پودمان چهارم

تحلیل نیروهای دینامیکی

تصویر بالا موشک سجیل در هنگام شلیک را نشان می‌دهد این موشک توسط متخصصان سازمان هوافضای وزارت دفاع و شهید حسن طهرانی مقدم طراحی شد. این موشک بیش از ۲۵۰۰ کیلومتر برد دارد. وزن این موشک بالغبر ۲۶ تن است. سرعت حرکت آن برابر ۱۴ ماخ (معادل ۴ کیلومتر بر ثانیه) می‌باشد. این سرعت بالا، رهگیری این موشک را غیرممکن می‌سازد. بی‌شک این دستاورد چشمگیر مهندسی قویاً بر اساس کاربرد اصول دینامیک برای حرکت ذرات و اجسام صلب، استوار است و علم دینامیک در پرتاب موفقیت‌آمیز این موشک نقش کلیدی را ایفا می‌کند.

تحلیل حرکت اجسام صلب

هدف از این شایستگی عبارت‌اند از:

- تحلیل شاخه‌های دینامیک.
- تحلیل حرکت دو بعدی و محاسبات مربوط.
- بررسی و تحلیل حرکت پرتابه.
- بررسی و تحلیل حرکت دایره‌ای یکنواخت.
- تحلیل تفاوت ها حرکت ذره با حرکت جسم صلب.
- بررسی مفهوم مرکز جرم.
- بررسی مفهوم ممان اینرسی.
- تحلیل برخی از کاربردهای اصول دینامیک در صنعت(ژیرسکوپ و چرخ طیار)
- بررسی مفهوم ارتعاش و پدیده تشدید.
- بررسی مفهوم سرعت بحرانی شفت.

استاندارد عملکرد

پس از اتمام واحد یادگیری و کسب شایستگی تحلیل حرکت اجسام صلب، هنرجویان قادر خواهند بود تا انواع حرکت را شناسایی کرده و همچنین با مفاهیم ارتعاشات و پدیده تشدید آشنا می‌شوند.

دینامیک

دینامیک شاخه‌ای از مکانیک است که به بررسی حرکت اجسام تحت اثر نیروها می‌پردازد. در مهندسی، دینامیک را معمولاً به دنبال استاتیک که به بررسی تعادل اجسام ساکن تحت اثر نیروها می‌پردازد، می‌آموزند. دینامیک به دو بخش مجزای سینماتیک و سینتیک تقسیم‌بندی می‌گردد. در سینماتیک، حرکت اجسام بدون در نظر گرفتن نیروهای مؤثر در حرکت مطالعه می‌شود، ولی در سینتیک حرکت اجسام در ارتباط با نیروهای وارد برآنها بررسی می‌گردد.

ما در فیزیک سال دوم با انواع حرکت یک بعدی و عامل به‌وجود آورندهٔ آنها آشنا شدیم. در این فصل به انواع دیگر حرکت، حرکت در دو بعد و سه بعد آشنا می‌شویم.

فیلم

مشاهده فیلم یادآوری بردار.

فیلم

مشاهده فیلم مشتق.

فیلم

مشاهده فیلم یادآوری حرکت یک بعدی.

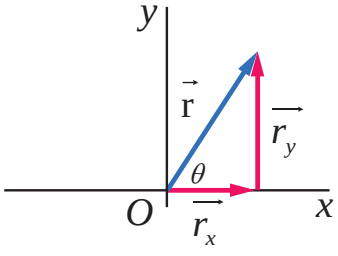
حرکت در دو بعد و سه بعد

حرکت در دو بعد یکی از عام‌ترین حرکت‌هایی است که به‌طور روزمره با آن مواجه می‌شویم. حرکت یک اتومبیل در یک پیچ و یا حرکت یک گلوله پس از شلیک و یا رها شدن یک تیر از کمان از نمونه مثال‌هایی است که می‌توان از حرکت در دو بعد نام برد. به‌طور کلی، حرکت در دو بعد ترکیبی از دو حرکت یک بعدی در دو راستای متفاوت x و y می‌باشد. در این فصل می‌خواهیم حرکت دو بعدی بررسی کنیم. بسیاری از مفاهیم مانند موقعیت، سرعت و شتاب که در حرکت یک بعدی مطرح شد، در حرکت چند بعدی نیز به‌کار بسته می‌شود، ولی اکنون این مفاهیم به خاطر ابعاد اضافی کمی پیچیده‌ترند.

موقعیت و جابه‌جایی

در فیزیک سال دوم دریافتیم که حرکت یک بعدی در راستای یک خط راست توسط بردار موقعیت بر حسب زمان قابل توصیف است. حال ما در این فصل از مفهوم بردار موقعیت برای توصیف حرکت در دو بعد استفاده می‌کنیم.

در واقع یک روش کلی برای مکان‌یابی جسم ذره‌ای شکل، بردار موقعیت r است و آن برداری است که از یک نقطهٔ مرجع (معمولاً مبدأ یک دستگاه مختصات) تا جسم رسم می‌شود. بردار موقعیت را می‌توان به دو بردار در راستای محور x و y مطابق با شکل ۱ تجزیه کرد.



شکل ۱ــ بردار موضع r برای جسم p، جمع برداری مؤلفه‌های برداری آن است.

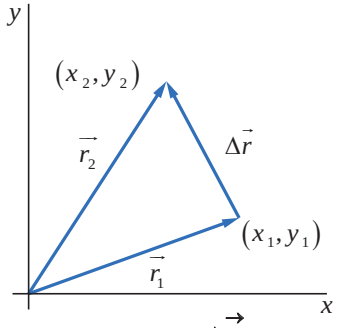
$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y \quad (۱)$$

$$r_x = r\cos\theta \quad (۲)$$

$$r_y = r\sin\theta \quad (۳)$$

که در آن r_x و r_y به ترتیب مؤلفه‌های بردار موقعیت در راستای x و y می‌باشد.

هنگامی که جسم حرکت می‌کند، بردار موقعیت، چنان تغییر می‌کند که همیشه از مبدأ به سوی جسم باشد. اگر بردار موقعیت جسم در لحظه t، برابر با $r_۱$ و بردار موقعیت در لحظه $t_t+\Delta t$، برابر با $r_۲$ باشد آنگاه جابه‌جایی Δr در بازه زمانی Δt عبارت است از:



شکل ۲ـ بردار جابه‌جایی $\Delta\vec{r}$ از تفاضل بردار موقعیت در لحظهٔ اول و لحظهٔ دوم به‌دست می‌آید.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_۲ - \vec{r}_۱ \quad (۴)$$

بردار جابه‌جایی را نیز می‌توان به دو بردار در راستای x و y تجزیه کرد.

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_x + \Delta\vec{r}_y \quad (۵)$$

که در آن $\Delta\vec{r}_x$ و $\Delta\vec{r}_y$ به ترتیب مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی در راستای x و y می‌باشند که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta\vec{r}_x = x_۲ - x_۱ \quad (۶)$$

$$\Delta\vec{r}_y = y_۲ - y_۱ \quad (۷)$$

فعالیت

ذره‌ای در آغاز حرکت در نقطه (۳,۲-) و در پایان حرکت در نقطه (۹,۲) قرار دارد. مطلوب است محاسبه بردار جابه‌جایی؟

فعالیت

اگر موقعیت یک ذره در لحظه $t_۲$ برابر با (۵,۸) و مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی به ترتیب $\Delta\vec{r}_x = ۵$ و $\Delta\vec{r}_y = ۷$ باشد. مطلوب است تعیین بردار موقعیت اولیه؟

فعالیت

دو گلولهٔ A و B در صفحهٔ XOY قرار دارند مکان آنها در SI به‌صورت $\begin{cases} x_A = ۸t - ۶(m) \\ y_A = ۳t(m) \end{cases}$ و $\begin{cases} x_B = ۱۸(m) \\ y_B = ۹(m) \end{cases}$ است یک ثانیه قبل از برخورد فاصله دو گلوله از هم چند متر است؟

سرعت لحظه‌ای و سرعت میانگین

همانگونه که از فیزیک سال دوم به‌یاد داریم، سرعت متوسط عبارت است از تغییرات ذره بر حسب زمان. حرکت دوبعدی نیز همانند حرکت تک بعدی است با این تفاوت که در این حرکت سرعت متوسط به صورت نسبت تغییرات بردار موقعیت برحسب زمان تعریف می‌گردد. اگر ذره‌ای جابه‌جایی Δr را در بازده زمانی Δt طی کند، آنگاه سرعت میانگین آن برابر است با:

$$\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y} \qquad ۸$$

که در آن $\vec{v}_x$ و $\vec{v}_y$ به‌ترتیب مؤلفه‌های سرعت میانگین در راستای x,y است که به‌صورت زیر تعیین می‌شود.

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta r_x}{\Delta t} \qquad ۹$$

$$\bar{v}_y = \frac{\Delta r_y}{\Delta t} \qquad ۱۰$$

فعالیت

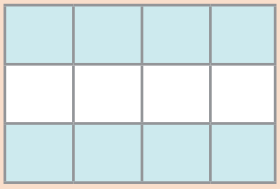
اگر پرنده‌ای از مختصات $A:(-2m , 4m , -3m)$ به مختصات $B:(6m , -2m , -3m)$ پرواز کند.

الف) بردار جابه‌جایی Δr برحسب بردارهای یکه چیست؟

ب) آیا بردار جابه‌جایی Δr با یکی از صفحه‌های مختصات موازی است؟ اگر چنین است با کدام صفحه؟

ج) اگر مدت زمانی که طول می‌کشد پرنده از نقطه A به نقطه B برسد برابر با ۱۰ ثانیه باشد. سرعت متوسط پرنده در این حرکت برابر با چند m/s است؟

د) بردار جابه‌جایی و بردار سرعت متوسط را در صفحهٔ شطرنجی رسم کنید. بردار جابه‌جایی و سرعت متوسط با هم چه ارتباطی دارند؟



فعالیت

هواپیمایی از شهر A، ۴۱۰ کیلومتر به طرف شرق پرواز می‌کند و در مدت ۴۵ دقیقه به B می‌رسد. سپس ۸۲۰ کیلومتر به طرف جنوب پرواز می‌کند و در مدت یک ساعت و ۳۰ دقیقه پرواز به شهر C می‌رسد. مطلوب است:

الف) جهت بردار جابه‌جایی کل مسیر و بزرگی آن.

ب) بردار سرعت متوسط.

ج) اندازه سرعت متوسط.

