به‌دست آورید.

اگر $f(x)=1$ و $g(x)=x-1$ را در نظر بگیریم، داریم: $u(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$. می‌دانیم $f'(x)=0$ و $g'(x)=1$. بنابراین مشتق تابع u در نقطهٔ دلخواه x طبق فرمول مشتق تقسیم دو تابع عبارت است از:

$$u'(x)=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}=\frac{0\times(x-1)-1\times1}{(x-1)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2}$$

مثال ۶

مشتق تابع $v(x)=\frac{x^2}{x+1}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-1\}$ را در یک نقطهٔ دلخواه از دامنهٔ آن به‌دست آورید.

اگر $f(x)=x^2$ و $g(x)=x+1$ را در نظر بگیریم، داریم: $v(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$. می‌دانیم $f'(x)=2x$ و $g'(x)=1$. بنابراین مشتق تابع v در نقطهٔ دلخواه x طبق فرمول مشتق تقسیم دو تابع عبارت است از:

$$v'(x)=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}=\frac{2x\times(x+1)-x^2\times1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

کار در کلاس ۲

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید. دامنه‌های این تابع‌ها را بازهٔ $(0\ ,\ +\infty)$ در نظر بگیرید.

الف) $f(x)=x^2-4x+5$

ب) $g(x)=x^2+4\sqrt{x}$

پ) $h(x)=\frac{x^2-4x}{3x+4}$

مسائل

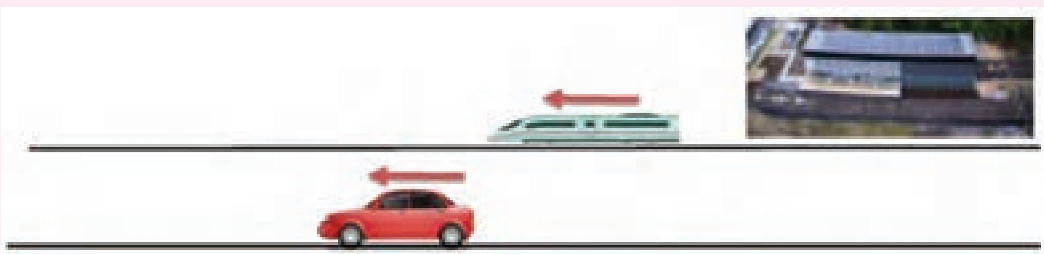
۱ مشتق تابع‌های زیر با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = x^{۳} + ۴x + ۱$

ب) $g(x) = (x^{۲} + ۱)(x^{۲} - ۳)$

پ) $h(x) = \dfrac{۳x + ۱}{x^{۲} + ۱}$

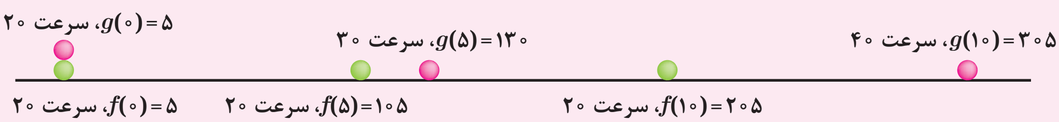
۲ قطاری در یک مسیر مستقیم و با سرعت ثابت از ایستگاه دور می‌شود فاصلهٔ این قطار برحسب متر در لحظهٔ t (برحسب ثانیه) از ایستگاه $f(t)=۲۰t+۵$ است. ماشینی در جاده‌ای به موازات مسیر حرکت قطار، هم‌جهت با حرکت قطار از ایستگاه دور می‌شود. فاصلهٔ این ماشین (برحسب متر) در لحظهٔ t (برحسب ثانیه) $g(t)=t^{۲}+۲۰t+۵$ است. فرض کنید این وضعیت در بازهٔ زمانی $[۰,۱۰]$ برقرار باشد.



الف) فاصلهٔ قطار را از ایستگاه و سرعت آن را در زمان‌های ۱۰ و ۵ و $t=۰$ به دست آورید.

ب) فاصلهٔ ماشین را از ایستگاه و سرعت آن را در زمان‌های ۱۰ و ۵ و $t=۰$ به دست آورید.

پ) شکل زیر مکان قطار و ماشین و سرعت آنها را در لحظه‌های $t=۰$ و $t=۵$ و $t=۱۰$ نشان می‌دهد.



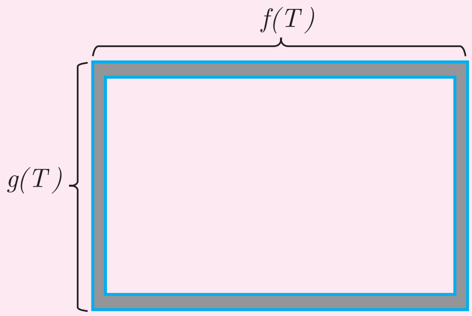
■ فاصلهٔ ماشین از قطار در لحظه‌های $t=۰$ به $t=۵$ و $t=۱۰$ به دست آورید.

■ در لحظه‌های $t=\circ$ و $t=۵$ و $t=۱\circ$ سرعت قطار .... است ولی سرعت ماشین .... است.

ت) یکی از مسافران قطار به ماشین نگاه می‌کند. به کمک تابع $h(t)=g(t)-f(t)$ سرعت دور شدن ماشین از قطار را از نظر مسافر در لحظهٔ t به دست آورید.

۳ اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد، مشتق تابع $u(x)=(f(x))^۲$ را برحسب f و f' به‌دست آورید. به کمک این رابطه مشتق تابع $v(x)=(۴x^۲-۱)^۲$ را به‌دست آورید.

۴ فلزها بر اثر گرما انبساط می‌یابند. فرض کنید یک قاب مستطیلی فلزی داریم که طول و عرض آن در دمای T به‌صورت $f(T)=۱۵(۱+\frac{۱}{۸}T)$ و $g(T)=۱\circ(۱+\frac{۱}{۸}T)$ است. مقادیر T(دما) در بازهٔ $[\circ,۴\circ]$ است. T برحسب سانتی‌گراد و مقدار این تابع‌ها بر حسب سانتی‌متر است.