سرعت لحظه‌ای V برابر با مقدار $\bar{v}$ در هنگامی که در حد Δt به سمت صفر میل کند.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \qquad ۱۱$$

همان‌طور که از ریاضیات به یاد داریم رابطهٔ ۱۱ معادل مشتق بردار جابه‌جایی نسبت به زمان است. از همین روی سرعت لحظه‌ای را می‌توان به‌صورت مشتق بردار جابه‌جایی برحسب زمان تعریف کرد.

$$v = \frac{dr}{dt} \qquad ۱۲$$

بردار سرعت لحظه‌ای را نیز می توان به بردارهای سرعت لحظه‌ای در راستای x و y تجزیه کرد.

$$\vec{v} = \vec{v_x} + \vec{v_y} \qquad ۱۳$$

که در آن $\vec{v}_x$ و $\vec{v}_y$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dy} \qquad ۱۴$$

شکل ۳ مسیر حرکت ذرهٔ p را نشان می‌دهد که محدود به صفحهٔ xy است.هنگامی که ذره در امتداد منحنی به سمت راست حرکت می کند، بردار موقعیت آن به طرف راست می‌لغزد. در t_1 بردار موقعیت $\vec{r}_1$ و در زمان $t_1+\Delta t$ بردار موقعیت $\vec{r}_2$ است. جابه‌جایی ذره در مدت زمان Δt برابر با Δr می‌باشد. سرعت میانگین ذره $\bar{v}$ در مدت Δt، همان‌گونه در فعالیت نشان داده شد، در همان جهت $\Delta \vec{r}$ است. اگر $\Delta \vec{r}$ به سمت صفر میل کند سه اتفاق رخ می‌دهد.

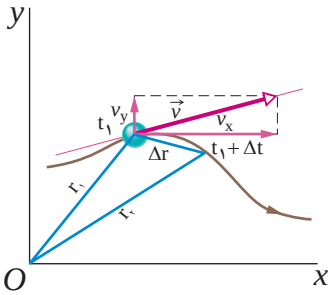
۱ بردار $\vec{r}_2$ در شکل ۳ به‌طرف $\vec{r}_1$ می‌رود. به طوری‌که Δr به صفر میل می کند.

۲ جهت بردار $\Delta \vec{r}$ و همچنین جهت بردار $\bar{v}$ به سوی جهت خط مماس در شکل ۳ میل می کند.

۳ سرعت میانگین $\bar{v}$ به سرعت لحظه‌ای v میل می‌کند.

آنچه در اینجا مهم است اینکه $\bar{v}$ در راستای خط مماس قرار می‌گیرد. از این رو v نیز همان راستا را خواهد داشت. یعنی:

سرعت لحظه‌ای v یک ذره همیشه بر مسیر ذره مماس است.



شکل ۳ــ موقعیت ذره p در امتداد مسیرش در لحظه t و هم در لحظه $t_1+\Delta t$ و پس از آن. بردار Δr جابه‌جایی ذره در مدت Δt است. مماس بر مسیر ذره در t_1 نشان داده شده است.

فعالیت

معادله سرعت متحرکی در SI به‌صورت $\vec{v}_x = 2t(m/s)$ $\vec{v}_y = -1(m/s)$ بزرگی سرعت لحظه‌ای در زمان ۲ ثانیه چند متر بر ثانیه است؟

فعالیت

معادلهٔ بردار مکان متحرکی که در صفحه حرکت می کند، در SI به صورت $x=(2t-1)m$, $y=(t^2-4t)m$ است.
در لحظه‌ای که سرعت متحرک به کمترین مقدار خود می رسد، فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات چند متر است؟

فعالیت

معادله‌های مکان متحرکی در SI به صورت $\begin{cases} x = 3t + 5 \\ y = \sqrt{3}t^2 - 8 \end{cases}$ است در کدام لحظه (برحسب ثانیه) بردار سرعت متحرک با محور x زاویه ۳۰ درجه می‌سازد؟

شتاب و شتاب میانگین

هرگاه سرعت ذره‌ای در بازده زمانی Δt از $\vec{v}_1$ به $\vec{v}_2$ تغییر کند شتاب میانگین $\bar{a}$ آن در مدت Δt عبارت است از:

$$\bar{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad ۱۵$$

در صورت چند بعدی شدن حرکت شتاب متوسط در راستاهای مختلف محور مختصات دارای مؤلفه است از همین روی با تجزیه بردار شتاب متوسط در راستاهای محور مختصات داریم:

$$\bar{a} = \bar{a}_x - \bar{a}_y \qquad ۱۶$$

که در آن $\bar{a}_x$ ، $\bar{a}_y$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\bar{a}_y = \frac{v_{y_{t+\Delta t}} - v_{y_t}}{\Delta t} \qquad \bar{a}_x = \frac{v_{x_{t+\Delta t}} - v_{x_t}}{\Delta t} \qquad ۱۷$$

اگر Δt به سمت صفر میل کند، آنگاه در حد، $\bar{a}$ به شتاب لحظه‌ای a میل می‌کند.

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad ۱۸$$

نکته‌ای که باید به آن توجه داشت این است که اگر سرعت از نظر بزرگی یا جهت تغییر کند، شتاب به‌وجود می‌آید. با قرار دادن v در معادله ۱۸ داریم:

$$a = \bar{a}_x + \bar{a}_y \qquad ۱۹$$

که درآن سه مؤلفهٔ نرده‌ای شتاب عبارت‌اند از:

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad ۲۰$$

مثال

بردار سرعت ذره‌ای که در صفحهٔ x-y حرکت می‌کند، در لحظهٔ $t=10s$ به‌صورت $v_x=0/1(m/s)$ و $v_y=2(m/s)$ باشد و در لحظه $t=10/1s$ به صورت $v_x=-0/1(m/s)$ و $v_y=1/8(m/s)$ است مطلوب است محاسبه مؤلفه‌های بردار شتاب متوسط در این مدت زمان طی شده؟

$$\left.\begin{array}{l} t=10s \rightarrow \begin{array}{l} v_x=0/1 \\ v_y=2 \end{array} \\ t=10/1 \rightarrow \begin{array}{l} v_x=-0/1 \\ v_y=1/8 \end{array} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{\Delta v_x}=-0/2(m/s) \\ \overrightarrow{\Delta v_y}=-0/2(m/s) \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \overrightarrow{a_x}=\dfrac{\overrightarrow{\Delta v_x}}{\Delta t}=\dfrac{-0/2}{0/1}=-2(m/s^2) \\ \overrightarrow{a_y}=\dfrac{\overrightarrow{\Delta v_y}}{\Delta t}=\dfrac{-0/2}{0/1}=-2(m/s^2) \end{array}$$

$$\Delta t=10/1-10=0/1s$$

مثال

حرکت دوبعدی یک ذره با رابطه‌های $x=t^2-4t+20$ و $y=t^3$ که در آن x و y برحسب متر است مشخص شده است. مطلوب است:

الف) محاسبهٔ بردار سرعت ذره و اندازه بردار سرعت در لحظه $t=3s$؟

ب) محاسبهٔ بردار شتاب و اندازه بردار شتاب در لحظه $t=3s$؟

$$\begin{cases} v_x=\dfrac{dx}{dt}=2t-4 \xrightarrow{t=3s} v_x=-2(m/s) \\ v_y=\dfrac{dy}{dt}=3t^2 \xrightarrow{t=3s} v_y=27(m/s) \end{cases} \rightarrow |v|=\sqrt{(-2)^2+(27)^2}=27/07(m/s)$$

$$\begin{cases} a_x=\dfrac{dv_x}{dt}=2(m/s^2) \\ a_y=\dfrac{dv_y}{dt}=6t \xrightarrow{t=3s} a_y=18(m/s^2) \end{cases} \rightarrow |a|=\sqrt{(2)^2+(18)^2}=18/11(m/s^2)$$

فعالیت

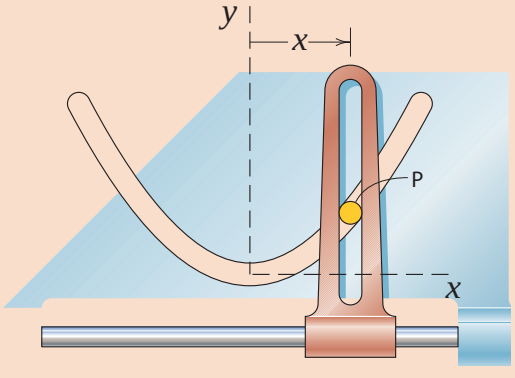
پین A مطابق شکل مقابل در داخل شیاری بامعادله سهمی $y=\dfrac{x^2}{2}$ می‌لغزد. اگر سرعت حرکت بازو در راستای x برابر با $2m/s$ باشد مطلوب است:

الف) محاسبه هریک از مؤلفه‌های سرعت در زمان $2s$؟

ب) اندازه سرعت در زمان $2s$؟

ج) محاسبه هریک از مؤلفه‌های شتاب در زمان $2s$؟

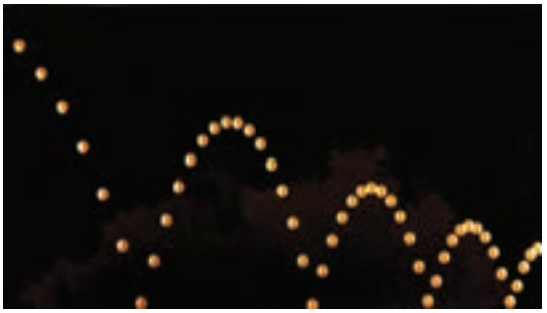
د) اندازه شتاب در زمان $2s$؟



حرکت پرتابی

یکی از کاربردهای مهم سینماتیک دوبعدی مسئلهٔ حرکت پرتابه است. ذره‌ای را در نظر بگیرید که در فضا با سرعت اولیه پرتاب شود این ذره می تواند توپ بسکتبال یا یک توپ جنگی باشد. در بررسی مقدماتی این موضوع، از نیروی مقاومت هوا چشم‌پوشی می کنیم. علاوه بر این فرض می کنیم شتاب جاذبه در طول مدت حرکت ثابت باقی می‌ماند.

شکل ۴ـ پرتاب توپ به سمت حلقه بسکتبال یک مثال بارز از حرکت پرتابه است.



شکل ۵ـ نمودار استروبوکس یک توپ گلف که از سطح سفت وا می‌جهد. میان ضربه‌ها، توپ حرکت پرتابی دارد.

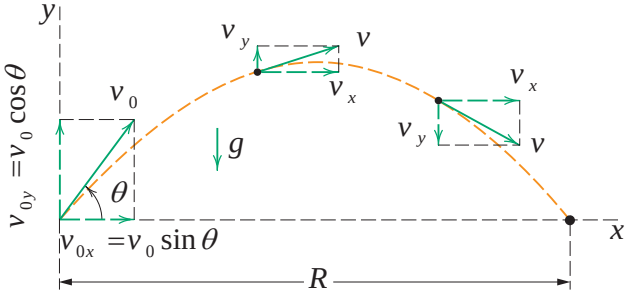
شکل ۶ـ حرکت توپ جنگی نمونه‌ای از حرکت پرتابه است.

شکل ۷ مسیر حرکت یک پرتابه را نشان می‌دهد. پرتابه با سرعت اولیهٔ $\vec{v}_{\circ}$ پرتاب می‌شود که می‌توان سرعت اولیه در راستای محور مختصات تجزیه کرد و به این صورت نوشت:

$$v_{\circ x} = v_{\circ} \cos\theta$$
$$v_{\circ y} = v_{\circ} \sin\theta$$

۲۱

در حین حرکت دوبعدی پرتابه، بردار موقعیت پرتابه r و بردار سرعت v دائماً تغییر می کند ولی بردار شتاب g ثابت و همواره به‌طور قائم روبه پایین است. به همین دلیل زاویهٔ بین بردار شتاب و بردار سرعت ثابت نیست و در ضمن حرکت تغییر می کند.



شکل ۷ـ مسیر حرکت پرتابه‌ای که در $x_{\circ}=0$ و $y_{\circ}=0$ با سرعت اولیهٔ $v_{\circ}$ پرتاب شده است. در این شکل سرعت اولیه و سرعت در نقاط مختلف همراه با مؤلفه‌هایشان در امتداد مسیر نشان داده شده است. توجه کنید مؤلفهٔ افقی سرعت ثابت باقی می‌ماند ولی مؤلفهٔ قائم سرعت به‌طور پیوست تغییر می کند.

فعالیت کارگاهی

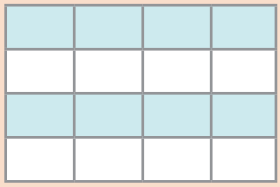
دو توپ پینگ پنگ را بر روی میز قرار داده یکی را از لبهٔ میز رها کنید و دیگری را بر روی میز با سرعت اولیه رها کنید تا سقوط کند و زمان برخورد هر توپ با زمین را اندازه‌گیری کنید.

الف) بردار سرعت اولیهٔ دو توپ را در لبهٔ میز در صفحهٔ شطرنجی رسم کنید.

ب) زمان برخورد دو توپ را با هم مقایسه کنید.

ج) اگر سرعت رها کردن توپ دوم بر روی میز افزایش یابد کدام مؤلفهٔ سرعت در هنگام سقوط افزایش می‌یابد؟

د) آزمایش بالا را با سرعت‌های مختلف برای توپ دوم تکرار کنید و زمان برخورد توپ‌ها با زمین را ثبت کنید. زمان‌ها را با یکدیگر مقایسه کنید.



حرکت افقی و حرکت قائم مستقل از یکدیگرند، یعنی روی یکدیگر هیچ تأثیری ندارند.

ویژگی است که بررسی حرکت پرتابه‌ای را بسیار ساده می‌کند. این ویژگی‌عبارت است از:

حرکت‌های پرتابی به‌نظر پیچیده می‌آیند. اما این حرکت همان‌گونه که در آزمایش بالا نشان داده‌شده دارای این ویژگی این امکان را می‌دهد تا یک مسئلهٔ دوبعدی حرکت را به دو مسئلهٔ ساده‌تر یک‌بعدی جداگانه، یکی برای حرکت افقی و دیگری برای حرکت قائم تجزیه کرد. حال برای تحلیل حرکت پرتابه ابتدا به سراغ حرکت در راستای افق می‌رویم. همان‌طور که در شکل ۷ نشان داده‌شده است چون هیچ شتابی در جهت افقی وجود ندارد، مؤلفهٔ افقی $(v_x)_\circ$ سرعت اولیه در سراسر حرکت بدون تغییر می‌ماند. به‌عبارت‌دیگر درحرکت پرتابه در راستای افق ما یک حرکت تک‌بعدی با سرعت ثابت داریم بنابراین معادله حرکت در این راستا به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$x - x_\circ = v_\circ \cos(\theta)t \qquad ۲۲$$

از آنجا که در راستای قائم شتاب جاذبه g وجود دارد، مقدار سرعت در راستای قائم همواره تغییر می‌کند. به عبارت دیگر در راستای قائم حرکت به‌صورت یک‌بعدی با شتاب ثابت می‌باشد. از همین رو معادله حرکت در این راستا به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

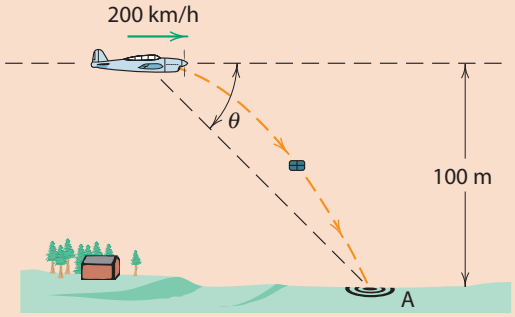
$$y - y_\circ = v_\circ \sin(\theta)t - \frac{۱}{۲}gt^۲ \qquad ۲۳$$

یکی دیگر از معادلات سودمند در تحلیل حرکت پرتابه که توصیف کنندهٔ تغییرات سرعت در راستای قائم می‌باشد معادلهٔ زیر است.

$$v_{\circ y} = v_\circ \sin\theta - gt \qquad ۲۴$$

همان‌طور که در شکل ۷ و معادلهٔ ۲۴ نشان داده شده مؤلفهٔ قائم سرعت درست مانند توپی که به‌طور قائم رو به بالا پرتاب شده است رفتار می‌کند. پرتابه در آغاز رو به بالا حرکت می‌کند و بزرگی سرعت آن به‌طور یکنواخت به صفر کاهش می‌یابد. سپس مؤلفهٔ قائم سرعت معکوس می‌شود و بزرگی آن با گذشت زمان افزایش می‌یابد.

فعالیت



خلبان یک هواپیما که یک بسته پستی را به مقصد دور افتاده‌ای حمل می‌کند، می‌خواهد در حال حرکت بسته مزبور را در لحظه مناسب رها کند تا به داخل سبد پستی A بیفتد. در لحظه رها کردن بسته زاویهٔ دید خلبان نسبت به هدف θ چقدر باید باشد؟ هواپیما با سرعت ۲۰۰ کیلومتر بر ساعت در ارتفاع ۱۰۰ متری به صورت افقی پرواز می‌کند؟

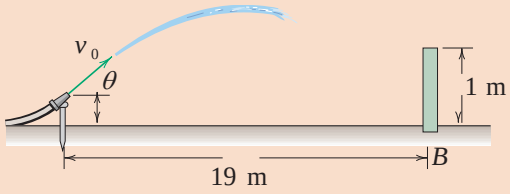
برد افقی پرتابه R در شکل ۷ نشان داده شده، مسافت پیموده شده افقی در هنگامی است که پرتابه به سطح اولیهٔ پرتاب خود بر می‌گردد. در حرکت پرتابه مقدار برد مطابق با فرمول زیر محاسبه می‌شود

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta$$ ۲۵

توجه داشته باشید که R هنگامی بیشینه است که $\sin 2\theta = 1$ باشد، که این امر زمانی اتفاق می‌افتد که $\theta = 45^\circ$ باشد.

برد افقی به ازای زاویهٔ پرتاب 45° بیشینه است.

فعالیت



آب خروجی از شیلنگ آتش‌نشانی دارای سرعت $v_0 = 12\,m/s$ و زاویه $\theta = 40^\circ$ می‌باشد. محل فرود آمدن آب را نسبت به نقطه B پای دیوار حساب کنید. از اثرات ضخامت دیوار صرف نظر کنید.

آیا می دانید

در سال ۲۰۰۸ رابی مدیسون موتورسوار استرالیایی با انجام پرشی به طول ۱۰۶/۹۸ متر، بلندترین پرش را در گینس به نام خود ثبت کرد. در این پرش زاویه سکوی پرش برابر با 45° بود. برای اینکه رابی این پرش را با موفقیت انجام داده باشد. سرعتش بر روی سکوی پرش برابر با چند کیلومتر بر ساعت بوده؟

فیلم

شبیه‌سازی حرکت پرتابه در نرم‌افزار maplesim

حرکت دایره‌ای یکنواخت

حرکت دایره‌ای یکی از مهم‌ترین حرکت‌ها در دینامیک دوبعدی است. که ما به‌طور روزمره با آن سروکار داریم. حرکت خودرو در پیچ‌ها جاده‌ها یا حرکت ترن هوایی و یا چرخش محور موتور نمونه‌ای از این حرکت‌ها هستند. یک ذره وقتی در حرکت دایره‌ای یکنواخت است که به دور دایره یا کمانی دایره‌ای با سرعت ثابت حرکت کند. گرچه اندازه سرعت تغییر نمی‌کند، ولی ذره شتاب دارد. این واقعیت شاید شگفت انگیز باشد زیرا معمولاً شتاب را به عنوان افزایش یا کاهش سرعت تصور می‌کنیم. ولی درواقع $\vec{v}$ یک بردار است نه یک کمیت نرده‌ای. حتی اگر جهت v تغییر کند. شتاب وجود خواهد داشت و این چیزی است که در حرکت دایره‌ای یکنواخت پیش می‌آید.

از شکل ۹ برای یافتن بزرگی و جهت شتاب استفاده می‌کنیم. این شکل، ذره‌ای را در حرکت دایره‌ای یکنواخت با سرعت v روی دایره‌ای به شعاع r نمایش می‌دهد. بردارهای دو سرعت در دو نقطه p و q که نسبت به محور y متقارن هستند، رسم شده‌اند. این دو بردار v_p و v_q بزرگی V یکسانی دارند ولی چون در دو جهت مختلف قرار دارند، دو بردار متفاوت‌اند مؤلفهٔ x و y آنها عبارت‌اند از:

$$v_{px} = +v\cos\theta \qquad v_{py} = +v\sin\theta$$
$$v_{qx} = +v\cos\theta \qquad v_{qy} = -v\sin\theta$$

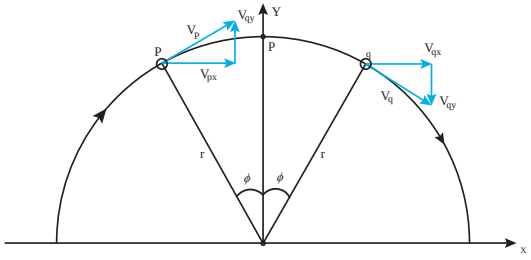
۲۶

شکل ۸ــ حرکت خودرو در پیچ‌های جاده نمونه‌ای از حرکت دایره‌ای با سرعت یکنواخت است.