الف) سرعت تغییر اندازهٔ اضلاع را نسبت به تغییر درجهٔ حرارت به‌دست آورید.

ب) سرعت تغییر مساحت این مستطیل را نسبت به تغییر درجه حرارت به‌دست آورید.

۲ــ تابع‌های صعودی و نزولی و مشتق آنها

گفتگو

سعید یاد گرفته بود که مشتق یک تابع، سرعت تغییرات تابع را نشان می‌دهد. اما او مشاهده کرد تابع‌هایی وجود دارند که مشتق آنها در برخی نقاط، عددی منفی است و برای او این سؤال پیش آمد که منفی شدن مشتق چه معنایی دارد؟

سعید گفت: من فکر می‌کردم که مشتق یک تابع در یک نقطه، سرعت تغییرات مقادیر تابع را در آن نقطه نشان می‌دهد. اما مشتق برخی تابع‌ها در برخی نقاط، عددی منفی است. منفی شدن مشتق، چه معنایی دارد؟

دبیر گفت: به نکتهٔ خوبی توجه کردی. مشتق یک تابع در یک نقطه، چگونگی تغییرات تابع در نزدیکی‌های آن نقطه را نشان می‌دهد. با انجام فعالیت زیر می‌توانید این وضعیت را بررسی کنید.

فعالیت ۳

۱ تابع $f(x)=x^{2}$ را با دامنهٔ $(\circ\,,+\infty)$ در نظر بگیرید. جدول زیر برخی از مقادیر تابع را نشان می‌دهد. این جدول را کامل کنید.

x	۰/۵	۱	۵	۱۰	۳۰	۵۰	a
$f(x)$	۰/۲۵	۱	۲۵	...	...	...	...

۲ با افزایش مقادیر x ، مقادیر $f(x)$ (از لحاظ افزایش یا کاهش) چگونه تغییر می‌کنند؟

۳ مشتق این تابع را به‌دست آورید. علامت مشتق تابع در این نقاط چگونه است؟

۴ تابع $g(x)=-x^{2}$ را با دامنهٔ $(\circ\,,+\infty)$ در نظر بگیرید. جدول زیر برخی از مقادیر تابع را نشان می‌دهد. این جدول را کامل کنید.

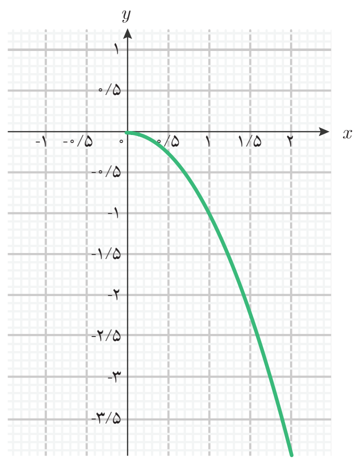
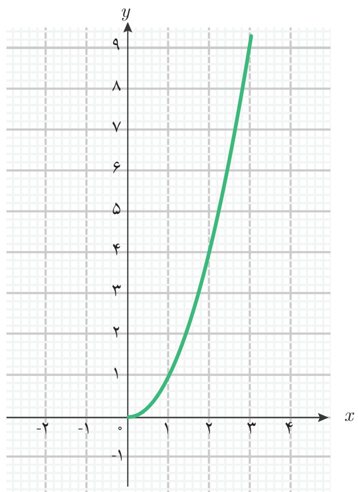
x	۰/۵	۱	۵	۱۰	۳۰	۵۰	a
$g(x)$	۰/۲۵-	۱-	۲۵-	...	...	...	...

۵ با افزایش مقادیر x، مقادیر $g(x)$ (از لحاظ افزایش یا کاهش) چگونه تغییر می‌کنند؟

۶ مشتق این تابع را به‌دست آورید. علامت مشتق تابع در این نقاط چگونه است؟

۷ با توجه به نتایج بالا به نظر شما چه رابطه‌ای بین رفتار افزایشی یا کاهشی مقادیر یک تابع و علامت مشتق آن تابع برقرار است؟

در این فعالیت دو تابع خاص را بررسی کردید که یکی رفتاری افزایشی و دیگری رفتاری کاهشی داشت. ویژگی‌های این دو تابع را می‌توانید در جدول زیر مشاهده کنید.

تابع	$g(x) = -x^2$ با دامنهٔ $(0\ ,+\infty)$	$f(x) = x^2$ با دامنهٔ $(0\ ,+\infty)$
نمودار		
رفتار تابع	رفتار کاهشی	رفتار افزایشی
ویژگی رفتاری	با افزایش مقادیر متغیر، مقادیر تابع کاهش می‌یابند.	با افزایش مقادیر متغیر، مقادیر تابع افزایش می‌یابند.
علامت مقادیر مشتق تابع	منفی	مثبت

رابطه‌ای که بین رفتارهای تابع و علامت مشتق تابع در جدول بالا مشاهده می‌شود، برای تابع‌های دیگر نیز برقرار است. برخی تابع‌ها **رفتاری افزایشی** دارند (مانند تابع f در فعالیت (۳))؛ یعنی با افزایش مقدار

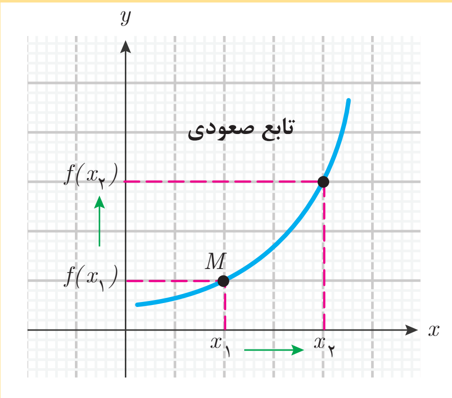
متغیر، مقدار تابع نیز افزایش می‌یابد. مشتق این گونه تابع‌ها (در صورت وجود) در همهٔ نقاط دامنهٔ خود مثبت خواهند بود. اما، برخی تابع‌ها **رفتار کاهشی** دارند (مانند تابع g در فعالیت (۳))؛ یعنی با افزایش مقدار متغیر، مقدار تابع کاهش می‌یابد. مشتق این‌گونه تابع‌ها (در صورت وجود) در همهٔ نقاط دامنهٔ خود منفی خواهد بود.