زمان لازم برای اینکه ذره با سرعت ثابت از p به q برود عبارت است از:

$$\Delta t = \frac{\text{کمان } pq}{v} = \frac{r2\theta}{v}$$

۲۷



شکل ۹ــ ذره‌ای در حرکت دایره‌ای یکنواخت با سرعت ثابت v روی دایره‌ای به شعاع r. سرعت‌های v_p و v_q آن در نقاط p و q به فاصلهٔ برابر از محور y همراه با مؤلفه‌های سرعت در این نقطه نشان داده شده است. شتاب لحظه‌ای ذره در هر نقطه به سوی مرکز دایره قرار دارد و بزرگی آن $\frac{v^2}{r}$ است.

اکنون اطلاعات لازم برای محاسبه مؤلفه‌های شتاب میانگین $\bar{a}$ ذره موقع حرکت از p به q در شکل وجود دارد برای مؤلفهٔ x داریم:

$$\bar{a}_x = \frac{v_{qx} - v_{px}}{\Delta t} = \frac{v\cos\theta - v\cos\theta}{\Delta t} = 0 \qquad ۲۸$$

این نتیجه شگفت‌انگیز نیست زیرا از تقارن شکل روشن است که مؤلفهٔ x سرعت در p و q مقدار یکسانی دارد. برای مؤلفهٔ شتاب میانگین با استفاده از معادلهٔ ۲۷ داریم:

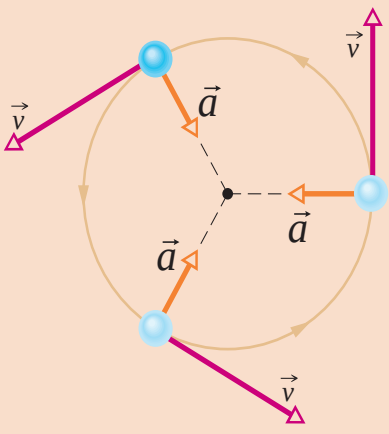
$$\bar{a}_y = \frac{v_{qy} - v_{py}}{\Delta t} = \frac{-v\sin\theta - v\sin\theta}{\Delta t} = -\frac{2v\sin\theta}{2r\frac{\theta}{v}} = -\left(\frac{v^2}{r}\right)\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) \qquad ۲۹$$

علامت منها حاکی از این است که این مؤلفهٔ شتاب در شکل ۹ به‌طور قائم به‌طرف پایین است. حال فرض می‌کنیم که زاویه θ در شکل کم شود و در حد به سمت صفر میل کند. این بدان معناست که نقاط p و q در شکل ۹ به نقطهٔ میانی آنها که به‌صورت نقطهٔ p در بالای دایره نشان داده شده نزدیک می‌شوند. شتاب میانگین $\bar{a}$ که هم‌اکنون مؤلفه‌هایش را پیدا کردیم، به شتاب لحظه‌ای a در نقطهٔ p میل می‌کند. جهت این بردار شتاب لحظه‌ای در نقطهٔ p در شکل رو به‌پایین، به‌سوی مرکز دایره در نقطه O است، زیرا جهت شتاب میانگین با کوچک‌تر شدن θ تغییر نمی‌کند. برای یافتن بزرگی بردار شتاب لحظه‌ای a به این واقعیت نیاز داریم وقتی که θ به صفر میل کند، نسبت $\sin\theta/\theta$ به یک میل می‌کند. از رابطه داده شده برای a_y در بالا خواهیم داشت:

$$a = \frac{v^2}{r} \qquad \text{شتاب مرکزگرا} \qquad ۳۰$$

نتیجه مهم

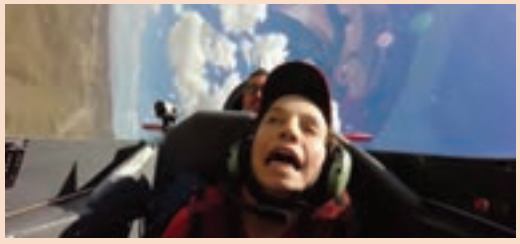
هرگاه ذره‌ای با سرعت ثابت روی دایره‌ای یا کمان دایره‌ای به شعاع r حرکت کند، شتاب ذره به سوی مرکز دایره قرار دارد و بزرگی ثابت آن برابر با $\frac{v^2}{r}$ است.



شکل ۱۰ــ بردار سرعت و شتاب برای ذره‌ای در حرکت دایره‌ای یکنواخت است. هر دو بزرگی ثابتی دارند. ولی جهت آن به‌طور پیوسته تغییر می‌کند.

فعالیت

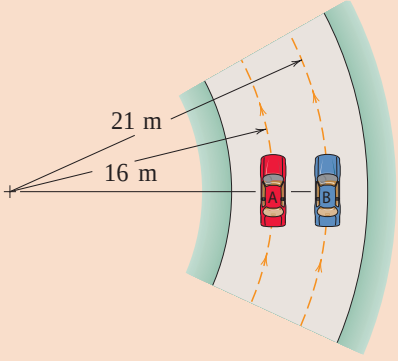
حرکت خون خلبان‌های هواپیماهای جنگنده در چرخش‌های خیلی شدید نگران‌کننده است. هنگامی‌که بدن خلبان در مانورها شتاب مرکزگرایی را تحمل می‌کند وقتی سر او به‌طرف مرکز انحنا است فشارخون مغزش کاهش می‌یابد و به کاهش عملکرد مغزش می‌انجامد. چند علامت هشداردهنده برای خلبان وجود دارد که از سرعت مانور بکاهد. هنگامی‌که شتاب مرکزگرا $2g$ یا $3g$ است. خلبان سنگینی احساس می‌کند. تقریباً در $4g$ بینایی خلبان به سیاهی و سفیدی تغییر می‌کند و دید تونلی محدود می‌شود یعنی فقط جلوی خود را می‌بیند. اگر این شتاب باقی بماند یا افزایش یابد. بینایی او از بین می‌رود و پس‌از آن خلبان بیهوش می‌شود. که این پدیده به فقدان هوشیاری بر اثر g موسوم است. شتاب مرکز گرای خلبانی که با جنگنده F ـ ۲۲ با سرعت $v = ۷۱۶ \frac{m}{s}$ یک کمان دایره‌ای به شعاع انحنای $r=۵/۸km$ را دور می‌زند، برحسب g چقدر است؟ آیا خلبان دچار فقدان هوشیاری بر اثر g می‌شود؟



همان‌گونه که از فیزیک سال دوم به یاد داریم عامل ایجاد شتاب، نیرو است. انجام حرکت دایره‌ای نیازمند ایجاد شتاب مرکز گرا است که عامل ایجاد این شتاب نیروی مرکز گرا می باشد. به‌طور مثال خودرو را به هنگام دور زدن در نظر بگیرد. برای اینکه خودرو بتواند به دور زدن خود ادامه دهد باید عامل به وجود آوردن شتاب مرکز گرا که همان اصطکاک چرخ‌های خودرو با زمین است قادر به ایجاد شتاب مرکز گرا مورد نیاز باشد. در صورتی‌که اصطکاک کمتر از حد مورد نیاز باشد خودرو بر روی سطح جاده می‌لغزد و قادر به ادامه حرکت دایره‌ای نیست.

فعالیت

دو خودرو مطابق شکل زیر در جاده‌ای در حال دور زدن هستند. شتاب مرکز گرای قابل ایجاد توسط اصطکاک برای اینکه خودرو ها نلغزند برابر با $0/88g$ است. مطلوب است تعیین ماکزیمم سرعت هر یک از خودور در هنگام دور زدن؟



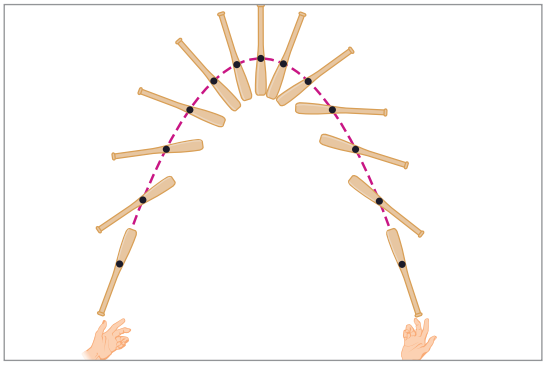
تحقیق کنید که چرا برخی از جاده‌ها را همراه با شیب عرضی می‌سازند.

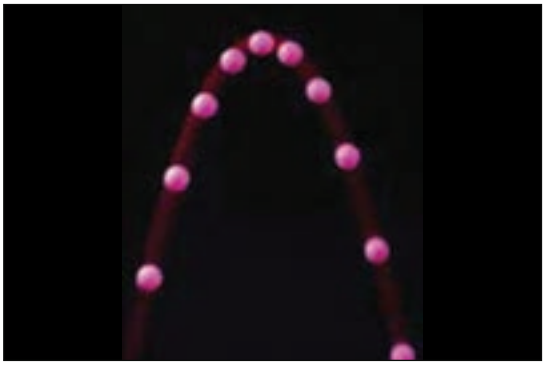
مرکز جرم

مهندسان علاقه مندند که به یک چیز پیچیده نگاه کنند و در آن، چیزی ساده و آشنا پیدا کنند. یک مورد آن، این است که اگر شما چوبی را به هوا بیاندازید. حرکت آن با چرخش همراه است و این حرکت، به وضوح، پیچیده‌تر از توپ به هوا پرتاب شدهٔ بدون چرخش است، که شبیه به یک ذره حرکت می‌کند. هرقسمت از چوب به طریق متفاوتی نسبت به قسمت‌های دیگر آن حرکت می‌کند، بنابراین چوب را نمی‌توان ذره‌ای در نظر گرفت که به‌هوا پرتاب شده است. بلکه مجموعه‌ای از ذرات است.

با وجود این، اگر شما دقیق‌تر نگاه کنید در چوب نقطهٔ خاصی وجود دارد که یک مسیر سهمی را طی می‌کند، درست مانند ذره‌ای که به هوا پرتاب می‌شود. در واقع آن نقطهٔ خاص به گونه‌ای حرکت می‌کند که گویا، کل جرم چوب در آن نقطه متراکم شده و وزن چوب فقط به آن نقطه اثر می‌کند. این نقطه، مرکز جرم چوب خوانده می‌شود. به‌طورکلی:

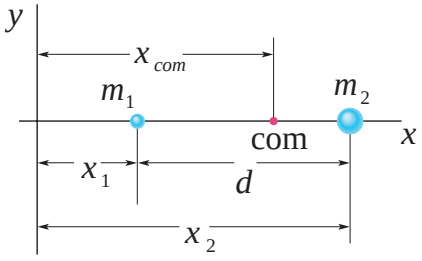
مرکز جرم یک جسم، نقطه‌ای است که گویا تمام جرم در آنجا متمرکز شده است و کلیهٔ نیروهای خارجی به‌آن نقطه اثر می‌کنند.