تابع‌هایی را که در دامنهٔ خود رفتاری افزایشی دارند، **تابع صعودی**، و تابع‌هایی را که در دامنهٔ خود رفتار کاهشی دارند، **تابع نزولی** می‌نامند.

تعریف

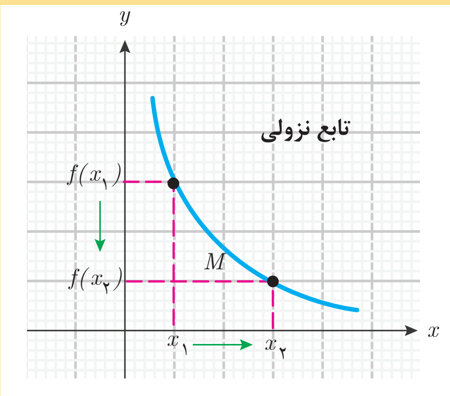
تابع‌های صعودی یا نزولی

فرض کنید f تابعی باشد که با افزایش مقدار متغیر از $x_۱$ به $x_۲$ (دو نقطهٔ دلخواه در دامنهٔ تابع)، مقدار تابع از $f(x_۱)$ به $f(x_۲)$ افزایش یابد؛ در این صورت f را یک **تابع صعودی** می‌نامند؛ یعنی صعودی بودن تابع f به معنای آن است که:



اگر $x_۱$ و $x_۲$ دو نقطه از دامنهٔ f باشند و $x_۱ \leq x_۲$ آنگاه $f(x_۱) \leq f(x_۲)$.

همچنین، اگر f تابعی باشد که با افزایش مقدار متغیر از $x_۱$ به $x_۲$ (دو نقطهٔ دلخواه در دامنهٔ تابع)، مقدار تابع از $f(x_۱)$ به $f(x_۲)$ کاهش یابد، در این صورت f را یک **تابع نزولی** می‌نامند؛ یعنی نزولی بودن تابع f به معنای آن است که:



اگر $x_۱$ و $x_۲$ دو نقطه از دامنهٔ f باشند و $x_۱ \leq x_۲$ آنگاه $f(x_۲) \leq f(x_۱)$.

اگر یک تابع صعودی مشتق‌پذیر باشد، مشتق آن در هر نقطه از دامنهٔ خود مثبت یا صفر خواهد بود. همچنین، اگر یک تابع نزولی مشتق‌پذیر باشد، مشتق آن در هر نقطه از دامنهٔ خود منفی یا صفر خواهد بود.

مثال ۷

مشتق تابع $f(x) = ۳x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را به‌دست آورید و وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع را بررسی کنید.

می‌دانیم مشتق تابع‌های خطی در همهٔ نقاط، مقداری ثابت است که همان شیب خط (نمودار تابع) است، یعنی $f'(x)=۳>۰$. بنابراین مشتق این تابع در همهٔ نقاط، مثبت است و دیده می‌شود که این تابع در دامنهٔ خود صعودی است. زیرا برای دو عدد دلخواه $x_۱$ و $x_۲$، اگر $x_۱ \leq x_۲$ آنگاه $۳x_۱ \leq ۳x_۲$ یعنی $f(x_۱) \leq f(x_۲)$.

به طور کلی، **همهٔ تابع‌های خطی با شیب مثبت، تابع‌هایی صعودی هستند.**

مثال ۸

مشتق تابع $f(x) = -۲x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را به‌دست آورید و وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع را بررسی کنید.

می‌دانیم $f'(x) = -۲ < ۰$. بنابراین، مشتق این تابع در همهٔ نقاط، منفی است و به سادگی دیده می‌شود که این تابع در دامنهٔ خود نزولی است. زیرا برای دو عدد دلخواه $x_۱$ و $x_۲$ ، اگر $x_۱ \leq x_۲$ داریم $-۲x_۱ \geq -۲x_۲$ یعنی $f(x_۲) \leq f(x_۱)$.

به طور کلی، **همهٔ تابع‌های خطی با شیب منفی، تابع‌هایی نزولی هستند.**

گفتگو

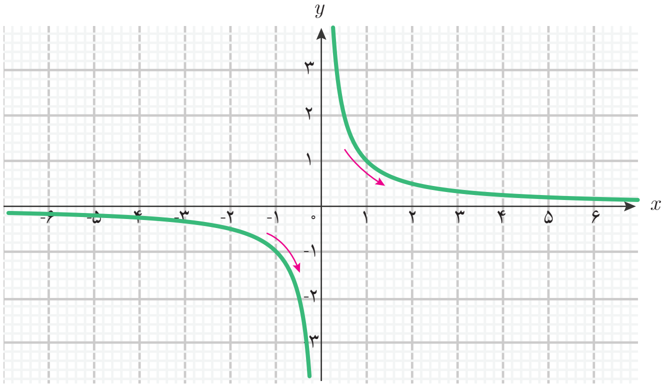
سعید گفت: آیا این نتیجه‌گیری درست است که مثبت بودن مشتق تابع، نشانهٔ صعودی بودن و منفی بودن مشتق تابع، نشانهٔ نزولی بودن تابع است؟

دبیر گفت: اگر دامنهٔ تابع یک بازه باشد، نتیجه‌گیری شما درست است. در واقع، اگر مشتق یک تابع در نقاط یک بازه از دامنهٔ تابع، مثبت باشد، تابع در آن بازه صعودی است. همچنین، اگر مشتق یک تابع در نقاط یک بازه از دامنهٔ تابع، منفی باشد، تابع در آن بازه نزولی است. اما اگر دامنه، اجتماعی از بازه‌ها باشد، صعودی یا نزولی بودن تابع را باید مستقیماً بررسی کرد.به مثال صفحه بعد توجه کنید.

مثال ۹

تابع $g(x)=\frac{1}{x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{0\}$ را در نظر بگیرید. وضعیت صعودی یا نزولی بودن این تابع را بررسی کنید.

دیدیم $g'(x)=-\frac{1}{x^2}$. مشتق تابع g در همهٔ نقاط دامنهٔ خود منفی است. بنابراین، این تابع در بازه‌های $(0\,,+\infty)$ و $(-\infty\,,0)$ که در دامنه قرار دارند، نزولی است. اما این تابع در تمام دامنهٔ خود نزولی نیست، مثلاً اگر $x_1=-1$ و $x_2=3$ داریم $x_1<x_2$ ولی $g(x_1)=-1$ و $g(x_2)=\frac{1}{3}$. یعنی $g(x_1)<g(x_2)$.



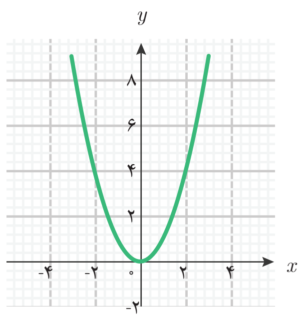
نمودار تابع نیز نشان می‌دهد که اگرچه این تابع در هر یک از بازه‌های $(0\,,+\infty)$ و $(-\infty\,,0)$ نزولی است ولی در تمام دامنهٔ خود نزولی نیست.

گفتگو

سعید گفت: اگر مشتق تابعی در برخی نقاط دامنهٔ خود، مثبت و در برخی نقاط دیگر از دامنهٔ خود، منفی باشد، در مورد وضعیت صعودی یا نزولی بودن این تابع چه می‌توانیم بگوییم؟

دبیر گفت: توجه داشته باشید که تابع‌ها، لزوماً همه جا صعودی یا همه جا نزولی نیستند. یک تابع ممکن است در قسمت‌هایی از دامنهٔ خود صعودی باشد و در قسمت‌های دیگری نزولی باشد.

مثال ۱۰

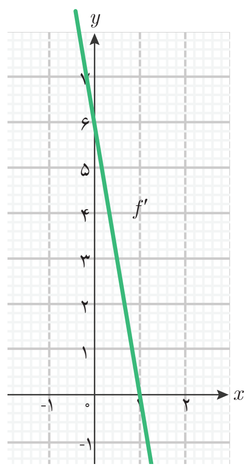


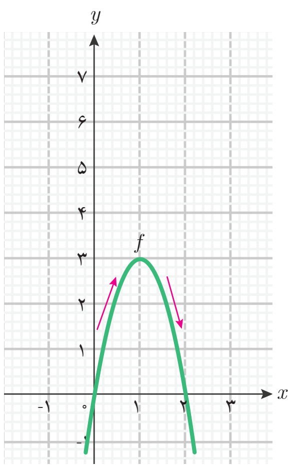
تابع $f(x)=x^2$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. نمودار این تابع به شکل روبه‌رو است. مشتق این تابع به‌صورت $f'(x)=2x$ است. علامت عدد $2x$ همان علامت x است، در نتیجه مقادیر مشتق این تابع در بازهٔ $(-\infty,0)$ منفی و تابع در این بازه نزولی است. همچنین مقادیر مشتق این تابع در بازهٔ $(0,+\infty)$ مثبت است و تابع در این بازه صعودی است. بنابراین، این تابع در کل دامنهٔ خود نه صعودی و نه نزولی است، ولی در بازهٔ $(0,+\infty)$ صعودی و دربازهٔ $(-\infty,0)$ نزولی است.

در حالت کلی، ممکن است تابع‌ها در دامنهٔ خود نه صعودی باشند و نه نزولی، ولی در برخی از بازه‌های دامنهٔ خود، صعودی و در برخی بازه‌های دیگر از دامنهٔ خود، نزولی باشند.
بازه‌هایی که تابع در آنها صعودی است، مشتق تابع در آن نقاط، در صورت وجود، مثبت یا صفر است. برعکس، اگر مشتق یک تابع در یک بازه مثبت یا صفر باشد، تابع در آن بازه صعودی است.
همچنین، بازه‌هایی که تابع در آنها نزولی است، مشتق تابع در نقاط آن، در صورت وجود، منفی یا صفر است. برعکس، اگر مشتق یک تابع در یک بازه منفی یا صفر باشد، تابع در آن بازه نزولی است.

مثال ۱۱

مشتق تابع $f(x) = -۳x^۲ + ۶x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را به‌دست آورید. مشتق این تابع در چه نقاطی مثبت و در چه نقاطی منفی است؟ این تابع در کدام بازه‌ها صعودی و در کدام بازه‌ها نزولی است؟





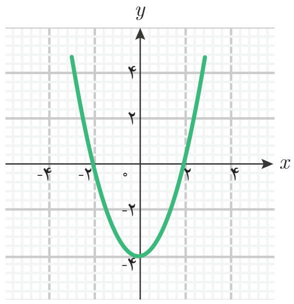
می‌دانیم $f'(x) = -۶x + ۶$. برای تشخیص نقاطی که f' به ازای آنها مثبت یا منفی می‌شود، می‌توانیم نمودار آن را رسم کنیم و بازه‌هایی را که نمودار f' بالای محور طول‌ها یا زیر محور طول‌هاست، تعیین کنیم.
تابع f' در $x = ۱$ صفر است و برای $x < ۱$ ، مقادیر $f'(x)$ مثبت و برای $x > ۱$، مقادیر $f'(x)$ منفی است. بنابراین، تابع f در بازهٔ $(-\infty, ۱]$ صعودی و در بازهٔ $[۱ , +\infty)$ نزولی است. نمودار این تابع نیز این مطلب را نشان می‌دهد.