شکل ۱۱ــ یک توپ که به هوا پرتاب شده است یک سهمی را طی می‌کند. مرکز جرم یک چوب به هوا پرتاب شده است نیز همین‌طور عمل می‌کند، اما سایر نقاط چوب مسیرهای منحنی شکل پیچیده‌ای را می‌پیمایند.

حال ببینیم مرکز جرم دستگاه‌های متشکل از چند جسم چگونه به‌دست می‌آیند. با دستگاهی شامل چند ذره شروع می‌کنیم و سپس دستگاهی با تعداد ذرهٔ زیاد مانند چوب را بررسی می‌کنیم. شکل ۱۲ دو ذره به جرم‌های m_1 و m_2 را که به فاصلهٔ d از یکدیگر قرار دارند نشان می‌دهد. به‌طور دلخواه مبدأ مختصات که به فاصلهٔ x_1 از جرم m_1 قرار گرفته است انتخاب می‌کنیم. موقعیت مرکز جرم نسبت به دستگاه مختصات انتخابی به‌صورت زیر محاسبه می شود.



شکل ۱۲ــ دو ذره به جرم‌های m_1 و m_2 که به فاصله d ازیکدیگر قرار دارند.

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad (۳۱)$$

برای مجموعه‌ای از n ذره که در دو بعد توزیع شده باشند، مرکز جرم باید با دو مختصه مشخص شود. با تعمیم رابطهٔ ۳۱ داریم:

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \dots m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} \qquad ۳۲$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \dots m_ny_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}$$

یکی دیگر از روش‌های تعیین مرکز جرم، آویزان کردن مجموعه‌ای از نخ می‌باشد. در این روش ابتدا مجموعه را از یک نقطه آویزان می‌کنیم و خط امتداد دهندهٔ نخ را بر روی جسم رسم می‌کنیم. بار دیگر مجموعه را از نقطه‌ای دیگر آویزان می‌کنیم و امتداد نخ را رسم می‌نماییم. محل تقاطع دو خط محل مرکز جرم می‌باشد.

فیلم

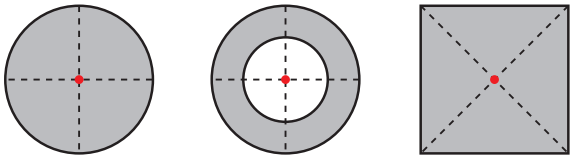
آزمایش تعیین مرکز جرم

فعالیت

مرکز جرم مجموعهٔ ذرات را در جدول زیر با استفاده از آزمایش و روابط گفته شده به‌دست آورید؟

شماره	جرم ذرات	x(cm)	y(cm)	روابط		آزمایش	
				x=(cm)	y=(cm)	x=(cm)	y=(cm)
۱							

به‌دست آوردن مرکز جرم اجسام به‌هم پیوسته، مانند چوب کمی با به‌دست آوردن مرکز جرم سیستم ذرات متفاوت است. مرکز جرم اجسام پیوستهٔ متقارن در محل تقارن آنها قرار دارد. در زیر مراکز جرم اجسام متقارن با نقطهٔ قرمز رنگ مشخص شده است.

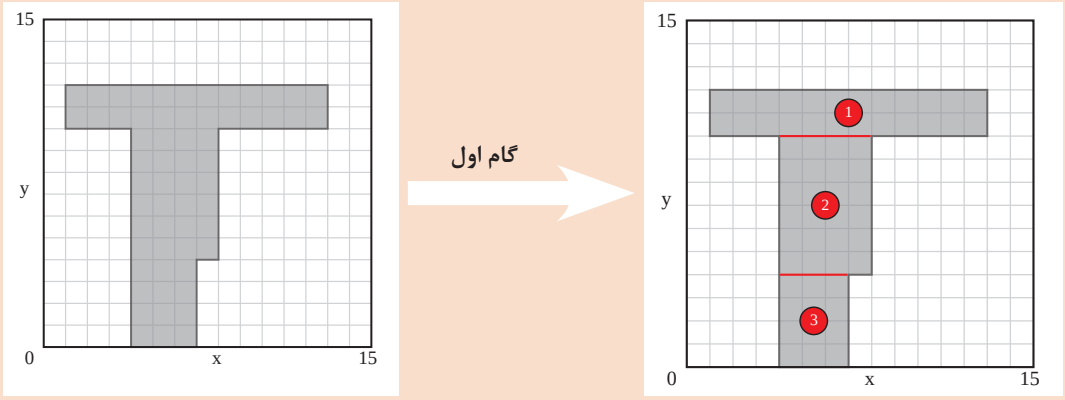


شکل ۱۳ــ مرکز جرم اجسام متقارن در محل تقارن آنها قرار دارد.

مرکزجرم اجسام غیرمتقارن را می‌توان با تجزیهٔ جسم به شکل‌های متقارن و به‌کارگیری فرمول ۳۲ به‌دست آورد. در این روش جسم، ابتدا به شکل‌های متقارنی که مرکز جرم آنها به راحتی قابل تعیین است تقسیم می‌شود. در گام دوم مرکز جرم هر یک از قسمت‌ها را نسبت به مبدأ مختصات محاسبه می‌کنیم و در گام بعدی جرم هر یک از قسمت‌ها با توجه به حجم هر قسمت و چگالی جسم محاسبه می شود و در مرحله پایانی با به کارگیری رابطهٔ ۳۲ مرکز جرم تعیین می‌شود.

مثال

مرکز جرم ورق زیر را نسبت به مبدأ مختصات تعیین کنید؟ چگالی ورق برابر با $7800\ kg/m^3$ و ضخامت ورق نیز برابر ۰/۱ متر است.



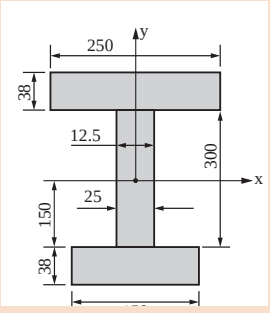
گام دوم

شماره قسمت	موقعیت طولی مرکز جرم	موقعیت عرضی مرکز جرم	مساحت A	جرم m=ρAh
۱	۷	۱۱	۲۴	۷۸۰۰×۲۴×۰/۱=۱۸۷۲۰
۲	۶	۷	۲۴	۷۸۰۰×۲۴×۰/۱=۱۸۷۲۰
۳	۵/۵	۲	۱۲	۷۸۰۰×۱۲×۰/۱=۹۳۶۰

$$x_{CG}=\frac{m_1x_{CG1}+m_2x_{CG2}+m_3x_{CG3}}{m_1+m_2+m_3}=\frac{18720\times7+18720\times6+9360\times5/5}{18720+18720+9360}=6/3(m)$$

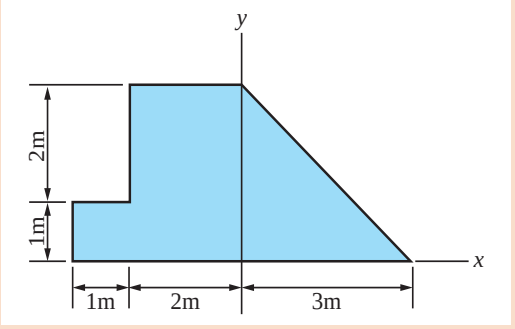
$$y_{CG}=\frac{m_1y_{CG1}+m_2y_{CG2}+m_3y_{CG3}}{m_1+m_2+m_3}=\frac{18720\times11+18720\times7+9360\times2}{18720+18720+9360}=7/6(m)$$

فعالیت



مرکز جرم شکل روبه‌رو نسبت به محور مختصات محاسبه کنید؟ تمامی ابعاد در شکل برحسب میلی‌متر است و ضخامت برابر با ۱۰ میلی‌متر و چگالی برابر با $۷/۵\times۱۰^{-۶}\ kg/m^۳$ است؟

فعالیت



مرکز جرم جسم روبه‌رو را بیابید؟ توجه شود که جنس قسمت مثلثی که با رنگ قرمز مشخص شده از سرب با چگالی $۱۱۴۰۰\ kg/m^۳$ و قسمت‌های آبی رنگ از جنس فولاد با چگالی $۷۸۰۰\ kg/m^۳$ است. ضخامت جسم برابر با ۱۰ میلی متراست. تمامی ابعاد در شکل برحسب متراست.

یکی دیگر از راه‌های محاسبهٔ مرکز جرم برای اجسام پیچیده استفاده از نرم افزارهای طراحی مانند سالیدورک است.

فیلم

تعیین مرکز جرم با استفاده از نرم افزار سالیدورک

فعالیت

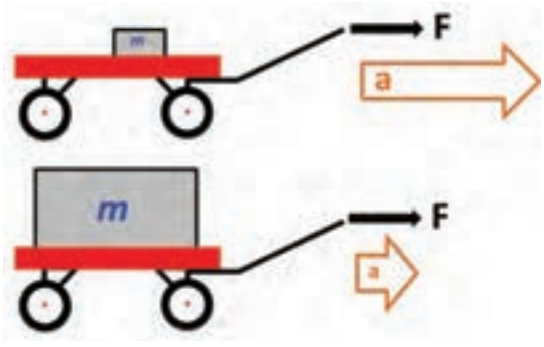
مرکز جرم شکل‌های زیر را با استفاده از نرم افزار سالیدورک مشخص نمایید.

مرکز جرم	تصویر

ممان اینرسی

همان‌گونه که از فیزیک به یاد داریم طبق قانون سوم نیوتن هر جسم تمایل دارد هر وضعیتی را که دارد حفظ نماید و در برابر تغییر وضعیت از خود مقاومت نشان دهد. به‌عنوان مثال اگر بخواهیم یک جسم را از حالت سکون با شتاب ثابت به حرکت در بیاوریم باید به آن نیرو وارد کنیم. طبق قانون دوم نیوتن مقدار نیروی مورد نیاز، با جرم جسم رابطهٔ مستقیم دارد. هر چه جسم سنگین‌تر باشد برای شتاب‌گیری نیاز به نیروی بیشتری دارد. به عبارت دیگر وزن جسم به‌صورت یک مقاومت در برابر افزایش سرعت و کاهش سرعت در حرکت‌های خطی عمل می‌کند.

به همین ترتیب برای به چرخش در آمدن جسم از حال سکون نیاز به وارد شدن گشتاور به محور دیسک است. و دیسک در برابر این تغییر وضعیت از خود مقاومت نشان می‌دهد. مقدار این مقاومت در برابر چرخش حول محور متناظر با ممان اینرسی آن جسم حول محور دوران است. هر چه ممان اینرسی حول محور دوران بیشتر باشد جسم سخت‌تر به چرخش درمی‌آید.



شکل ۱۴ــ جسم سنگین‌تر برای شتاب گیری نیاز به نیروی بیشتری دارد و در نتیجه از مقاومت بیشتری در برابر حرکت از خود نشان می‌دهد.