مثال ۱۲

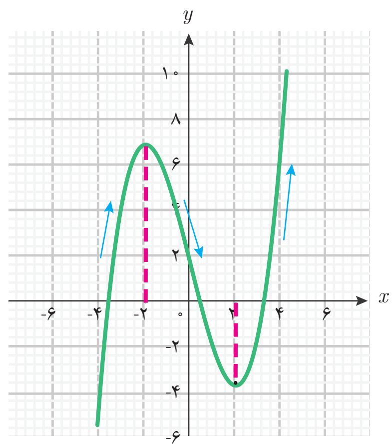
مشتق تابع $f(x) = \frac{۱}{۳}(x^۳ - ۱۲x + ۵)$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را حساب کنید. مشتق این تابع در چه نقاطی مثبت و در چه نقاطی منفی است؟ این تابع در کدام بازه‌ها صعودی و در کدام بازه‌ها نزولی است؟

می‌دانیم $f'(x) = \frac{۱}{۳}(۳x^۲ - ۱۲) = x^۲ - ۴$. برای تشخیص نقاطی که f' به ازای آنها مثبت یا

منفی می‌شود، می‌توانیم نمودار آن را رسم کنیم و بازه‌هایی را که نمودار f' بالای محور طول‌ها (مثبت بودن مشتق) یا زیر محور طول‌ها (منفی بودن مشتق) است، تعیین کنیم. نمودار f' به شکل روبه‌رو است.

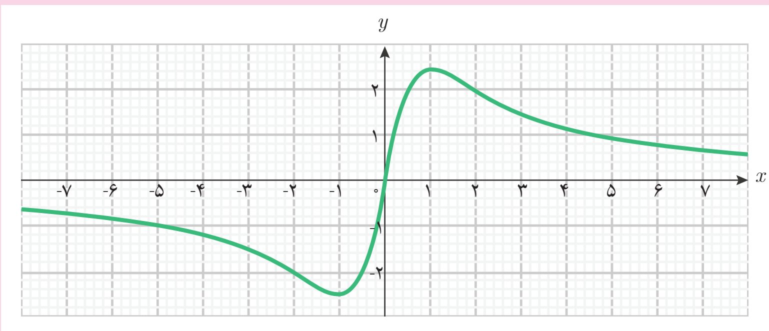


نمودار نشان می‌دهد که f' در بازه‌های $(-\infty , -2]$ و $[2 , +\infty)$ مثبت است و تابع f در این بازه‌ها صعودی است. همچنین، f' دربازهٔ $(-2 , 2)$ منفی است و تابع f در این بازه نزولی است. نمودار تابع f به شکل زیر است و نتایجی که به‌دست آوردیم در شکل دیده می‌شوند.



کار در کلاس ۳

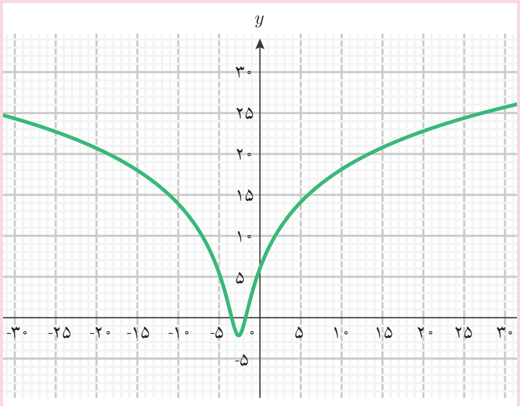
۱ـ فرض کنید g تابعی مشتق‌پذیر با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد و نمودار g' به شکل زیر باشد.

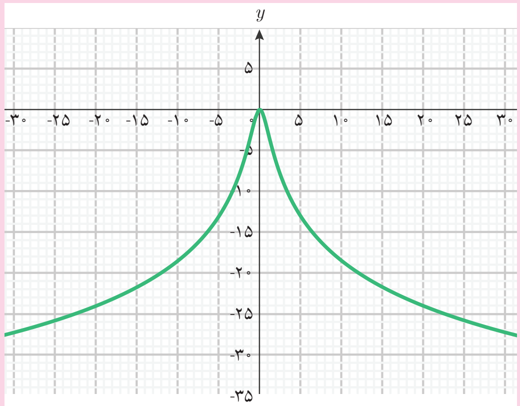


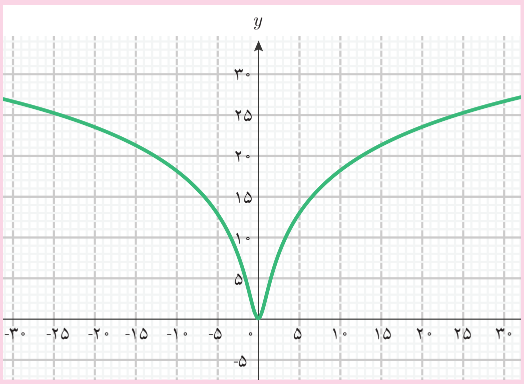
الف) مقادیر g' در چه بازه‌ای مثبت و در چه بازه‌ای منفی است؟

ب) تابع g در کدام بازه‌ها صعودی و در کدام بازه‌ها نزولی است؟

پ) کدام یک از نمودارهای زیر می‌تواند نمودار g باشد؟







۲ـ آیا تابعی می‌توان یافت که هم صعودی و هم نزولی باشد؟ مشتق چنین تابعی چه ویژگی دارد؟ با یک مثال نشان دهید.

سعید می‌دانست که در برخی نقاط، مشتق برخی تابع‌ها صفر می‌شود و این سؤال برای او پیش آمد که در این حالت تابع چه وضعیتی پیدا می‌کند.

گفتگو

سعید پرسید: وقتی مشتق یک تابع در بازه‌ای از دامنهٔ تابع مثبت یا منفی باشد، تابع در آن بازه صعودی یا نزولی است. اما، وقتی مشتق تابع در برخی نقاط صفر شود، وضعیت تابع در این نقاط به چه صورت در می‌آید؟

دبیر گفت: به نکتهٔ بسیار خوبی اشاره کردی. وقتی مشتق یک تابع در یک نقطه صفر است، فقط می‌توانیم بگوییم خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه افقی است. برای تشخیص چگونگی رفتار تابع، باید دربارهٔ مثبت یا منفی بودن مشتق تابع در قبل و بعد از آن نقطه تحقیق کنیم.

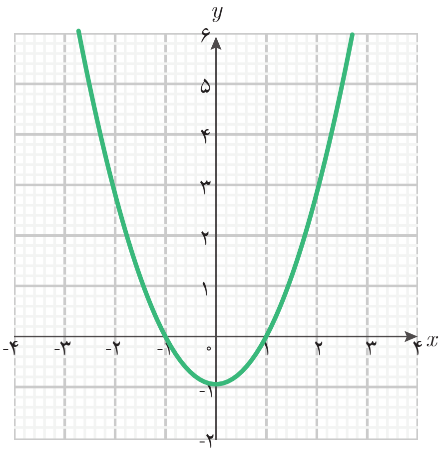
مثال ۱۳

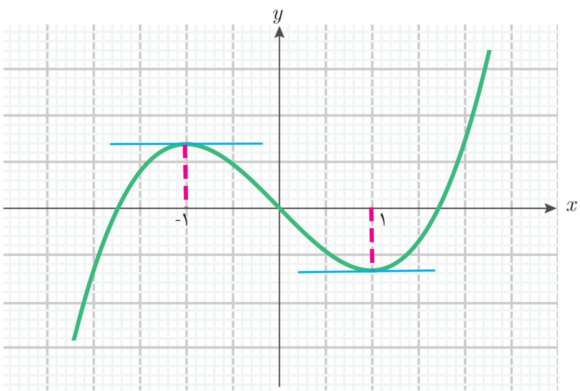
تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. مشتق این تابع در چه نقاطی صفر می‌شود؟ وضعیت تابع در این نقاط چگونه است؟

داریم $f'(x)=x^۲-۱$ و به ازای $x=-۱$ و $x=۱$ مشتق f صفر می‌شود. با رسم نمودار f' می‌بینیم:

- برای $x<-۱$ مقادیر $f'(x)$ مثبت است.
- برای $-۱<x<۱$ مقادیر $f'(x)$ منفی است.

پس، f در سمت چپ $x=-۱$ در حال افزایش و در سمت راست $x=-۱$ در حال کاهش است. پس، f در نقطهٔ $x=-۱$ به بیشترین مقدار خود می‌رسد. با رسم نمودار f نتایج به‌دست آمده دیده می‌شوند.





همچنین:

- برای $-۱<x<۱$ مقادیر $f'(x)$ منفی است.

- برای $x > ۱$ مقادیر $f'(x)$ مثبت است.

پس، f در سمت چپ $x = ۱$ در حال کاهش و در سمت راست $x = ۱$ در حال افزایش است، بنابراین f در نقطهٔ $x = ۱$ به کمترین مقدار خود می‌رسد. این نتیجه در نمودار تابع نیز دیده می‌شود.

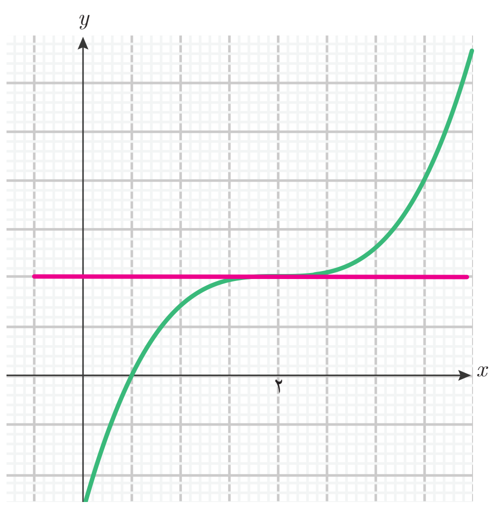
مثال ۱۴

تابع $f(x) = \frac{۱}{۳}(x-۲)^۳$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. مشتق این تابع در چه نقاطی صفر می‌شود؟ وضعیت تابع در این نقاط چگونه است؟

داریم $f'(x) = (x-۲)^۲$. بنابراین مقادیر مشتق مثبت هستند و فقط به ازای $x = ۲$ مشتق f صفر می‌شود. بنابراین، در نقاط قبل و بعد از $x = ۲$ مقادیر $f'(x)$ مثبت است.

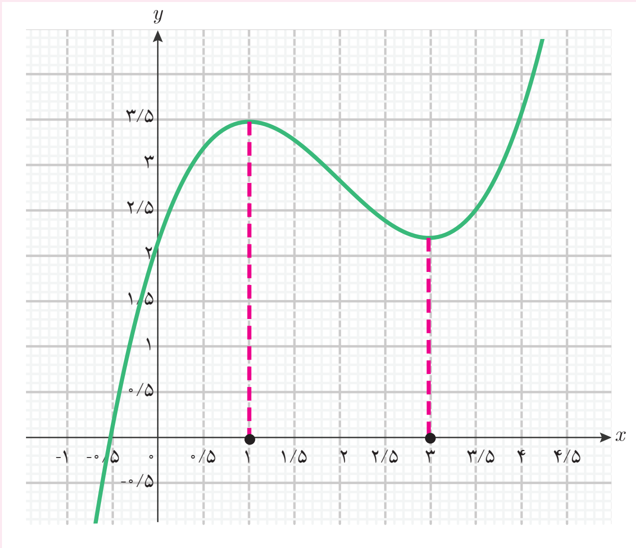
پس، f در سمت چپ و راست $x = ۲$ صعودی است. بنابراین، رفتار صعودی این تابع در نقطهٔ $x = ۲$ تغییری نمی‌کند. این تابع در کل دامنهٔ خود صعودی است.