شکل ۱۵ــ برای به حرکت درآوردن چرخ با ممان اینرسی بیشتر، گشتاور بیشتری مورد نیاز است.

به‌طور کلی مقدار ممان اینرسی دیسک در حال دوران با مربع شعاع و جرم دیسک رابطهٔ مستقیم دارد.

$I \propto r^2$ ۳۳

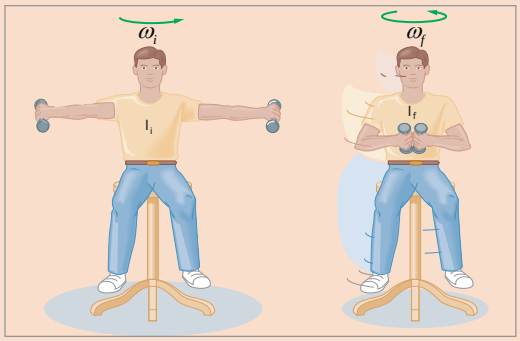
$I \propto m$ ۳۴

فعالیت

اگر جرم یک دیسک ثابت نگه داشته شود اما شعاع دیسک دو برابر شود ممان اینرسی دیسک چند برابر می‌شود؟

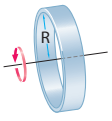
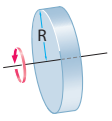
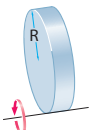
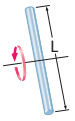
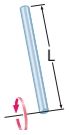
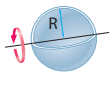
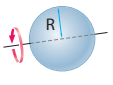
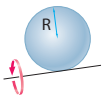
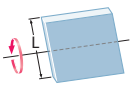
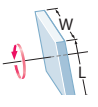
فعالیت

بر روی دیسک گردانی که در پارک‌ها قرار دارد به همراه وزنه‌ای قرار بگیرید و شروع به چرخش کنید و دست خود را مطابق شکل زیر در هنگام چرخش باز نگهدارید، سپس ناگهان دست خود را جمع کنید چه تغییر در سرعت چرخش خود مشاهده می‌کنید؟ علت آن چیست؟

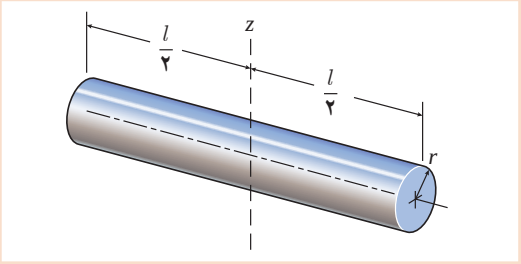


مقدار ممان اینرسی به شکل هندسی جسم و موقعیت محور دوران و توزیع جرم در جسم بستگی دارد. در جدول زیر فرمول مربوط به ممان اینرسی برای شکل‌های مختلف آورده شده است.

جدول ۱ـ جدول محاسبه ممان اینرسی

				
$I = MR^2$	$I = \frac{1}{2}MR^2$	$I = \frac{3}{2}MR^2$	$I = \frac{1}{12}ML^2$	$I = \frac{1}{3}ML^2$
				
$I = \frac{2}{3}MR^2$	$I = \frac{2}{5}MR^2$	$I = \frac{7}{5}MR^2$	$I = \frac{1}{12}ML^2$	$I = \frac{1}{12}M(L^2 + W^2)$

مثال

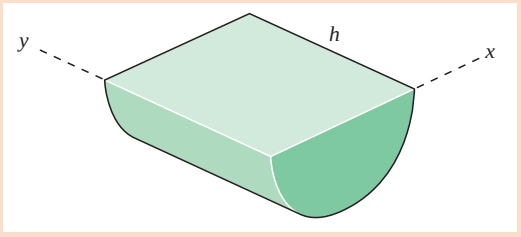


ممان اینرسی حول محور z در جسم روبه‌رو را محاسبه کنید؟ جرم میله برابر با ۱۰ کیلوگرم است.
(l=۲۰cm , r=۲cm)

با توجه به جدول بالا داریم:

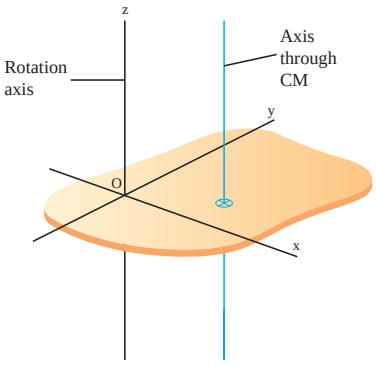
$$I_{zz}=\frac{۱}{۴}mr^{۲}+\frac{۱}{۱۲}ml^{۲}=\frac{۱}{۴}\times۱۰\times۰/۰۲^{۲}+\frac{۱}{۱۲}\times۱۰\times۰/۲^{۲}=۰/۰۳۴kgm^{۲}$$

فعالیت



ممان اینرسی شکل زیر را حول محور x حساب کنید؟ جرم جسم برابر با ۱۵ کیلوگرم و مقادیر h و r به‌ترتیب برابر با ۰/۵ و ۰/۱ متر می‌باشد.

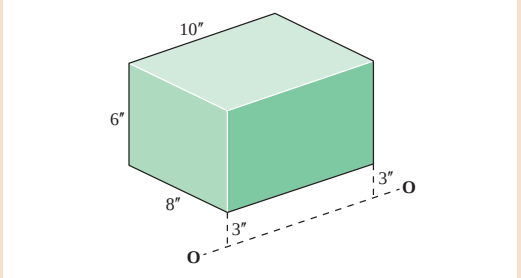
قضیه محورهای موازی



اگر ممان اینرسی جسمی حول محور مشخص باشد. با قضیه محورهای موازی می‌توان اینرسی چرخشی آن را حول محورهای دیگر که موازی با آن محور باشد به‌دست آورد.

$I_{z'}=I_z+md^{۲}$ ۳۵

فعالیت



ممان اینرسی جسم روبه‌رو حول محور O – O محاسبه کنید جرم مکعب برابر با ۱۰ پوند است؟

یکی دیگر از روش‌های محاسبهٔ ممان اینرسی استفاده از نرم افزارهای طراحی مانند سالیدورک می‌باشد.

فیلم

محاسبه ممان اینرسی با استفاده از نرم افزار سالیدورک

فعالیت

ممان اینرسی شکل‌های زیر را حول محورهای مختصات با استفاده از نرم افزار سالیدورک محاسبه نمایید؟

ممان اینرسی حول محورهای مختصات	تصویر

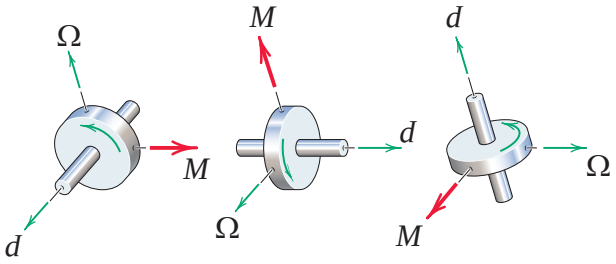
فعالیت

چرخ لنگر یا چرخ طیار (به انگلیسی: flywheel) یک وسیلهٔ مکانیکی دوار سنگین است که برای ذخیره‌سازی انرژی دورانی به کار می‌رود. چرخ لنگرها دارای ممان اینرسی بالایی هستند و بنابراین در برابر تغییر سرعت دورانی مقاومت می‌کنند. با انتقال انرژی به چرخ لنگر به آن گشتاوری اعمال می‌شودکه موجب بالا رفتن سرعت دورانی و در نتیجه بالا رفتن انرژی ذخیره‌شده در آن می‌گردد؛ و در حالت معکوس، چرخ لنگر می‌تواند انرژی گردشی را به بار مکانیکی منتقل کند که موجب پایین آمدن سرعت دورانی آن خواهد شد. این ویژگی سبب می‌شود تا چرخ طیار در دستگاه‌های صنعتی گوناگون به‌کار گرفته شود. یکی از موارد استفاده از چرخ طیار در دستگاه‌های پرس است. همان‌طور که در شکل زیر مشخص است در دستگاه پرس به محور دوار موتور یک دیسک سنگین با شعاع بزرگ متصل است. که این دیسک همان چرخ طیار است با روشن شدن دستگاه پرس چرخ طیار به همراه محور موتور شروع به دوران می‌کند و بخشی از انرژی موتور به‌صورت انرژی جنبشی دورانی در چرخ طیار ذخیره می‌شود و در زمانی که کاربر به دستگاه فرمان پرس کاری را می‌دهد مکانیزم پرس کاری دستگاه با قسمت دوار درگیر شده و سمبه به سمت پایین، جهت فرایند پرس‌کاری حرکت می‌کند. در حین فرایند پرس‌کاری سرعت چرخ طیار به همراه محور کاهش می‌یابد و بخش عظیمی از انرژی مورد نیاز برای فرایند پرس کاری توسط انرژی ذخیره شده در چرخ طیار تأمین می‌شود. با پایان یافتن فرایند پرس کاری در زمانی که دستگاه به صورت آزاد کار می‌کند انرژی موتور صرف افزایش سرعت دوباره چرخ طیار می‌شود و انرژی موتور نیز به‌صورت انرژی جنبشی در چرخ طیار ذخیره می‌گردد. با جست‌وجو در رایانه کاربردهای دیگر چرخ طیار را بیابید؟

حرکت ژیرسکوپی

یکی از جالب‌ترین مسائل دینامیک، حرکت ژیرسکوپی است. حرکت ژیرسکوپی هنگامی رخ می‌دهد که محوری که جسم حول آن می‌چرخد، خود حول محوری دیگر دوران کند. مانند چرخ خودرو که ضمن اینکه درحال چرخش به دور محور خود است در پیچ‌ها نیز همین محور دوران، حول محوری دیگر می‌چرخد. اگر چه توصیف کامل حرکت ژیرسکوپی بسیار پیچیده است، اما متداول‌ترین نمونهٔ آن مربوط به حالتی است که جسم با سرعت زاویه‌ای ثابت، حول محور خود بچرخد. آن محور نیز با سرعت ثابتی حول محور دیگر بگردد در این حالت در حین تغییر زاویهٔ محور دوران گشتاوری ایجاد می‌شود که این گشتاور باید توسط تکیه‌گاه‌های محور مهار شود و در صورت مهار نشدن این گشتاور محور در جهت گشتاور پدید آمده شروع به دوران می‌کند. در شکل صفحهٔ بعد راستای گشتاور پدید آمده با رنگ قرمز و علامت M نشان داده شده است. راستای گشتاور پدید آمده از قاعدهٔ دست راست پیروی می‌کند به‌گونه‌ای که چهار انگشت در جهت تغییر زاویهٔ محور دوران کف دست به سمت جهت چرخش دیسک و انگشت شست جهت گشتاور مقاوم

را نشان می‌دهد. مقدار این گشتاور با ممان اینرسی و سرعت چرخشی جسم در حال دوران و مقدار سرعت تغییر زاویه محور ارتباط مستقیم دارد.