تنها نکتهٔ مهم در این نقطه آن است که خط مماس بر نمودار این تابع در نقطهٔ $x = ۲$ موازی محور طول‌هاست و نمودار تابع در نقطهٔ اشتراک از میان این خط مماس می‌گذرد. یعنی، نمودار تابع در دو طرف خط مماس قرار می‌گیرد. نمودار این تابع و خط مماس بر آن در نقطهٔ $x = ۲$ به شکل زیر است.

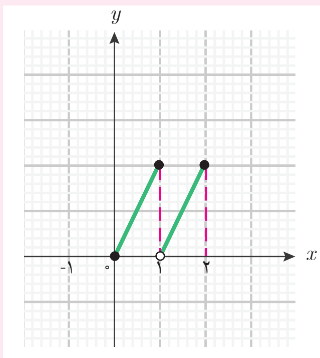


مسائل

۱ نمودار یک تابع به شکل زیر است. این تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟



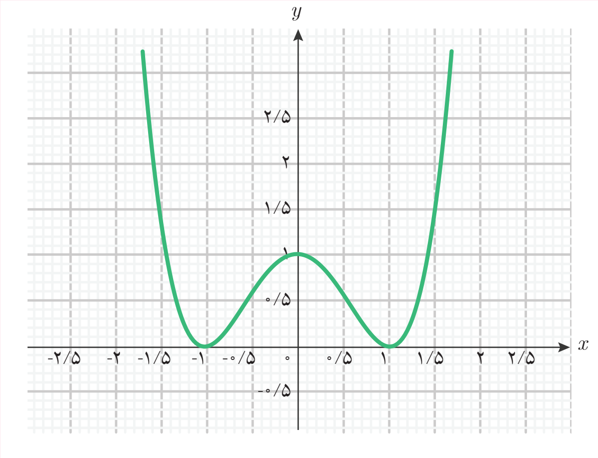
۲ نمودار یک تابع با دامنهٔ [۲ , ۰] به شکل زیر است.



الف) این تابع در چه بازه‌هایی صعودی است؟

ب) آیا این تابع در کل دامنهٔ خود صعودی است؟

۳ نمودار یک تابع مشتق‌پذیر به شکل زیر است.



الف) این تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

ب) مشتق این تابع در چه نقاطی مثبت و در چه نقاطی منفی است؟

پ) مشتق این تابع در چه نقاطی صفر است؟

۴ تابع $g(x)=\dfrac{x}{۲-x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۲\}$ را در نظر بگیرید.

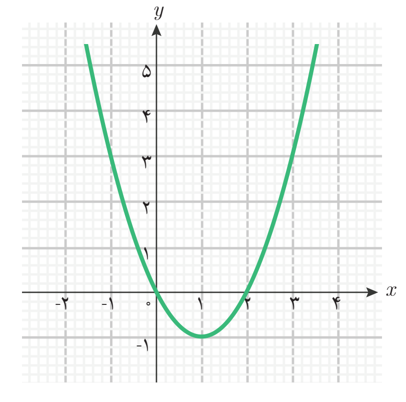
الف) مشتق این تابع را به‌دست آورید.

ب) آیا نقطه‌ای وجود دارد که مشتق این تابع در آن نقطه صفر شود؟

پ) مشتق این تابع در چه نقاطی مثبت و در چه نقاطی منفی است؟

ت) نمودار این تابع را با جئوجبرا رسم کنید و وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع را از روی نمودار و مشتق آن توصیف کنید.

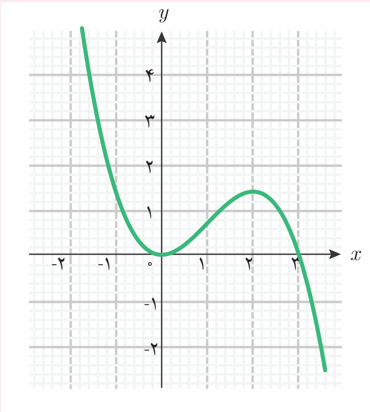
۵ فرض کنید g یک تابع مشتق‌پذیر با دامنهٔ $\mathbb{R}$ است و نمودار g' به شکل روبه‌روست.



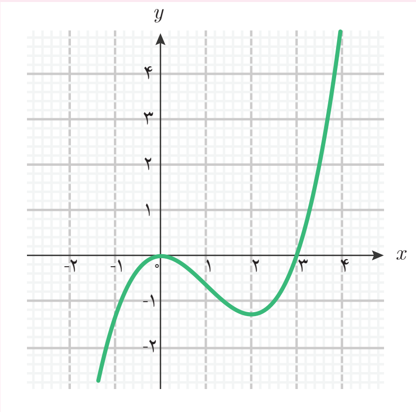
الف) تابع g در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

ب) مشتق g در چه نقاطی صفر است؟ آیا تابع g در این نقاط نسبت به نقاط اطراف، به بیشترین یا کمترین مقدار خود می‌رسد؟

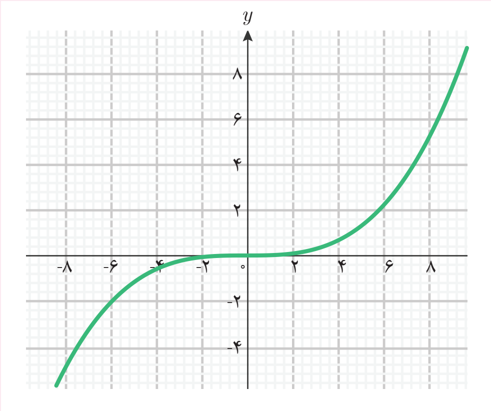
پ) کدام‌یک از نمودارهای زیر می‌تواند نمودار g باشد؟



(۱)



(۲)



(۳)

۶ نمودار یک تابع با دامنهٔ [۰ , ۵] را رسم کنید که در بازهٔ [۰,۲] صعودی و در بازهٔ [۲ , ۵] نزولی باشد؟

۷ قانون یک تابع با دامنهٔ [۱ , ۷] را ارائه کنید که پیوسته باشد و در بازهٔ [۱ , ۳] نزولی و در بازهٔ [۳,۷] صعودی باشد.

استانداردهای ارزشیابی پودمان پنجم

عنوان پودمان	تکالیف عملکردی (واحدهای یادگیری)	استاندارد عملکرد (کیفیت)	سطوح انتظارات	شاخص تحقق	نمره
پودمان پنجم: محاسبات مشتق و کاربردها	انجام محاسبات مشتق تابع‌ها با استفاده از قوانین مشتق‌گیری	تفسیر، و حل مسائل مرتبط با تغییرات متغیرها در تابع‌ها	بالاتر از حد انتظار	□ تفسیر، مدل‌سازی و حل مسائل زندگی واقعی (مسائل حل نشده در کلاس و کتاب درسی) مرتبط با تغییرات متغیرها در تابع‌ها	۳
	توصیف و تفسیر رفتار صعودی و نزولی بودن تابع‌ها به کمک مشتق تابع‌ها		حد انتظار	□ تفسیر، و حل مسائل مشابه مسائل حل شده در کلاس و کتاب درسی، مرتبط با تغییرات متغیرها در تابع‌ها	۲
			پایین‌تر از حد انتظار	□ درک و کاربرد صحیح مفاهیم و روابط برای محاسبه مشتق تابع‌ها	۱
نمره مستمر از ۵:					
نمره واحد یادگیری از ۳:					
نمره واحد یادگیری از ۲۰:					

منابع

۱ بخشعلی‌زاده، شهرناز؛ بروجردیان، ناصر؛ پناهنده، سوسن؛ دهقانی ابیانه، زین‌العابدین و فانی، زیبا. (۱۳۹۵). ریاضی ۱. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.
۲ اصغری، نسیم؛ بخشعلی‌زاده، شهرناز؛ بروجردیان، ناصر؛ دهقانی‌ابیانه، زین‌العابدین و میرمعینی، سیدمحمّد. (۱۳۹۶). ریاضی ۲. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.
۳ بروجردیان، ناصر. (تابستان ۱۳۹۲). تابع و حد تابع در نگاه جدید و نگاه قدیم. مجله ریاضی پایا، شماره ۲ دوره یکم.
۴ بابلیان، اسماعیل؛ رستمی، محمّدهاشم؛ لآلی، جواد، (۱۳۹۵). ریاضی ۳. شرکت صنایع آموزشی (وابسته به وزارت آموزش و پرورش)
۵ سادات حسینی، سیّد احمد؛ رضوی، سیّد مرتضی. (۱۳۹۵). شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران

۶ Buchanan, Laurie; Fensom Jim; kemp Ed; La Rondie Paul; stevens Jill. Mathematics standard level. oxford. 2012
۷ http://math.missouristate. edu. Time of access: Aug.2017

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایفای نقش خطیر خود در اجرای سند تحول بنیادین در آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، مشارکت دبیران را به‌عنوان یک سیاست اجرایی مهم دنبال می‌کند. برای تحقق این امر در اقدامی نوآورانه سامانه تعاملی بر خط اعتبارسنجی کتاب‌های درسی راه‌اندازی شد تا با دریافت نظرات دبیران دربارهٔ کتاب‌های درسی نونگاشت، کتاب‌های درسی را در اولین سال چاپ، با کمترین اشکال به دانش‌آموزان و دبیران ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب این فرایند، همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پرورشی استان‌ها، گروه‌های آموزشی و دبیرخانهٔ راهبری دروس و مدیریت محترم پروژه آقای محسن باهو نقش سازنده‌ای را بر عهده داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش تمامی این همکاران، اسامی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائهٔ نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌شود.

همکاران هنرآموز که در فرایند اعتبارسنجی این کتاب مشارکت نموده‌اند.

ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت	ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت
۱	ابراهیم خطیری	مازندران	۱۵	محمد طالبی، صدیقه گیلانی	خراسان رضوی
۲	ابوذر نخعی مطلق، مصطفی امیدی	سیستان و بلوچستان	۱۶	مهناز پیمان	ایلام
۳	افسانه نژادزاده	خوزستان	۱۷	میکائیل صدقی	اردبیل
۴	اکرم سلامی، نسرین سربخشی	آذربایجان شرقی	۱۸	نرگس رشادتی جونبی	البرز
۵	ایرج پویا	آذربایجان غربی	۱۹	کامران کبیری	چهارمحال‌وبختیاری
۶	بهروز اسکندری	همدان	۲۰	اعظم دهقانی	شهرستان‌های تهران
۷	حجت رنگین، زهرا شمسی گل‌سفیدی	قزوین	۲۱	رباب افشاری	زنجان
۸	حسین باقرزاده	هرمزگان	۲۲	احسان ضیاءالحق، رویا جعفری، مهرناز میراولیایی، محمّدرضا قربانی، رویا رزّاقی، ناهید ابراهیم‌زاده، سعیده خانعلی، مینا غنی‌زاده، افسانه فراهانی، مهدی تیموری، جمیله رضوانی‌نژاد، نگار اسلام‌نژاد، لیلا حقانی، الهام آرمان‌فر، مهدی بهمنی، مریم عزیزی، مهدی یزدان‌مهر	شهر تهران
۹	پیام‌سراجی،فتحعلی‌فنایی‌نجف‌آبادی	اصفهان			
۱۰	حسین ایمانلو	فارس			
۱۱	سینا نعمتی	سمنان			
۱۲	عفت شیخ‌زاده بیدگلی	قم			
۱۳	فرزانه ثنائی‌نژاد	خراسان جنوبی			
۱۴	محسن امیری بیدمشکی	کرمان			