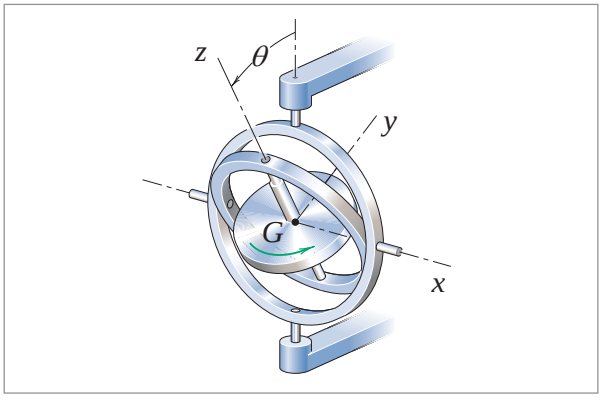
شکل ۱۶ــ جهت گشتاور مقاوم اعمالی به محور دوران بر مبنای جهت چرخش دیسک و جهت تغییر زاویهٔ محور و قاعده دست راست تعیین می‌گردد.

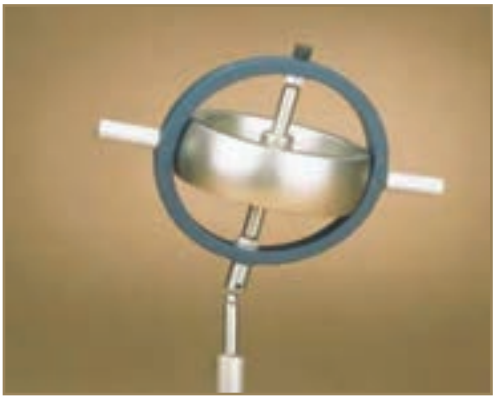
$m \propto I$ ۳۶

$m \propto p$ ۳۷

$m \propto \Omega$ ۳۸

تجهیزات گوناگونی بر مبنای اصول حرکت ژیرسکوپی کار می‌کنند. یکی از مهم‌ترین آنها قطب‌نمای ژیرسکوپی است. در شکل زیر یک نمونه قطب‌نمای ژیرسکوپی نمایش داده شده است. همان‌طور که در شکل مشخص شده است ژیرسکوپ از یک دیسک دورا که به‌وسیله دو حلقه در فضا معلق نگه داشته می‌شود تشکیل شده است. وظیفهٔ اصلی حلقه‌ها معلق نگه داشتن دیسک در فضا است به‌گونه‌ای که امکان اعمال گشتاور خارجی از طریق بدنه به دیسک وجود نداشته باشد. قطب‌نمای ژیرسکوپی در داخل وسایل نقلیه قرار داده می‌شود و راستا محور دیسک دوار از راستای خود منحرف می‌شود. اما این انحراف توسط اثر ژیرسکوپی خنثی می‌شود و محور دیسک دوار همواره در راستای شمال قرار خواهد داشت.





پخش فیلم

مشاهده فیلم ژیرسکوپ و کاربردهای آن

فعالیت

با استفاده از آرمیچر و چند دیسک یک ژیرسکوپ بسازید.

ارتعاشات

هر حرکت رفت و برگشتی در فیزیک به نوعی با موضوع ارتعاشات مرتبط است. ما همواره با ارتعاش در پیرامون خود در ارتباط هستیم. به‌طور مثال ما صداهای محیط پیرامون خود را به کمک ارتعاشات پدید آمده در پرده گوش می‌شنویم و همچنین قلب ما به‌طور پیوسته حرکت ارتعاشی خود را برای پمپاژ خون در بدن ما تکرار می‌کند. در ارتعاشات هر یک بار حرکت رفت و برگشت را نوسان گویند. معروف‌ترین مثال از انواع ارتعاشات حرکت تاب است. در حرکت تاب صندلی آویزان دارای یک حرکت رفت و برگشتی است که در زمان هل دادن به حرکت خود ادامه می‌دهد و سرعت بیشتری می‌گیرد. این نوع حرکت، حرکت ارتعاشی دورانی است که حول میله بالایی تاب صورت می‌گیرد. در حرکت تاب چندین عامل مؤثر وجود دارد. وزن فرد سوار بر تاب، طول زنجیر تاب، نیروی هل دادن شخص و زمان‌های اعمال نیرو مهم‌ترین عوامل هستند. در ارتعاشات نیروی اعمالی به تاب را نیروی تحریک و فاصله زمانی هر تحریک را دوره تناوب گویند. همچنین عوامل وزن و طول زنجیر بر روی فرکانس طبیعی تاب تأثیر می‌گذارد.

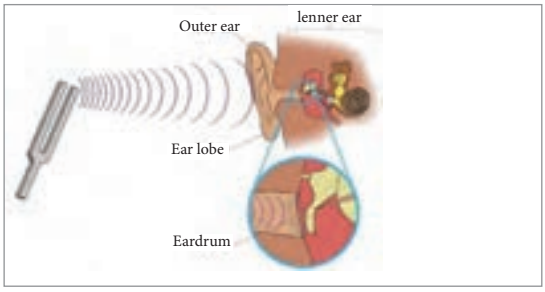
نیروی تحریک: نیرویی که توسط عامل خارجی به جسم در حال ارتعاش وارد می شود.

دوره تناوب تحریک: زمان تکرار اعمال نیروی تحریک

فرکانس تحریک: تعداد اعمال نیروی تحریک در یک ثانیه

دوره تناوب ارتعاش: زمان یک حرکت رفت و برگشت

فرکانس ارتعاش: تعداد حرکت‌های رفت و برگشتی در یک ثانیه



فعالیت

آونگ یک مثال از حرکت ارتعاش دورانی است که شباهت بسیاری به حرکت ارتعاشی تاب دارد در این فعالیت هدف، بررسی و مطالعه ارتعاش آونگ است.

وسایل مورد نیاز:

۱ـ دو نخ نازک به طول‌های مختلف L_1 و L_2

۲ـ دو جسم به عنوان وزنه

۳ـ زمان سنج

دستور کار: ابتدا یک سمت نخ به وزنه متصل و سمت دیگر نخ به تکیه گاه آویزان شود. با تکرار مراحل زیر، ستون‌های اول و دوم جدول مربوطه را تکمیل کنید.

۱ـ وزنه را اندکی از حالت اولیه منحرف کنید.

۲ـ هم‌زمان با رها کردن وزنه، کلید زمان سنج فشرده شود.

۳ـ تعداد حرکت رفت و برگشتی آونگ شمرده شود.

۴ـ انتهای حرکت رفت و برگشتی دهم، بیستم وسی‌ام، زمان سنج متوقف شود و زمان آن را ثبت کنید.

	آزمایش مربوط به جرم m۱ و طول L۱			آزمایش مربوط به جرم m۲ و طول L۲		
ردیف	تعداد نوسان	زمان نوسان	$f=\frac{\text{تعداد}}{\text{زمان}}$	تعداد نوسان	زمان نوسان	$f=\frac{\text{تعداد}}{\text{زمان}}$
۱	۱۰			۱۰		
۲	۲۰			۲۰		
۳	۳۰			۳۰		

طول دو نخ و وزن آونگ ها اندازه گرفته در رابطه زیر قرار دهید تا فرکانس نوسانات ارتعاش آونگ به دست آید.

$$f=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{L}{g}}\ ,g=۹/۸۱\frac{m}{s^۲}$$

۳۹

فعالیت

انحراف زیاد در آونگ نتیجه آزمایش را غیر دقیق می‌کند به‌عنوان یک تحقیق چرایی این موضوع را بررسی کنید؟

فرکانس طبیعی: در فعالیت قبل دیده شد که با توجه به طول نخ‌ها فرکانس ارتعاش آونگ متغیر است و این رفتار ارتعاشی جز به طول نخ به چیز دیگری وابسته نیست. در واقع به این نوع از حرکت ارتعاشی که بدون اعمال نیروی خارجی صورت می‌گیرد، ارتعاش آزاد گفته می‌شود. فرکانس حرکت در ارتعاشات آزاد را فرکانس طبیعی سیستم می‌گویند که به مشخصات سیستم بستگی دارد. برای مثال، فرکانس اندازه‌گیری شده و محاسبه شده در فعالیت قبل همان فرکانس طبیعی آونگ است. مشاهده شد که این مقدار تنها وابسته به طول نخ بوده و به میزان انحراف اولیه یا جرم وزنه وابسته نیست.

بر همین اساس تمام اجسام و سیستم‌های دینامیکی دارای یک فرکانس طبیعی می‌باشد که از آن به عنوان فرکانس تحریک یاد می‌شود.

پدیده تشدید: مثال تاب را به یاد آورید، هنگامی که دوست شما تاب را هل می‌دهد اگر ضربه‌های او در زمان‌های مناسبی اعمال نشود حرکت تاب به‌هم می‌ریزد و رفت و برگشت آن به‌طور صحیح انجام نمی‌شود. ولی اگر ضربه وارد کردن به تاب در زمان‌های مشخص با آهنگ مرتب وارد شود، می‌دانیم حرکت تاب بیشتر و بیشتر می‌گردد.

هل دادن و ضربه زدن به تاب را در سیستم‌های ارتعاشی، تحریک می‌گویند و بر طبق تعریف انجام شده، تعداد ضربه‌های وارد شده در یک واحد زمانی (ثانیه) را فرکانس تحریک گویند.

فرکانس تحریک مناسب برای هل دادن تاب همان فرکانس طبیعی تاب است. بنابراین وقتی فرکانس تحریک با فرکانس طبیعی یک سیستم برابر می‌شود، حرکت ارتعاشی آن شدت می‌گیرد این پدیده را تشدید می‌گویند.
از دیگر مثال‌های پدیده تشدید در صنعت می‌توان به سرعت بحرانی شفت اشاره کرد.

فیلم

مشاهده فیلم سرعت بحرانی شفت

ارتعاشات و آشنایی با انواع آن کاربردهای ویژه‌ای دارد که در ادامه به بررسی آنها پرداخته می‌شود.
کاربردهای ارتعاشات: گاهی ارتعاشات همانند شدت تاب خوردن کودک در پارک مطلوب است. تپش قلب انسان ناشی از ارتعاشات قلب است که با حرکت‌های نسبتاً منظم و تناوبی سبب پمپ شدن خون در رگ‌ها و گردش خون می‌شود.
از جمله موارد دیگر در بدن انسان، تارهای صوتی است که با نوسانات تحت فرمان مغز باعث تولید صداهایی می‌شوند که عامل صحبت کردن هستند. همچنین نفس کشیدن نوعی حرکت ارتعاشی تناوبی است که هوا وارد ریه و سپس خارج می‌شود و از این طریق اکسیژن مورد نیاز بدن تأمین می‌گردد.
حتی راه رفتن و دویدن نوعی حرکت ارتعاشی است که پاها و دست‌ها به صورت آهنگین حرکت می‌کنند و سبب حفظ تعادل و حرکت انسان می‌شوند.
صداهای موزونی که از سازهای زهی و بادی و... بیرون می‌آید ناشی از ارتعاشات است.
موتور اتومبیل‌ها و موتورسیکلت‌ها از طریق ارتعاشات منظم سیلندر درون پیستون به‌صورت نیروی محرکه درمی‌آید و به چرخ‌ها منتقل می‌شود و سبب حرکت می‌گردد.
از جمله حرکات ارتعاشی در فضا و طبیعت می‌توان به حرکت جزر و مد امواج دریا، حرکت قمرها به دور سیارات و همچنین حرکت سیارات به دور خورشید اشاره کرد.
در مقابل ارتعاشات مطلوب که سودمند و حیات‌بخش بودند. ارتعاشات مخرب و زیان‌آورنیز وجود دارد. زمین لرزه، طوفان و گردباد نوعی حرکت ارتعاشی هستند. در چنین شرایطی باید توان مقابله وجود داشته باشد.
سازه‌های انسانی همچون پل‌ها در صورت طراحی نامناسب و با وزش باد در اثر ارتعاشات به‌وجود آمده و پدیدهٔ تشدید ویران می‌شود همچنین لاستیک ماشین می‌تواند در اثر ناميزانی و عدم بالانس بودن به سیستم تعلیق ماشین ضربه وارد کند و سبب فاجعه شود. از دیگر موارد بال‌های هواپیماست که در اثر ارتعاش ناشی از پدیدهٔ تشدید ممکن است سبب از بین رفتن آرامش شوند و در بدترین حالت سبب رخ دادن فاجعه گردد.

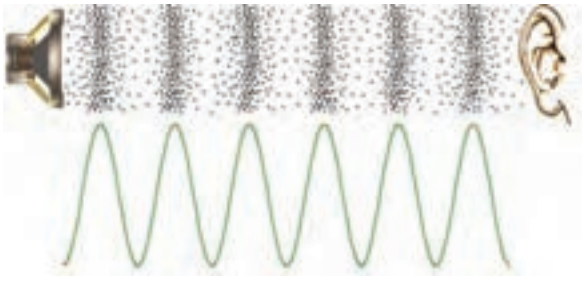
فیلم

مشاهده فیلم تشدید در پل (Tacoma Narrows)

در برخی موارد ارتعاشات موجب نویز می‌شود، به‌عنوان مثال صدای ناشی از ترافیک در خیابان‌ها و بلند شدن و نشستن هواپیما در باند فرودگاه‌ها.
با مثال‌های فوق می‌توان به این نتیجه رسید که ارتعاشات در بطن طبیعت وجود دارد و می‌توان ادعا کرد زندگی بدون ارتعاشات امکان‌پذیر نیست، بنابراین مطالعه و آموزش ارتعاشات امری ضروری است و در ارائه پروژه‌های

علمی کمک می‌کند.
امروزه ارتعاشات در صنایع مختلف، اعم از صنایع نفت و گاز و پتروشیمی تا تجهیزات دوار، صنعت خودروسازی، صنایع دفاعی و هوافضا، صنعت ساختمان، تجهیزات مخابراتی و... نقش مؤثری دارد.
در صنعت خودروسازی به‌ویژه آمبولانس‌ها اثرات ارتعاشات بر بیمار حائز اهمیت است، به همین دلیل در راستای کنترل و کاهش آن سبب طراحی کمک فنرهای هوشمند شده است.
مطالعات گسترده‌ای در زمینه ارتعاشات در بسیاری از پروژه‌های دانشگاهی در حال انجام است، برای مثال در ژاپن که کشوری زلزله‌خیز است مطالعات گسترده‌ای صورت گرفته و با بهره‌گیری از بلبرینگ‌ها در پی سازه‌ها، زلزله بر ساختمان‌ها و آسمان‌خراش‌ها کم‌اثر شده است.
جدا از بحث‌های جزیی در مورد انواع ارتعاشات، به صورت کلی مطالعه و بررسی ارتعاشات سیستم، کاربردهای زیادی دارد. از جمله کاربردهای مفید ارتعاشات موارد زیر هستند.
بررسی زلزله: زلزله در واقع یک ارتعاش بزرگ است. حرکت نوسانی لایه‌های پوسته زمین که به دلایل مختلفی تحریک می‌شود. مطالعه نحوه ارتعاش این لایه‌ها برای تخمین حدود اندازه زمین لرزه، نوع لرزه و طراحی مقاوم سازه‌ها با کمترین هزینه کمک می‌کند.

بررسی صوت: پدیدهٔ صوت ناشی، از حرکت امواج پرفشار و کم فشار در محیط است. در تصویر زیر نشان داده شده است که چگونه امواج صوتی با متراکم و منبسط کردن ملکول‌های محیط (هوا، آب و...) منتقل می‌شوند. در منبع صوت لایه‌ای از محیط در زمان‌های متفاوت متراکم یا منبسط می‌شود و شکل موج صوتی یا همان صدا را تشکیل می‌دهد به مرور زمان این لایه‌ها در محیط اطراف خود اثر می‌گذارند و به این صورت موج در محیط به حرکت درمی‌آید.



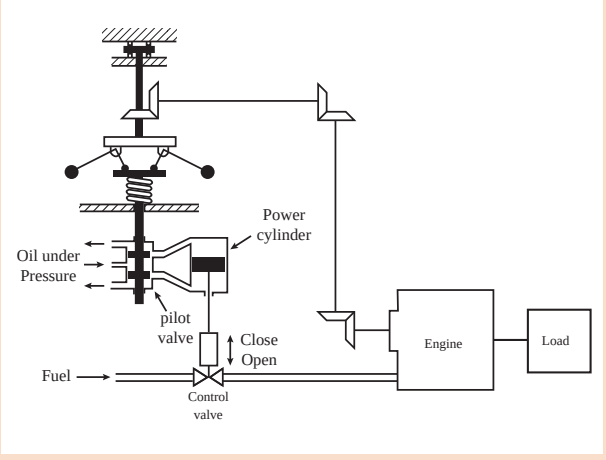
شکل ۱۷ــ صوت در محیط پیرامون با ایجاد موج فشاری و به نوسان در آمدن ذرات هوا منتقل می‌شود.

بررسی ارتعاشات ماشین‌های ابزار: درماشین ابزارهایی که یک جسم به‌صورت دوار روی آن نصب می‌شود معمولاً به دلیل سرعت بالایی که وجود دارد کوچک‌ترین انحراف مرکز جرم باعث ایجاد ارتعاش در سیستم می‌شود که این موضوع برای فرایند ماشین کاری مناسب نمی‌باشد. برای مثال اگر با فرزی که سنگ آن نصف شده است، به کار ادامه دهید می‌توان لرزش شدید دستگاه را حس کرد.
این اتفاق در ماشین ابزارهای بسیار دقیق که اولاً سرعت دورانی ابزار یا قطعه در آن بسیار بالا است و همچنین دقت پرداخت کاری زیادی مورد نظر هست ممکن است که باعث بروز اختلال در فرایند ماشین کاری شود که به آن چترینگ گویند.

شکل ۱۸ــ برخی از اثرات مخرب ارتعاش در فرایند ماشین کاری که به چترینگ معروف است.

فعالیت

در صنعت، کنترل سرعت موتورها از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است. یکی از مهم‌ترین این ابزارها گاورنر است. در شکل زیر نمای شماتیک از گاورنر و مکانیزم کنترل سرعت موتور به نمایش در آمده است. اصول کنترل سرعت در دستگاه گاورنر بر نیروی گریز از مرکز و رابطهٔ آن با سرعت دورانی استوار است. سختی فنر به‌کار رفته در گاورنر به‌گونه‌ای تنظیم می‌شود که روغن تحت فشار در سرعت دورانی مورد نظر به هیچ طرف سیلندر نیرو وارد نشود. اگر سرعت موتور در اثر اغتشاش از این حد مطلوب کمتر شود، کاهش نیروی گریز از مرکز در گاورنر باعث حرکت شیر کنترل سوخت به سمت پایین می‌شود که این حرکت باعث افزایش ورودی سوخت شده، سرعت افزایش می‌یابد تا به حد مطلوب برسد. اگر سرعت موتور بیشتر از حد مطلوب شود، افزایش نیروی گریز از مرکز باعث بالا رفتن شیر کنترلی شده، سوخت کمتری به ماشین می‌رسد. کاهش سوخت باعث کاهش سرعت ماشین و رسیدن آن به حد مطلوب می‌شود. در شکل ۲۰ دو نمونه صنعتی از گاورنر که در صنعت به‌کار گرفته شده‌اند به نمایش در آمده است. با کمک معلم خود یک گاورنر بسازید.



شکل ۱۹ــ سیستم کنترل سرعت با استفاده از گاورنر

شکل ۲۰ــ دو نمونه صنعتی از گاورنر که در صنایع به‌کار برده می‌شوند

عنوان پودمان	تکالیف عملکردی (واحدهای یادگیری)	استاندارد عملکرد (کیفیت)	نتایج مورد انتظار	شاخص تحقق	نمره
پودمان ۴: تحلیل نیروهای دینامیکی	۱ـ تحلیل و محاسبات مربوط به حرکت دوبعدی ۲ـ تحلیل و بررسی مفاهیم مرکز جرم، ممان اینرسی، ارتعاش و تشدید	تحلیل و محاسبات حرکت اجسام تحت اثر نیروها و بررسی مفاهیم جرم، اینرسی، ارتعاش و تشدید	بالاتر از حد انتظار	تعیین بردار جابه‌جایی، سرعت و شتاب ذره، تعیین بردار سرعت و شتاب حرکت پرتابه و حرکت دایره‌ای، تعیین مرکز جرم و ممان اینرسی جسم، تعیین تعداد و زمان نوسانات آونگ	۳
			درحد انتظار	تعیین بردار جابه‌جایی، سرعت و شتاب ذره، تعیین بردار سرعت و شتاب حرکت پرتابه و حرکت دایره‌ای، تعیین مرکز جرم	۲
			پایین‌تر از حد انتظار	تعیین بردار جابه‌جایی، سرعت و شتاب ذره، تعیین بردار سرعت و شتاب حرکت پرتابه	۱
	نمره مستمر از ۵				
	نمره شایستگی پودمان				
	نمره پودمان از ۲۰				